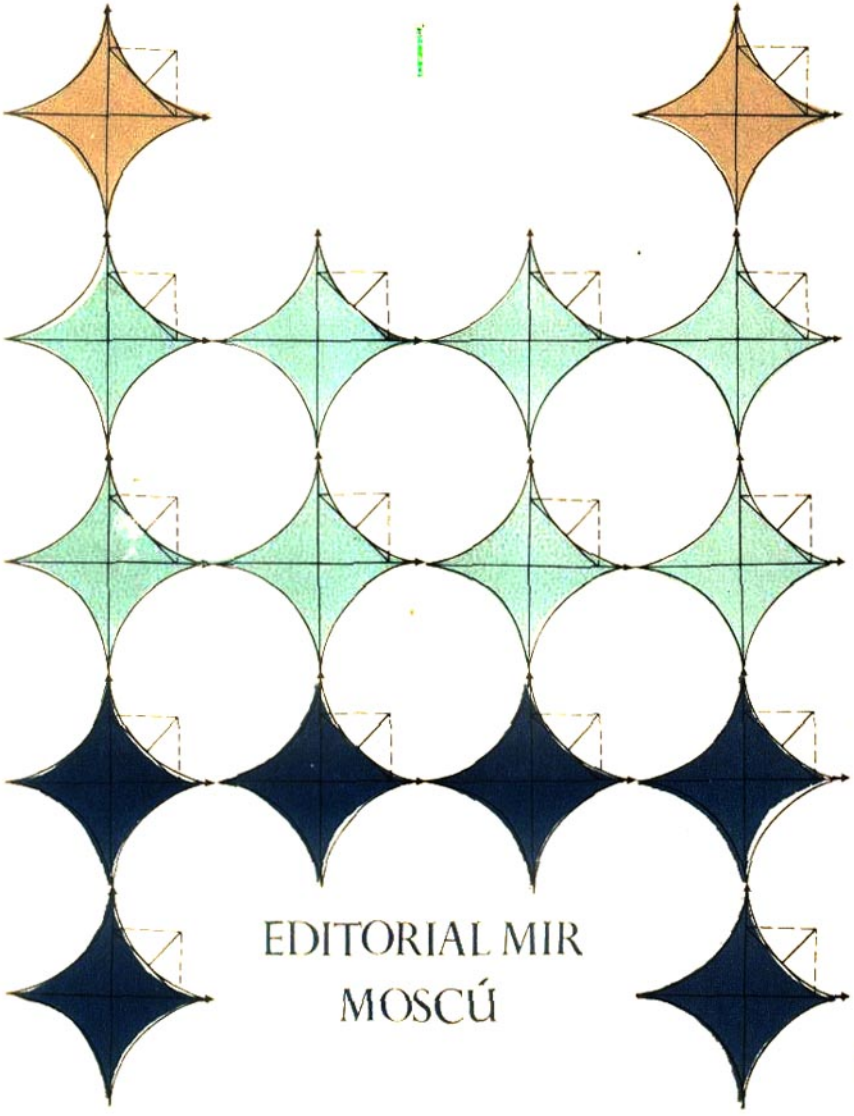
PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES



EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

В. БОЛГОВ, Б. ДЕМИДОВИЧ, В. ЕФИМЕНКО,
А. ЕФИМОВ, А. КАРАКУЛИН, С. КОГАН,
Г. ЛУНЦ, Е. ПОРШНЕВА, А. ПОСПЕЛОВ,
С. ФРОЛОВ, Р. ШОСТАК, А. ЯНПОЛЬСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Под редакцией
А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. BOLGOV, B. DEMIDÓVICH, V. EFIMENKO,
A. EFIMOV, A. KARAKULIN, S. KOGAN
G. LUNTS, E. PORSHNEVA, A. POSPELOV,
S. FROLOV, R. SHOSTAK
Y. A. YAMPOLSKI

PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

PARA LOS CENTROS
DE ENSEÑANZA
TÉCNICA SUPERIOR

ALGEBRA LINEAL Y BASES DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

REDACTORES
A. EFIMOV, B. DEMIDOVICH

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por el ingeniero
K. Medkov

Impreso en la URSS. 1983

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», I Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

На испанском языке

© Издательство «Наука». 1981
© Traducción al español. Editorial Mir. 1983

INDICE

PRÓLOGO 9

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS 11

§ 1. Números reales. Conjuntos. Lógica simbólica . . . 11

1. Concepto de número real (11). 2. Conjuntos y operaciones sobre ellos (13). 3. Cotas superiores e inferiores (17). 4. Lógica simbólica (19).

§ 2. Funciones de una variable real 22

1. Concepto de función (22). 2. Funciones elementales y sus gráficas (26).

§ 3. Límite de una sucesión de números reales 30

1. Concepto de sucesión (30). 2. Límite de una sucesión (31).

§ 4. Límite de una función. Continuidad 33

1. Límite de una función (33). 2. Infinitésimos e infinitos (39). 3. Continuidad de la función en un punto. Clasificación de los puntos de discontinuidad (41). 4. Continuidad en un conjunto. Continuidad uniforme (43).

§ 5. Números complejos 45

1. Operaciones algebraicas con los números complejos (45). 2. Polinomios y ecuaciones algebraicas (52) 3. Límite de la sucesión de números complejos (54).

Respuestas 57

CAPÍTULO 2. ALGEBRA VECTORIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA 69

§ 1. Algebra vectorial 69

1. Operaciones lineales con los vectores (69). 2. Base y las coordenadas de un vector (72). 3. Coordenadas rectangulares cartesianas de un punto. Problemas elementales de la geometría analítica (75). 4. Producto escalar de vectores (78). 5. Producto vectorial de vectores (82). 6. Producto mixto de vectores (84).

§ 2. Objetos geométricos lineales 86

1. La recta en un plano (86). 2. El plano y la recta en el espacio (91).

§ 3. Curvas en el plano 98

1. Ecuación de la curva en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas (98). 2. Curvas algebraicas de segundo orden (100). 3. Ecuación de una curva en el sistema polar de coordenadas (110). 4. Ecuaciones paramétricas de una curva (114). 5. Algunas curvas que se encuentran en las matemáticas y en sus aplicaciones (116).

§ 4. Superficies y curvas en el espacio 121
1. Ecuaciones de la superficie y de la curva en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas (121). 2. Superficies algebraicas de segundo grado (125). 3. Clasificación de las superficies según el tipo de transformaciones de la simetría (129).
Respuestas 134

CAPÍTULO 3. DETERMINANTE Y MATRICES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 144

§ 5. Determinantes 144
1. Determinantes de segundo y tercer órdenes (144). 2. Determinantes de n-ésimo orden (147). 3. Métodos principales de cálculo de los determinantes de n-ésimo orden (150).
§ 2. Matrices 154
1. Operaciones con las matrices (154). 2. Matriz inversa (157).
§ 3. Espacio de vectores aritméticos. Rango de una matriz 160
1. Vectores aritméticos (160). 2. Rango de una matriz (163).
§ 4. Sistemas de ecuaciones lineales . . . . . .
1. Regla de Cramer. (168). 2. Solución de los sistemas arbitrarios (170). 3. Sistemas homogéneos (174). 4. Método de Jordan—Gauss de eliminaciones sucesivas (178).
§ 5. Algunos problemas de cálculo del álegbra lineal . . . 180
1. Operaciones sobre las matrices (180). 2. Cálculo de los determinantes (183). 3. Sistemas de ecuaciones lineales (185).

Respuestas 188

CAPÍTULO 4. ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL . . . 199

§ 1. Espacios vectoriales lineales y espacios provistos de producto escalar 199
1. Espacio vectorial lineal (199). 2. Subespacios y variedades lineales (207). 3. Espacios provistos de un producto escalar (209).
§ 2. Operadores lineales 213
1. Algebra de los operadores lineales (213). 2. Números propios y vectores propios de un operador lineal (219). 3. Operadores lineales en los espacios provistos de un producto escalar (222). 4. Reducción de la matriz de un operador lineal a la forma diagonal (226).
§ 3. Formas bilineales y cuadráticas 228
1. Formas lineales (228). 2. Formas bilineales (229). 3. Formas cuadráticas (230). 4. Curvas de segundo orden y superficies de segundo grado (233).
Respuestas 237

CAPÍTULO 5. CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE 249

§ 1. Derivada 249

1. Definición de la derivada. Derivación de las funciones definidas explícitamente (249). 2. Derivación de las funciones definidas en forma paramétrica o implícita (257). 3. Derivadas de órdenes superiores (261). 4. Aplicaciones geométricas y mecánicas de la derivada (265).

§ 2. Diferencial 269

1. Diferencial de primer orden (269). 2. Diferenciales de órdenes superiores (272).

§ 3. Teoremas de las funciones derivables. Fórmula de Taylor 272

1. Teoremas del valor medio (272). 2. Regla de L'Hospital-Bernoulli (274). 3. Fórmula de Taylor (279).

§ 4. Investigación de las funciones y construcción de las gráficas 282

1. Crecimiento y decrecimento de las funciones. Extremo (282). 2. Dirección de la convexidad. Puntos de inflexión (287). 3. Asíntotas (289). 4. Construcción de las gráficas de las funciones (290).

§ 5. Funciones vectoriales y complejas de una variable real 295

1. Definición de la función vectorial de una variable real (295). 2. Derivación de la función vectorial (296). 3. Tangente a una curva espacial y a un plano normal (298). 4. Segunda derivada de la función vectorial (299). 5. Características diferenciales de las curvas espaciales (302). 6. Funciones complejas de una variable real (308).

§ 6. Métodos numéricos de la función de una sola variable 309

1. Resolución numérica de las ecuaciones (309). 2. Interpolación de las funciones (316). 3. Diferenciación numérica (324).

Respuestas 327

CAPÍTULO 6. CÁLCULO INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE 354

§ 1. Métodos principales de cálculo de la integral indefinida 354

1. Función primitiva e integral indefinida (354). 2. Integración por cambio de variable (357). 3. Integración por partes (362).

§ 2. Integración de las clases principales de funciones elementales 364

1. Integrales simples que contienen un trinomio de segundo grado (364). 2. Integración de las fracciones racionales (366). 3. Integración de las funciones trigonométricas e hiperbólicas (370). 4. Integración de ciertas funciones irracionales (376).

§ 3. Problemas mixtos de integración 379

§ 4. Integral definida y métodos de su cálculo 380

1. Integral definida como límite de una suma integral (380). 2. Cálculo de las integrales más simples con ayuda de la fórmula de Newton—Leibniz (383). 3. Propiedades de la integral definida (385). 4. Cambio de una variable en la integral definida (389). 5. Integración por partes (391).

§ 5. Integrales impropias 393
1. Integrales con límites infinitos (393). 2. Integrales de las funciones no acotadas (395).

§ 6. Aplicaciones geométricas de la integral definida . . . 398
1. Area de una figura plana (398). 2. Longitud del arco de una curva (404). 3. Area de la superficie de revolución (407). 4. Volumen de un cuerpo (410).

§ 7. Aplicación de la integral definida a la resolución de ciertos problemas de mecánica y física 414
1. Momentos y centros de masas de las curvas planas (414). 2. Problemas físicos (417).

§ 8. Integración numérica de las funciones de una variable 422

Respuestas 429

CAPÍTULO 7. CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 447

§ 1. Conceptos fundamentales 447
1. Concepto de función de varias variables (447). 2. Límite y continuidad de la función (450). 3. Derivadas parciales (453). 4. Diferencial de una función y sus aplicaciones (457).

§ 2. Derivación de las funciones compuestas o implícitas 461
1. Funciones compuestas de una y de varias variables independientes (461). 2. Funciones implícitas de una y de varias variables independientes (464). 3. Sistemas de las funciones implícitas y de las definidas en forma paramétrica (467). 4. Cambio de variables en las expresiones diferenciales (470).

§ 3. Aplicaciones de las derivadas parciales 475
1. Fórmula de Taylor (475). 2. Extremo de una función (478). 3. Extremo condicionado (480). 4. Valores máximo y mínimo de una función (483). 5. Aplicaciones geométricas de las derivadas parciales (486).

§ 4. Números aproximados y operaciones con ellos . . . 492
1. Errores absoluto y relativo (492). 2. Operaciones con números aproximados (495).

Respuestas 497

APÉNDICE. DESCRIPCIÓN BREVE DEL LENGUAJE FORTRAN-IV 507

PRÓLOGO

Es a B. P. Demidóvich a quien se debe la idea de crear un manual de «Problemas de las matemáticas superiores para los centros técnicos de enseñanza superior» que contenga problemas de todas las partes del curso matemático concernientes a las especialidades técnicas de ingeniería. No obstante, la muerte prematura del profesor Demidóvich le impidió realizar este trabajo. La versión de «Problemas» que se ofrece al lector fue preparada para la edición por un colectivo de autores que poseen una gran experiencia pedagógica en los centros de enseñanza técnica superior y es, precisamente, la encarnación de la idea de B. P. Demidóvich.

La estructura general del libro fue propuesta por A. V. Efimov, el redactor, y refleja el contenido del programa de matemáticas para las especialidades de ingeniería en los centros de enseñanza superior, calculado para 510 horas de estudio. Se ha tomado en consideración la experiencia del profesorado del Instituto de Técnica Electrónica de Moscú.

En el manual están incluidos los problemas y ejemplos de todas las partes del curso matemático para los centros técnicos de enseñanza superior, salvo la teoría de las probabilidades y algunas ramas especiales. Con el fin de reafirmar los conocimientos referentes al programa escolar se ha introducido, además, una serie de problemas que permiten repasar con una profundidad mayor las partes fundamentales del análisis y del álgebra vectorial que se estudian en los centros de enseñanza media.

Una de las peculiaridades principales del manual consiste en que la mayoría de los capítulos contiene problemas de cálculo, cuya resolución requiere el empleo de las máquinas calculadoras.

La primera parte del libro llamada «Algebra lineal y bases del análisis matemático» incluye aquellas partes de las matemáticas que, como regla, se estudian en el primer año. Entre ellos figuran el álgebra vectorial con elementos de geometría analítica, el álgebra lineal, como también el cálculo diferencial de las funciones de una variable y de varias variables y, además, el cálculo integral de las funciones de una sola variable.

El material citado se expone en los capítulos repartidos en párrafos y puntos. La enumeración de los problemas viene dada individualmente en cada capítulo por párrafos. Al final de cada capítulo se dan las respuestas a todos los problemas de cálculo, con la particularidad de que, los problemas marcados con un asterisco vienen acompañados, en las respuestas, de indicaciones para resolverlos; para los problemas marcados con dos asteriscos las respuestas contienen un modelo de su resolución.

Cada parte del libro está provista de una introducción breve que contiene, tanto los conocimientos teóricos indispensables (definiciones, fórmulas, teoremas), como un gran número de ejemplos resueltos detalladamente. El comienzo de la resolución de los ejemplos, como también de los problemas con dos asteriscos, se indica con el signo ◀ , y el fin, con el signo ▶. Las indicaciones para la resolución se distinguen mediante el signo ●.

El apéndice llamado «Descripción breve del lenguaje FORTRAN-IV» está escrito, a petición del redactor del libro, por el docente Tereschenko A. M.

El manuscrito del manual se discutió en las cátedras de matemáticas en los Institutos de Moscú de Ingeniería Física, de Acero y Aleaciones y de Energía. Como resultado surgió toda una serie de observaciones valiosas y consejos que contribuyeron a reforzar el carácter práctico del libro. El colectivo de autores agradece a los profesores Prilepko A. I., Trenoguin V. A. y Pojozhaev S. I., como también a todos los docentes de las cátedras, encabezadas por ellos, que tomaron parte en la discusión.

Una gratitud cordial se expresa a Lapenko L. B. y Fominá S. A., colaboradores de la cátedra de matemáticas superiores del Instituto de Técnica Electrónica de Moscú, por la ayuda que ellos prestaron en el proceso de preparación del manual para la edición.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS

§ 1. Números reales. Conjuntos. Lógica simbólica

1. Concepto de número real. Por el curso de la escuela secundaria sabemos que todo *número real* no negativo x se representa mediante una fracción decimal infinita

$$[x],\ x_1x_2,\ \ldots, \tag{1}$$

donde $[x]$ es el número entero mayor que no sobrepasa x y se denomina *parte entera* del número x, $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

En este caso, las fracciones en las cuales $x_n = 9$ para todo $n \geqslant n_0$ (n_0 es cierto número natural) se excluyen comúnmente de la consideración en virtud de las siguientes igualdades:

$$[x],\ 999\ \ldots = [x] + 1,$$

$$[x],\ x_1x_2\ \ldots\ x_{n_0-1}999\ \ldots = [x],\ x_1x_2\ \ldots$$

$$\ldots\ (x_{n_0-1} + 1)\ (n_0 \geqslant 1,\ x_{n_0-1} \neq 9).$$

Un número real x es *racional*, es decir, puede ser representado en forma de la razón $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ cuando, y sólo cuando, la fracción (1) es periódica. En el caso contrario el número x es *irracional*.

Se llama *valor absoluto* o *módulo* del número real x un número no negativo

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se supone que las reglas de comparación de los números reales, como también las operaciones aritméticas sobre los mismos se conocen por el curso de enseñanza secundaria.

1.1. Demuéstrese que el número

$$0{,}1010010001\ \ldots\ \underbrace{10\ \ldots\ 01}_{n}\ \ldots$$

es irracional. Escríbanse los primeros tres términos de cada una de las sucesiones de fracciones decimales finitas que aproximan el número citado por defecto y por exceso.

1.2. Represéntense en forma de fracciones propias racionales los números que siguen:

a) 1, (2); b) 3,00(3); c) 0,110(25).

1.3. Demuéstrese que el número lg 5 es irracional.

◀ Supongamos que lg 5 es un número racional, es decir,

$$\lg 5 = \frac{m}{n}; \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces:

$$10^{\frac{m}{n}} = 5,$$
$$10^m = 5^n,$$
$$2^m \cdot 5^m = 5^n.$$

Pero la última igualdad no es posible: el número 2 figura en la descomposición del primer miembro en factores primo y no interviene en la descomposición análoga para el segundo miembro, lo que contradice la unicidad de la descomposición de los números enteros en factores primo. Por esta razón, la suposición de partida no es cierta y, por tanto, el número lg 5 es irracional. ▶

Demuéstrese que los números que siguen son irracionales:

1.4. $\sqrt{3}$. **1.5.** $\sqrt[n]{p}$, p es un número primo, $n > 1$.

1.6. $2 + \sqrt{3}$. **1.7.** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

1.8. $\log_3 p$, p es un número primo.

1.9. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, si se sabe que π es irracional.

En los problemas 1.10—1.13 compárense los números.

1.10. $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ y $\sqrt{3} - 2$.

◀ Supongamos que se verifica la desigualdad

$$\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{3} - 2 \qquad (2$$

Entonces:

$$\sqrt{2} + 2 < \sqrt{5} + \sqrt{3},$$
$$6 + 4\sqrt{2} < 8 + 2\sqrt{15}$$
$$2\sqrt{2} < 1 + \sqrt{15},$$
$$8 < 16 + 2\sqrt{15}.$$

Puesto que la última igualdad se verifica, entonces, debido a la equivalencia de las transformaciones realizadas, es verídica también la desigualdad inicial (2). ▶

1.11. $\log_{1/2}\frac{1}{3}$ y $\log_{1/3}\frac{1}{2}$.

1.12. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}}$ y $\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$. **1.13.** $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2}$ y 1.

Sin recurrir a las tablas, demuéstrense las siguientes desigualdades numéricas:

1.14. $\log_3 10 + 4\lg 3 > 4$. **1.15.** $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

1.16. $\log_4 26 > \log_6 17$.

1.17. Demuéstrese que el módulo de un número real posee las siguientes propiedades:

a) $|x| = \max\{x, -x\}$;

b) $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$ y $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;

c) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ y $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$ (*desigualdades triangulares*);

d) $\sqrt{x^2} = |x|$.

Resuélvanse las ecuaciones:

1.18. $|3x-4| = \frac{1}{2}$. **1.19.** $\sqrt{x^2} + x^3 = 0$.

1.20. $|-x^2+2x-3| = 1$, **1.21.** $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = 1$.

1.22. $\sqrt{(x-2)^2} = -x+2$.

Resuélvanse las desigualdades:

1.23. $|x-2| \geqslant 1$. **1.24.** $|x^2-7x+12| > x^2-7x+12$.

1.25. $x^2 + 2\sqrt{(x+3)^2} - 10 \leqslant 0$.

1.26. $\frac{1}{|x-1|} < 4-x$. **1.27.** $\sqrt{(x+1)^2} \leqslant -x-1$.

2. Conjuntos y operaciones sobre ellos. Por *conjunto* se entiende cualquier totalidad de objetos, llamados elementos del conjunto.

La notación $a \in A$ significa que el objeto a es un elemento del conjunto A (pertenece al conjunto A); en el caso contrario se escribe $a \notin A$. Un conjunto que no contiene ningún elemento, se denomina *vacío* y se designa por el símbolo ϕ. La notación $A \subset B$ (A está contenido en B) quiere decir que todo elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B; en este caso el conjunto A lleva el nombre de *subconjunto* del conjunto B. Los conjuntos A y B se llaman *iguales* ($A = B$), si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Existen dos métodos principales para definir (escribir) los conjuntos.

a) El conjunto A se determina por enumeración directa de todos sus elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, es decir, se escribe en la forma

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

b) El conjunto A se determina como una totalidad de aquellos, y sólo de aquellos, elementos de cierto conjunto básico T, que poseen la propiedad común α. En este caso se emplea la designación

$$A = \{x \in T \mid \alpha(x)\},$$

donde la notación $\alpha(x)$ significa que el elemento x posee la propiedad α.

EJEMPLO 1. Descríbase por enumeración de elementos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x - 3)(x^2 - 1) = 0 \quad \text{y} \quad x \geqslant 0\}.$$

◀ A es un conjunto de todas las raíces enteras no negativas de la ecuación $(x - 3)(x^2 - 1) = 0$. Por consiguiente, $A = \{1, 3\}$. ▶

Se llama *unión* de los conjuntos A y B el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{ó} \quad x \in B\}.$$

Se llama *intersección* de los conjuntos A y B el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}.$$

Se llama *diferencia* de los conjuntos A y B el conjunto

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\}.$$

Si, en particular, A es un subconjunto de cierto conjunto universal T, entonces la diferencia $T \setminus A$ se designa por el símbolo $\overline{A}$ y se denomina *complemento del conjunto* A (hasta que se obtenga el conjunto T).

1.28. Establézcase cuál de las dos notaciones es cierta:
a) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ó $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;
b) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ ó $\{1, 2\} \subset \{1, 2\{1, 2\}\}$.

En los problemas 1.29—1.34 descríbanse los conjuntos dados por enumeración de todos sus elementos.

1.29. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$.

1.30. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} \leqslant 2 \text{ y } x > 0\}$.

1.31. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x - 4 \leqslant 0\}$.

1.32. $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{4} \leqslant 2^x < 5\right\}$.

1.33. $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \log_{1/2} \frac{1}{x} < 2\right\}$.

1.34. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos^2 2x = 1 \text{ y } 0 < x \leqslant 2\pi\}$.

Expónganse en un plano de coordenadas los siguientes conjuntos:

1.35. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 2 = 0\}$.
1.36. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$.
1.37. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 1)(y + 2) = 0\}$.
1.38. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \sqrt{2x + 1} \text{ y } 2x + 1 \geqslant 0\}$.
1.39. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > 2x + 1\}$.
1.40. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2^{x+1} = y^2 + 4 \text{ y } 2^{x-1} \leqslant y\}$.
1.41. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos 2x = \cos 2y\}$.

1.42. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x} > \frac{1}{y},\ x \neq 0,\ y \neq 0\right\}$.

1.43. Descríbanse por enumeración de todos los elementos los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $B \setminus A$, si

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 20 = 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 12 = 0\}.$$

La notación $m \mid n$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$, significa que el número m es el divisor del número n. Descríbanse los siguientes conjuntos:

1.44. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8 \text{ y } x \neq 1\}$. **1.45.** $\{x \in \mathbb{Z} \mid 8 \mid x\}$.

1.46. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 12\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8\}$.

1.47. $\{x \in \mathbb{N} \mid 12 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \mid x\}$.

1.48. Demuéstrese que:

a) la igualdad $A \cap B = B$ se verifica cuando, y sólo cuando, $B \subset A$;

b) la igualdad $A \cup B = B$ se verifica cuando, y sólo cuando, $A \subset B$.

1.49. Sean $A = (-1, 2]$ y $B = [1, 4)$. Hállense los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ y represéntense éstos en un eje numérico.

Considerando el segmento $T = [0, 1]$ como un conjunto universal, hállense y expónganse en un eje numérico los complementos de los siguientes conjuntos:

1.50. $\{0, 1\}$. **1.51.** $(1/4, 1/2)$. **1.52.** $(0, 1/2]$.

1.53. $\{1/4\} \cup [3/4, 1)$.

1.54. Demuéstrese que la operación de toma del complemento posee la propiedad de *reflexividad*:

$$\overline{(\bar{A})} = A,$$

y está ligada también con la relación de inclusión $\subset$ y las operaciones $\cup$ y $\cap$ mediante las siguientes *leyes de dualidad*:

$$\text{si } A \subset B, \text{ entonces } \bar{A} \supset \bar{B};$$

$$A \overline{\cup} B = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{y} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

1.55. Demuéstrese que las operaciones $\cup$ y $\cap$ están entrelazadas por las *leyes distributivas*:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Haciendo uso de los resultados de los problemas 1.54 y 1.55, demuéstrense las siguientes igualdades:

1.56. $A \setminus B \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A}$.

◀ Puesto que $\bar{A} \cup \bar{B} = A \cap B$, entonces el primer miembro de la igualdad que se demuestra adquiere la forma

$$(\overline{A/B}) \cap (\overline{A \cap B}) = \overline{(A/B) \cup (A \cap B)} = \bar{A}. \blacktriangleright$$

1.57. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$. **1.58.** $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \cup B$.

1.59. $A \cap (\overline{A \setminus B}) = A \cap B$.

Las operaciones $\cup$ y $\cap$ se generalizan de un modo natural para el caso de una familia arbitraria (finita o infinita) de conjuntos. Por ejemplo, sea dada una familia de conjuntos A_n, $n \in \mathbb{N}$. La *unión* de los conjuntos de esta familia se denota por el símbolo $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y se determina como un conjunto de todos aquellos elementos, cada uno de los cuales pertenece por lo menos a uno de los conjuntos A_n. La *intersección* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ se determina como conjunto de todos aquellos elementos que pertenecen a cada uno de los conjuntos A_n.

Para las familias dadas de conjuntos A_n, $n \in \mathbb{N}$, hállense $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$:

1.60. $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leqslant x \leqslant n\}$.

1.61. $A_n = \{3n - 2,\ 3n - 1\}$.

1.62. $A_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$.

1.63. Sea A un conjunto de todos los puntos de un plano que forman los lados de cierto triángulo inscrito en una circunferencia dada. Descríbanse la unión y la intersección de todos los conjuntos de este tipo, si:

a) los triángulos son arbitrarios;

b) los triángulos son regulares;

c) los triángulos son rectangulares.

Un conjunto X se denomina *numerable*, si puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto mencionado y los del conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales.

EJEMPLO 2. Pruébese que el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los números enteros es numerable.

◀ Establezcamos una correspondencia biunívoca entre los elementos de este conjunto y los números naturales, ordenando, por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Z}$ del modo siguiente:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots,$$

y asignando, a continuación, a todo número entero su número de orden en dicha sucesión. ▶

Demuéstrese que son numerables los siguientes conjuntos:

1.64. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1.65. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1.66. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}\}$

1.67. Demuéstrese que si el conjunto X es numerable y $A \subset X$ es su subconjunto infinito, entonces el conjunto A es también numerable.

Haciendo uso de este resultado, demuéstrese que el conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = k^2 - k + 1, \quad k \in \mathbb{N}\}$$

es numerable.

1.68. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos numerables. Demuéstrese que su unión $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es un conjunto numerable.

● Sea $X_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,l}, \ldots\}$. En este caso los elementos del conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ pueden escribirse en forma de la tabla siguiente:

$$\begin{array}{l} x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,l}, \ldots, \\ x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,l}, \ldots, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,l}, \ldots, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{array}$$

Con el fin de demostrar la numerabilidad del conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, resulta suficiente ahora enumerar de uno u otro modo todos los elementos de esta tabla.

Utilizando el resultado del problema 1.68, demuéstrese que son numerables los siguientes conjuntos:

1.69. $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{m}{n}$ para ciertos $m, n \neq 0$ de $\mathbb{Z}\}$, es un conjunto de todos los números racionales.

1.70. Un conjunto de todos los puntos de un plano con las coordenadas racionales.

1.71. Un conjunto de todos los polinomios de coeficientes racionales.

3. Cotas superiores e inferiores. Sea X un conjunto arbitrario no vacío de números reales. El número $M = \text{máx } X$ se denomina *elemento mayor (maximal)* del conjunto X, si $M \in X$ y para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $x \leqslant M$. Análogamente se determina el concepto de *elemento menor (minimal)* $m = \text{mín } X$ del conjunto X.

El conjunto X se llama *acotado superiormente*, si existe un número real a de tal índole que $x \leqslant a$ para cualquier $x \in X$. Todo número

que posee dicha propiedad lleva el nombre de *cota superior* del conjunto X. Para el conjunto dado X acotado superiormente, el conjunto de todas sus cotas superiores tiene un elemento menor, que se denomina *cota superior exacta* del conjunto X y se designa mediante el símbolo $\sup X$.

Análogamente se determinan los conceptos de conjunto *acotado inferiormente*, de *cota inferior* y de *cota inferior exacta* del conjunto X; esta última se designa mediante el símbolo $\inf X$.

El conjunto X se denomina *acotado*, si está acotado superior e inferiormente.

EJEMPLO 3. Hállense las cotas superior e inferior exactas del conjunto $[0, 1)$.

◀ Este conjunto no tiene elemento maximal, puesto que para todo $x \in [0, 1)$ se encontrará un $y \in [0, 1)$ tal que sea $y > x$. El conjunto de las cotas superiores para el semi-intervalo $[0, 1)$ es el conjunto $[1, \infty)$ cuyo elemento menor es igual a 1. Por ello

$$\sup [0, 1) = 1,$$

además $1 \notin [0, 1)$.

Por otra parte, el elemento menor para el conjunto en consideración $[0, 1)$ existe y es igual a 0. El conjunto de las cotas inferiores está representado por el semi-intervalo $(-\infty, 0]$ cuyo elemento mayor es igual a cero y constituye precisamente la cota inferior exacta del semi-intervalo $[0, 1)$. De este modo,

$$\min [0, 1) = \inf [0, 1) = 0,$$

con la particularidad de que $0 \in [0, 1)$. ▶

1.72. Demuéstrese que la definición de la cota superior exacta aducida anteriormente es equivalente a lo siguiente:

El número M es la cota superior exacta del conjunto X, si, y sólo si:

1) $x \leqslant M$ para cualquier $x \in X$;

2) para todo $\varepsilon > 0$ existe un elemento $x \in X$ tal que $x > M - \varepsilon$.

1.73. Sea $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

a) Indíquense los elementos menor y mayor de este conjunto, si existen.

b) ¿Cuáles son los conjuntos de las cotas superiores e inferiores para el conjunto X? Hállense $\sup X$ e $\inf X$.

Hállense, si existen, el $\max X$, $\min X$, $\sup X$ e $\inf X$ para los conjuntos siguientes:

1.74. $X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.75. $X = [-1, 1]$. **1.76.** $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x < 0\}$.

1.77. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. **1.78.** $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{N}$ y $m < n\}$.

1.79. Sea X un conjunto de todos los números racionales que satisfacen la condición $r^2 < 2$. Muéstrese que el conjunto X no tiene un elemento mayor. Hállese sup X.

1.80. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado arbitrario. Demuéstrese que el conjunto $-X = \{x \mid -x \in X\}$ está también acotado y se verifican las igualdades

$$\sup(-X) = -\inf X, \quad \inf(-X) = -\sup X.$$

1.81. Sean X, $Y \subset \mathbb{R}$ conjuntos arbitrarios acotados superiormente. Demuéstrese que el conjunto
$X + Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y, \quad x \in X, \quad y \in Y\}$
está acotado superiormente y

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y.$$

1.82. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y sea $Y \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente. Demuéstrese que el conjunto

$$X - Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x - y, \quad x \in X, \quad y \in Y\}$$

está acotado superiormente y

$$\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y.$$

4. Lógica simbólica. Al anotar los razonamientos matemáticos resulta razonable aplicar ciertos símbolos económicos usados en la lógica. He aquí algunos símbolos de los más sencillos utilizados con mayor frecuencia.

Sean α, β ciertas *declaraciones* o *afirmaciones*, es decir, oraciones narratorias, con respecto a cada una de las cuales podemos decir si es cierta o falsa.

La notación $\overline{\alpha}$ significa «no α», es decir, negación de la afirmación α.

La notación $\alpha \Rightarrow \beta$ significa: «de la afirmación α resulta la afirmación β» ($\Rightarrow$ es el símbolo de *implicación*).

La notación $\alpha \Leftrightarrow \beta$ significa: «la afirmación α es equivalente a la afirmación β», es decir, de α proviene β y de β se deduce α ($\Leftrightarrow$ es el símbolo de *equivalencia*).

La notación $\alpha \wedge \beta$ significa «α y β» ($\wedge$ es el símbolo de *conjunción*).

La notación $\alpha \vee \beta$ significa «α ó β» ($\vee$ es el símbolo de *disyunción*).

La notación

$$\forall x \in X \alpha(x)$$

significa: «para todo elemento $x \in X$ la afirmación $\alpha(x)$ es verídica» ($\forall$ es el *cuantificador universal*).

La notación

$$\exists x \in X \alpha(x)$$

significa: «existe tal elemento $x \in X$, para el cual la afirmación $\alpha(x)$ es verídica» ($\exists$ es el *cuantificador existencial*).

Si un elemento $x \in X$, para el cual la afirmación $\alpha(x)$ es verídica no sólo existe, sino que es único, se escribe:

$$\exists! x \in X \alpha(x).$$

EJEMPLO 4. Haciendo uso de los símbolos lógicos, escríbase la afirmación: «el número M es la cota superior exacta del conjunto X».

◀ La afirmación $M = \sup x$ quiere decir que se han cumplido las condiciones:

a) $\forall x \in X\ (x \leqslant M)$ (es decir, M es la cota superior del conjunto X);

b) $\forall A \in \mathbb{R}\ (\forall x \in X\ (x \leqslant A) \Rightarrow A \geqslant M)$ (es decir, M es la menor de las cotas superiores del conjunto X).

La condición b) puede escribirse, además, en la siguiente forma equivalente (véase el problema 1.72):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X\ (x > M - \varepsilon). \blacktriangleright$$

EJEMPLO 5. Haciendo uso de los símbolos lógicos, enúnciese el principio de la inducción matemática.

◀ Sea α cierta afirmación que tiene sentido para todo $n \in \mathbb{N}$. Introduzcamos un conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n)\},$$

es decir, el conjunto de todos aquellos números naturales, para los cuales la afirmación α es verídica. Entonces el principio de la inducción matemática puede enunciarse del modo siguiente:

$$((1 \in A) \wedge (n \in A \Rightarrow (n + 1) \in A)) \Rightarrow A = \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Por cuanto la notación $\alpha(n)$ significa que la afirmación α es verídica para el número $n \in \mathbb{N}$, la afirmación (3) puede ser escrita también en otra forma:

$$(\alpha(1) \wedge \alpha(n) \Rightarrow \alpha(n + 1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \alpha(n). \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Escríbanse las negaciones de las declaraciones: $\forall x \in X \alpha(x)$ y $\exists x \in X \alpha(x)$.

◀ La negación de la declaración $\forall x \in X \alpha(x)$ tiene la forma $\exists x \in X \overline{\alpha(x)}$ (existe un elemento $x \in X$ tal que para él la afirmación $\alpha(x)$ es falsa). En otras palabras, para cualquier afirmación α resulta verídica la siguiente declaración:

$$\overline{\forall x \in X \alpha(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X \overline{\alpha(x)}.$$

Análogamente

$$\overline{\exists x \in X\ \alpha(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X\ \overline{\alpha(x)}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 7. Haciendo uso de los símbolos lógicos escríbase la afirmación: «la función $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, es continua en el punto $a \in X$», como también la negación de esta afirmación.

◀ La afirmación inicial:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x \in X \ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

La negación de esta afirmación:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta \exists x \in X \ (|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon)$$

(existe tal $\varepsilon > 0$ que para cualquier δ se encontrará un número $x \in X$ que satisface las condiciones $|x - a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$). ▶

Léanse las declaraciones que vienen abajo, aclárese el sentido de ellas y establézcase si son verídicas o falsas (los símbolos x, y, z, a, b, c se emplean para denotar los números reales, siempre que no se diga lo contrario).

1.83. a) $\forall x \exists y \ (x + y) = 3$; b) $\exists y \forall x \ (x + y) = 3)$; c) $\exists x, y \ (x + y) = 3)$; d) $\forall x, y \ (x + y) = 3)$.

1.84. $\exists x, y \ (x > y > 0 \wedge x + y = 0)$.

1.85. $\forall x, y \ (x < y) \Leftrightarrow \exists z \ (x < z < y)$.

1.86. $\forall x, y \ (x^2 \neq 2y^2)$.

1.87. $\forall x \ (x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0)$.

1.88. $\forall x \ (x \geqslant 2 \wedge \overline{x > 3} \Leftrightarrow 2 < x \leqslant 3)$.

1.89. $\exists x \ (\sqrt{x^2} < x)$.

1.90. a) $\forall a, b, c \ (\exists x \ (ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow b^2 - 4Ac \geqslant 0)$;

b) $\forall a, b, c \ (\forall x \ (ax^2 + bx + c > 0) \Leftrightarrow b^2 - 4Ac < 0 \wedge a > 0)$.

1.91. a) $\forall b \exists a \forall x \ (x^2 + ax + b > 0)$;

b) $\exists b \forall a \exists x \ (x^2 + ax + b = 0)$;

c) $\exists a \forall b \exists x \ (x^2 + ax + b = 0)$.

Establézcase el sentido exacto de las declaraciones expuestas más abajo y escríbanse, haciendo uso de los símbolos lógicos. Enúnciense y escríbanse las negaciones de estas declaraciones.

1.92. a) El número x_0 es la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

b) El número x_0 es la única solución de la ecuación $f(x) = 0$.

c) La ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución real única.

1.93. a) El conjunto $X \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente.

b) El número m es el elemento menor del conjunto X.

c) El conjunto X tiene un elemento minimal.

1.94. a) El número $m \in \mathbb{Z}$ es el divisor del número $n \in \mathbb{Z}$, ó, en la forma más breve: $m \mid n$.

b) Si el número $n \in \mathbb{Z}$ se divide por 2 y por 3, se dividirá por 6.

c) El número $p \in \mathbb{N}$ es primo.

§ 2. Funciones de una variable real

1. Concepto de función. Sea D un conjunto arbitrario de números reales. Si a todo número $x \in D$ se le ha puesto en correspondencia cierto número real bien determinado $f(x)$, se dice que en el conjunto D está definida una *función numérica* f. El conjunto D se denomina *campo de definición* y el conjunto

$$E = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), \quad x \in D\},$$

conjunto de valores de la función numérica f. La función se escribe simbólicamente en la forma $f : D \to E$, o bien $y = f(x)$.

El método analítico de definir una función es el más usado. Consiste en que por medio de una fórmula se establece de modo concreto el algoritmo de cálculo de los valores de la función $y = f(x)$ para cualquiera de los valores del *argumento* x. En este caso no se indica, comúnmente, el campo de definición de la función, entendiendo por éste el conjunto de valores del argumento x, para el cual la fórmula dada tiene sentido (campo *natural* de definición de la función).

EJEMPLO 1. Hállense el campo de definición y el conjunto de valores de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

◀ El campo natural de definición de esta función es el conjunto $D = \{x \mid |x| < 1\} = (-1, 1)$, mientras que el conjunto de valores está representado por el conjunto $E = \{y \mid y \geqslant 1\} = [1, \infty)$. ▶

Supongamos que la función $f : D \to E$ es tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in D$ de la condición $x_1 \neq x_2$ se deduce que $f(x_1) \neq f(x_2)$. En este caso a todo número $y \in E$ se le puede asignar cierto número bien determinado $x \in D$ tal que $f(x) = y$; de este modo queda definida una nueva función $f^{-1} : E \to D$, llamada *inversa* de la función dada f.

Sean dadas las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Se denomina *composición* de estas funciones (o *función compuesta* obtenida por composición de las funciones f y g) la función $h = g \circ f : X \to Z$, definida por la igualdad

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

2.1. Hállese la dependencia funcional entre el radio R de un cilindro y su altura H, para el volumen dado $V = 1$.

2.2. Escríbase la expresión para el volumen V de un cono en función de su superficie lateral S, dada la generatriz $l = 2$.

2.3. Escríbase la expresión para el área S de un trapecio isósceles, de bases $a = 2$ y $b = 1$, como función del ángulo α entre la base a y un lado.

2.4. A partir del instante de reposo t_0 un cuerpo se mueve con una aceleración constante a. Hállense las dependencias de la velocidad y del camino recorrido en función del tiempo de movimiento. ¿Cómo están ligados entre sí el camino recorrido y la velocidad en un instante de tiempo dado t?

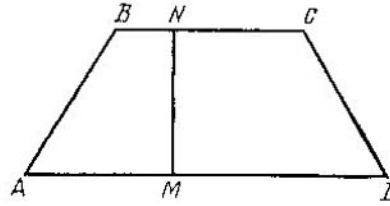


Fig. 1

2.5. En el trapecio isósceles $ABCD$ (fig. 1) de bases a y b y altura h está trazada una recta MN, perpendicular respecto de las bases, distante del vértice A a la magnitud $|AM| = x$. Exprésese el área S de la figura $ABNM$ como función de la variable x.

2.6. En una bola de radio R está inscrito un cilindro. Escríbase la dependencia funcional del volumen V del cilindro en función de la altura H de éste. Hállese el dominio de definición de esta función.

2.7. En una bola de radio R está inscrito un cono circular recto. Escríbase la dependencia funcional del área de la superficie lateral S del cono en función:

a) de su generatriz l;

b) del ángulo α en el vértice del cono en su sección axial;

c) del ángulo β formado por la generatriz y la base del cono.

Hállense los campos de definición de cada una de las funciones obtenidas.

2.8. Hállense $f(-1)$, $f(-0,001)$, $f(100)$, si $f(x) = \lg x^2$.

2.9. Hállense $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, si

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -\infty < x \leqslant 0 \\ 2^x, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

2.10. Hállense $f(1)$, $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a-1)$, $2f(2a)$, $f(x) = x^3 - 1$.

2.11. Hállense $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$ si $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,

Hállense el campo natural de definición D y el conjunto de valores E de cada una de las siguientes funciones:

2.12. $y=\ln(x+3)$. **2.13.** $y=\sqrt{5-2x}$.

2.14. $y=\sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$. **2.15.** $y=\arccos\frac{1-2x}{4}$.

2.16. $y=\ln(1-2\cos x)$. **2.17.** $y=\sqrt{1-|x|}$.

2.18. $y=\lg(5x-x^2-6)$. **2.19.** $y=\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$.

2.20. $y=2^{\arccos(1-x)}$. **2.21.** $y=e^{x^2-2}$.

Hállese el conjunto G, sobre el cual la función dada aplica el conjunto F:

2.22. $y=x^2$, $F=[-1, 2]$.

2.23. $y=|x|$, $F=\{x \mid 1\leqslant |x|\leqslant 2\}$.

2.24. $y=\frac{x}{2x-1}$, $F=(0, 1)$.

2.25. $y=\sqrt{x-x^2}$, $F=(0, 1)$.

2.26. $y=\log_3 x$, $F=(3, 27)$.

2.27. $y=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$, $F=[0, 1/2)$.

Hállense el *conjunto de ceros* $D_0=\{x|f(x)=0\}$, el *dominio de valores positivos* $D_+=\{x/f(x)>0\}$ y *el de valores negativos* $D_-=\{x|\{f(x)<0\}$ para cada una de las funciones dadas:

2.28. $f(x)=1+x$. **2.29.** $f(x)=2+x-x^2$.

2.30. $f(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$. **2.31.** $f(x)=1-e^{\frac{1}{x}-1}$.

Pruébese que la función $y=f(x)$ satisface la ecuación funcional correspondiente:

2.32. $f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=0$, $f(x)=kx+b$.

2.33. $f(x)+f(x+1)=f(x(x+1))$, $f(x)=\log_a x$.

2.34. $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_1)$, $f(x)=a^x$.

2.35. $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$, $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

En los problemas 2.36 — 2.39 hállese la función $y=f(x)$ que satisface la condición dada.

2.36. $f(x+1)=x^2-3x+2$.

◀ Sea $x+1=t$, es decir, $x=t-1$. Entonces $x^2-3x+2=t^2-5t+6$, por lo cual $f(t)=f(x+1)=x^2-3x+2=t^2-5t+6$. ▶

2.37. $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$.

2.38. $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $x>0$.

2.39. $f(x_1+x_2)=\operatorname{sen} x_1\cos x_2+\cos x_1\operatorname{sen} x_2$.

La función $f(x)$ se llama *par* (*impar*), si su campo de definición es simétrico respecto al punto $x=0$ y $f(-x)=f(x)$, $(f(-x)=-f(x))$.

¿Cuáles de las funciones citadas en los problemas 2.40—2.45 son pares, cuáles impares y cuáles no son ni pares ni impares?

2.40. $f(x)=x^4+5x^2$. **2.41.** $f(x)=x^2+x$.

2.42. $f(x)=\frac{x}{2^x-1}$. **2.43.** $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$.

2.44. $f(x)=\operatorname{sen} x-\cos x$. **2.45.** $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

2.46. Demuéstrese que el producto de dos funciones pares o dos impares es una función par, y el producto de una función par por otra impar es una función impar.

Una función $f(x)$ se llama *periódica*, si existe un número positivo T (período de la función) tal que $\forall x\in D\ (f(x+T)=f(x))$.

Aclárese cuáles de las funciones dadas son periódicas y determínese su período mínimo T:

2.47. $f(x)=5\cos 7x$. **2.48.** $f(x)=\cos^2 2x$.

2.49. $f(x)=x\operatorname{sen} x$. **2.50.** $f(x)=\cos x+\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$,

2.51. $f(x)=\operatorname{sen} x^2$, **2.52.** $f(x)=\lg\frac{x}{2}-2\lg\frac{x}{3}$.

Establézcase cuáles de las funciones indicadas más abajo tienen sus inversas, hállense las funciones inversas correspondientes y sus campos de definición:

2.53. $y=ax+b$. **2.54.** $y=(x-1)^3$, **2.55.** $y=\cos 2x$.

2.56. $y=\ln 2x$. **2.57.** $y=2^{\frac{x}{2}}$. **2.58.** $y=\frac{1-x}{1+x}$.

2.59. $y=x^2+1$.

◀ Para la función $y=x^2+1$ el campo natural de definición será toda la recta numérica $D=(-\infty,+\infty)$ y el conjunto de valores, el rayo $E=[1,+\infty)$. Dado que para cualquier $a\in E$ la ecuación $x^2+1=a$ tiene dos soluciones diferentes, $x_1(a)=\sqrt{a-1}$ y $x_2(a)=-\sqrt{a-1}$, entonces la función dada no tiene inversa.

No obstante, cada una de las funciones

$$y_1 = x^2 + 1, \quad D_1 = [0, +\infty),$$

o

$$y_2 = x^2 + 1, \quad D_2 = (-\infty, 0],$$

tiene su inversa igual a

$$x_1(y) = \sqrt{y-1}$$

$$x_2(y) = -\sqrt{y-1}, \text{ respectivamente.} \blacktriangleright$$

Hállense la función inversa y su campo de definición, si la función inicial viene definida en el intervalo indicado:

2.60. $y = x^2 - 1$: a) $x \in (-\infty, -1/2]$; b) $x \in [1/2, +\infty)$.

2.61. $y = \operatorname{sen} x$: a) $x \in [-\pi/2, \pi/2]$; b) $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$,

2.62 $y = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ 2x, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

2.63. $y = \cos^2 x$: a) $x \in [0, \pi/2]$; b) $x \in [\pi/2, \pi]$; c) $x \in [\pi, 3\pi/2]$.

Hállense las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ de las siguientes funciones:

2.64. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

◀ Tenemos:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

y

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|. \blacktriangleright$$

2.65. $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2$.

2.66. $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$.

2.67. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\pi, \pi]$, $g(x) = \operatorname{arcsen} x$.

2.68. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ x, & x \in (0, +\infty), \end{cases}$ $g(x) =$

$$= \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^2, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

2.69. Hállese $f \circ f \circ f$, si:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Funciones elementales y sus gráficas. Se llaman funciones *elementales fundamentales* las siguientes:

1. Función *potencial*: $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$.
2. Función *exponencial*: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Función *logarítmica*: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Funciones *trigonométricas*: $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
5. Funciones *trigonométricas inversas*: $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \operatorname{arccos} x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Se denomina *elemental* toda función que puede ser obtenida de un número finito de funciones elementales fundamentales con ayuda de las operaciones aritméticas y una operación de composición.

Se llama *gráfica* de la función $y = f(x)$ al conjunto

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D, \quad y = f(x)\},$$

donde $\mathbb{R}^2$ es un conjunto de puntos de un plano.

En un plano con un sistema fijo de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy la gráfica de una función se representa mediante un conjunto de puntos $M(x, y)$, cuyas coordenadas satisfacen la relación $y = f(x)$ (representación gráfica de la función).

Al construir las gráficas a menudo se emplean los siguientes razonamientos geométricos sencillos. Si Γ es la gráfica de una función $y = f(x)$, entonces:

1) la gráfica de la función $y_1 = -f(x)$ es una imagen especular de Γ respecto al eje Ox;

2) la gráfica de la función $y_2 = f(-x)$ es una imagen especular de Γ respecto al eje Oy;

3) la gráfica de la función $y_3 = f(x - a)$ es un desplazamiento de Γ a lo largo del eje Ox en una magnitud a;

4) la gráfica de la función $y_4 = b + f(x)$ es un desplazamiento de Γ a lo largo del eje Oy en una magnitud b;

5) la gráfica de la función $y_5 = f(ax)$, $a > 0$, $a \neq 1$, es una contracción en a veces (para $a > 1$) o un estiramiento en $1/a$ veces (para $a < 1$) de Γ a lo largo del eje Ox;

6) la gráfica de la función $y_6 = bf(x)$, $b > 0$, $b \neq 1$, es un estiramiento en b veces (para $b > 1$) o una contracción en $1/b$ veces (para $b < 1$) de Γ a lo largo del eje Oy.

Al construir la gráfica de una función resulta racional, a veces, dividir el campo de definición de la misma en unos cuantos intervalos que no se intersecan y construir, luego, la gráfica en cada uno de éstos.

EJEMPLO 2. Constrúyase la gráfica de la función $y = |x| + |x^2 - 1|$.

◀ Suprimiendo los módulos, podemos escribir:

$$y = \begin{cases} x^2 - x - 1, & x \in (-\infty, -1], \\ -x^2 - x + 1, & x \in (-1, 0], \\ -x^2 + x + 1, & x \in (0, 1], \\ x^2 + x - 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

La gráfica de la función dada es una unión de las gráficas (parábolas) que representan dicha función en cada uno de los cuatro intervalos (fig. 2). ▶

Escríbanse en forma de una composición de funciones elementales fundamentales las siguientes funciones elementales:

2.70. $f(x) = |x|$.

2.71. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos \sqrt{x})$.

2.72. $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x^2}$.

2.73. $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^{\sqrt[3]{x}})$.

2.74. $f(x) = \operatorname{sen}(2^{x^2})$.

2.75. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \log_3 x}}$.

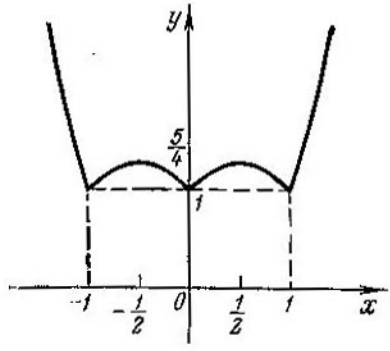


Fig. 2

Hállese la gráfica para cada una de las siguientes funciones:

2.76. $y = \sqrt{\ln \operatorname{sen} x}$.

◀ El campo natural de definición de la función dada es un conjunto

$$D = \{x \mid \operatorname{sen} x = 1\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Por esta razón

$$\Gamma = \left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ 0\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}. \blacktriangleright$$

2.77. $y = x + \sqrt{1 - |\operatorname{cosec} x|}$. **2.78.** $y = \sqrt{-|x^2 - 1|} + 2$.

2.79. $y = \sqrt{\cos x - 1} + \dfrac{x}{2}$.

2.80. $y = 1 + \sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{-\operatorname{sen} x}$.

Constrúyanse las gráficas de las siguientes funciones elementales:

2.81. $y = kx + b$, si:

a) $k = 2$, $b = 0$; b) $k = 0$, $b = -2$; c) $k = -1$, $b = -\frac{1}{3}$.

2.82. $y = y_0 + a(x - x_0)^2$, si:

a) $a = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$;

b) $a = 2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$;

c) $a = -\frac{1}{2}$, $x_0 = -2$, $y_0 = \frac{3}{2}$.

2.83. $y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$, si:

a) $k = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$;

b) $k = -2$, $x_0 = -1$, $y_0 = -\frac{1}{2}$.

2.84. $y = a \operatorname{sen}(kx + \alpha)$, si:

a) $a = 1$, $k = 2$, $\alpha = \pi/3$;

b) $a = -2$, $k = 1/2$, $\alpha = -\pi/3$.

2.85. $y = a \operatorname{tg}(kx + \alpha)$, si:

a) $a = 3$, $k = 1/3$, $\alpha = \pi/4$;

b) $a = -1/2$, $k = 2$, $\alpha = 3\pi/2$.

2.86. $y = p \operatorname{arcsen}(x + q)$, si:

a) $p = 4$, $q = -1$; b) $p = -2/3$, $q = 1/2$.

2.87. $y = p \operatorname{arctg}(x + q)$, si:

a) $p = -3$, $q = 5/2$; b) $p = 2/5$, $q = -6$.

2.88. $y = a^{kx+b}$, si:

a) $a = 2$, $k = -1$, $b = 1$;

b) $a = 1/2$, $k = 2$, $b = -2$.

2.89. $y = \log_a(kx + b)$, si:

a) $a = 10$, $k = 10$, $b = -1$;

b) $a = 1/10$, $k = 1/2$, $b = 2$.

2.90. $y = |2 - x| + |2 + x|$. **2.91.** $y = x^2 + x - |x|$.

2.92. $y = x^2 - 6|x| + 9$. **2.93.** $y = |6x^2 + x| - 1$.

2.94. $y = (x^2 + 2x)\frac{|x-1|}{x-1}$.

2.95. $y = x - 1 - \sqrt{(x-1)^2}$. **2.96.** $y = \left|\frac{2x-3}{x+2}\right|$.

2.97. $y = \frac{|x|-1}{|x+2|}$. **2.98.** $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

2.99. $y = [x]$, donde $[x]$ es la parte entera de x.

2.100. $y = \{x\}$, donde $\{x\} = x - [x]$ es la parte fraccionaria de x.

2.101. $y = 2^{|x|} - 1$. **2.102.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+1|} + 2$.

2.103. $y = \log_{1/2} |x - 3|$. **2.104.** $y = |\log_2 (x + 1)|$.

2.105. $y = \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2.106. $y = \arccos(\cos 3x)$.

2.107. $y = \cos x + |\operatorname{sen} x|$. **2.108.** $y = |\operatorname{arctg}(x - 1)|$.

2.109. $y = x \operatorname{sgn}(\cos x)$. **2.110.** $y = \left|\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

2.111. $y = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$. **2.112.** $y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen} \frac{x+2}{5}\right)$.

Represéntense en el plano Oxy los conjuntos de puntos cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones dadas:

2.113. $xy = 0$. **2.114.** $|y| = |x^2 - 2|x| - 3|$.

2.115. $|x| + |y| = 1$. **2.116.** $|x + y| + |x - y| = 1$.

2.117. $||x| - |y|| = 1$.

2.118. $|2y - 1| + |2y + 1| + \frac{4}{\sqrt{3}} |x| = 4$.

§ 3. Límite de una sucesión de números reales

1. Concepto de sucesión. Se llama *sucesión* de números reales a la función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto de todos los números reales. El número $f(n)$ lleva el nombre de n-ésimo término de la sucesión y se denota por el símbolo x_n; $x_n = f(n)$ se denomina *fórmula del término general* de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Escríbanse los primeros cinco términos de la sucesión:

3.1. $x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$. **3.2.** $x_n = n(1 - (-1)^n)$.

3.3. $x_n = \frac{3n+5}{2n-3}$. **3.4.** $x_n = (-1)^n \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$.

Escríbase la fórmula del término general de la sucesión:

3.5. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **3.6.** 0, 2, 0, 2, ...

3.7. $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$

3.8. $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$

3.9. $-3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \ldots$

3.10. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \ldots$

En los problemas 3.11—3.17 se pide hallar el término mayor (menor) de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, acotada superiormente (inferiormente).

3.11. $x_n = 6n - n^2 - 5$. 3.12. $x_n = e^{10n-n^2-24}$.

3.13. $x_n = \frac{\sqrt{n}}{9+n}$. 3.14. $x_n = 3n^2 - 10n - 14$.

3.15. $x_n = 2n + \frac{512}{n^2}$. 3.16. $x_n = -\frac{n^2}{2^n}$.

2. Límite de una sucesión. Se llama *límite* de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ el número a, es decir, el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, siempre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que para $n > N(\varepsilon)$ se verifica la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$. La propia sucesión se denomina en este caso *convergente*.

CRITERIO DE CAUCHY. *Para que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenga un límite, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número $N(\varepsilon)$ tal que, siendo $n > N(\varepsilon)$ se cumpla la desigualdad $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, cualquiera que sea $p \in \mathbb{N}$.*

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama *infinita decreciente*, si el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama *infinita creciente* (convergente hacia el infinito), lo que se anota formalmente en la forma $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, siempre que para cualquier número $E > 0$ existe un número $N(E)$ tal que, siendo $n > N(E)$ se verifica la desigualdad $|x_n| > E$. Si en este caso, a partir de cierto número, todos los términos de la sucesión son positivos (negativos), se emplea la notación

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \ (\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

El número a se denomina *punto límite* de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si para todo $\varepsilon > 0$ se encuentra un número infinito de términos de dicha sucesión que satisfacen la condición $|x_n - a| < \varepsilon$.

PRINCIPIO DE BOLZANO—WEIERSTRASS. *Toda sucesión acotada tiene al menos un punto límite.*

Mayor (menor) de los puntos límites de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lleva el nombre de límite *superior (inferior)* de dicha sucesión y se designa por el símbolo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \right)$.

3.17. Empleando los símbolos lógicos, escríbanse las siguientes declaraciones, como también las negaciones de ellas:

a) la sucesión está acotada;
b) la sucesión crece de modo monótono;
c) el número a es el límite de una sucesión;
d) la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita creciente;
e) el número a es un punto límite de una sucesión.

3.18. Hállese $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ y determínese tal número $N(\varepsilon)$ que $|x_n - a| < \varepsilon$ sea para todo $n > N(\varepsilon)$, si:

a) $x_n = \underbrace{0{,}33\ \ldots\ 3}_{n}$, $\varepsilon = 0{,}001$;

b) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\varepsilon = 0{,}005$;

c) $x_n = \dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{\pi n}{2}$, $\varepsilon = 0{,}001$;

d) $x_n = \dfrac{5n^2+1}{7n^2-3}$, $\varepsilon = 0{,}005$.

Calcúlense los límites

3.19. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{7-9n}$. **3.20.** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$.

3.21. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{5n+7} - \dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$.

3.22. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$. **3.23.** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

3.24. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

3.25. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$. **3.26.** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{sen}(n^2)}{n-1}$

3.27. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

3.28. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{5^n}\right)$.

3.29. Demuéstrese que si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita decreciente y $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n \neq 0)$, entonces la sucesión $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita creciente.

Establézcase cuáles de las sucesiones dadas son infinitas crecientes:

3.30. $x_n = 2^{+\bar{n}}$. 3.31. $x_n = n^{(-1)^n}$.

3.32. $x_n = n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2}$. 3.33. $x_n = \lg(\lg n)$, $n \geqslant 2$.

Hállense todos los puntos límites de una sucesión:

3.34. $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$. 3.35. $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$.

3.36. $x_n = \operatorname{arcsen} \frac{(-1)^n}{2}$.

3.37. Demuéstrese:

a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$;

b) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$.

Para cada una de las sucesiones que siguen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hállense $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ y $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$:

3.38. $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. 3.39. $x_n = \frac{n+1}{n} \cos^2 \frac{\pi n}{4}$.

3.40. $x_n = (-1)^n (2n+1)$.

3.41. $x_n = \frac{n+2}{n-1} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{3}$, $n \geqslant 2$.

3.42. $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2} - \frac{1}{n}$.

3.43. Demuéstrese que la igualdad $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ es una condición necesaria y suficiente para que exista el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

§ 4. Límite de una función. Continuidad

1. Límite de una función. Sea $y = f(x)$ una función definida en el conjunto D. El número a se denomina *límite de la función* $y = f(x)$ *en el punto* x_0 y se anota $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, cualquiera que sea $x \in D$, de la condición $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ se desprende la desigualdad $|f(x) - a| < \varepsilon$.

CRITERIO DE CAUCHY. *Para que la función* $y = f(x)$ *tenga un límite en el punto* x_0, *es necesario y suficiente que para todo* $\varepsilon > 0$ *exista* $\delta(\varepsilon) > 0$

tal que se verifique $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, *siempre que* $|x' - x_0| < \delta(\varepsilon)$ *y* $|x'' - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Suele decirse que el número a es el *límite de la función* $x = f(x)$ *para* x *que tiende al infinito*, y se escribe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe el número $A(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x) - a| < \varepsilon$, siempre que $|x| > A(\varepsilon)$.

En lo sucesivo se utilizan los siguientes *límites notables*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{2}$$

donde $e = 2{,}71828\ldots$ es la base de los logaritmos naturales.

A la par con el concepto de límite de una función introducido anteriormente, se emplea también el siguiente concepto de límite *unilateral*. El número a se denomina *límite de la función* $y = f(x)$ *en el punto* x_0 *por la derecha* (*por la izquierda*) y se anota $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a$), si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que de la condición $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ ($-\delta(\varepsilon) < x - x_0 < 0$) proviene $|f(x) - a| < \varepsilon$. Análogamente se introduce el concepto de límite unilateral en el infinito $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right.$ y $\left.\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$.

Empleando sólo el concepto de límite de una función, demuéstrese en los problemas 4.1—4.3 que el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, y llénese la siguiente tabla:

ε	0,1	0,01	0,001
$\delta(\varepsilon)$			

4.1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $a = 4$.

4.2. $f(x) = 1/x$, $x_0 = 1$, $a = 1$.

4.3. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$, $a = 0$.

Haciendo uso de los símbolos lógicos, escríbanse las siguientes afirmaciones:

4.4. $\lim\limits_{n\to 0} f(x) = \infty$. **4.5.** $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$.

4.6. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. **4.7.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 0$. **4.9.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$.

4.10. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. **4.11.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Calcúlense los límites de las siguientes expresiones racionales:

4.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1}$. **4.13.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+3}{x^2-3}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{3}{8-x^3}\right)$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$; $m,\ n\in\mathbb{N}$.

4.17. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. **4.18.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

4.21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^5+(x+2)^5+\ldots+(x+n)^5}{x^5+n^5}$, $n\in\mathbb{N}$.

4.23. Demuéstrese que si $P_n(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$, $Q_m(x) = b_0x^m + \ldots + b_m$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & \text{para } n<m, \\ a_0/b_0 & \text{para } n=m, \\ \infty & \text{para } n>m. \end{cases}$$

Al calcular los límites que contienen expresiones irracionales se emplean frecuentemente los siguientes procedimientos: a) introducción de la nueva variable para obtener una expresión racional; b) traslación de la irracionalidad del denominador al numerador y viceversa.

EJEMPLO 1. Calcúlese el $\lim\limits_{x\to 81} \dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$.

◀ Sea $t = \sqrt[4]{x}$. En este caso

$$\lim_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \lim_{t\to 3} \frac{3-t}{9-t^2} = \lim_{t\to 3} \frac{1}{3+t} = \frac{1}{6}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Calcúlese el $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})$.

◀ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7})}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=0.\ \blacktriangleright$$

Calcúlense los límites:

4.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$. 4.25. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x-1}}{\sqrt[m]{x-1}}$; $m,\ n\in\mathbb{N}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

4.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$.

4.32. $\lim\limits_{x\to a}(\sqrt{x-a}-\sqrt{x})$.

4.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

4.34. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{(4x^2-7x+4}-2x)$.

4.35. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})$.

Haciendo uso del límite notable (1), calcúlense:

4.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}$. 4.37. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{sen}7x}{\operatorname{tg}3x}$.

4.38. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} \pi x$. **4.39.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 \operatorname{arcsen} x}{4x}$.

4.40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$. **4.41.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$, $\alpha \neq \beta$.

4.42. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{ctg} x\right)$.

4.43. $\lim\limits_{x\to \alpha} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2\alpha} \operatorname{sen} \dfrac{x-\alpha}{2}$.

4.44. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi - 4x}$.

4.45. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$.

Demuéstrese las siguientes relaciones:

4.46.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$.

4.47*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

4.48*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a$.

Al calcular los límites del tipo $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}$, donde el $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$, se utiliza el límite notable (2).

EJEMPLO 3. Calcúlese el $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

◀ Tenemos

$$\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x} = \left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{3x} = \left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}\left(\frac{-2}{2+x}\cdot 3x\right)}.$$

Puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}} = \lim_{t=\frac{-2}{2+x}\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{2+x}\cdot 3x = -6,$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=e^{-6}$$

(se ha utilizado aquí la continuidad de la composición de funciones continuas). ▶

Al hacer uso del límite notable (2), así como también de los resultados de los problemas 4.45—4.47, calcúlense los límites:

4.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$. **4.50.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

4.51. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. **4.52.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{3}{x}}$.

4.53. $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(\ln(2+x)-\ln x)$.

4.54. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **4.55.** $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(a^{\frac{1}{x}}-1)$.

4.56. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a^x-a}{x-1}$. **4.57.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\log_a x-1}{x-a}$.

4.58. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

4.59. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ cuando, y sólo cuando, para cualquier sucesión de argumentos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente hacia x_0, la sucesión correspondiente $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de los valores de la función converge hacia a.

Usando los resultados del problema 4.59, demuéstrese que no existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ para las siguientes funciones:

4.60. $f(x)=\cos x$, $x_0=\infty$.

4.61. $f(x)=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x_0=0$.

4.62. $f(x)=x-[x]$, $x_0=\infty$.

Hállense los límites unilaterales:

4.63. $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\frac{x-3}{|k-3|}$. **4.64.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\frac{2+x}{4-x^2}$.

4.65. $\lim\limits_{x\to 0,\pm 0}(2+x)^{\frac{1}{x}}$. **4.66.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}7^{\frac{1}{2-x}}$.

4.67. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg} x$. **4.68.** $\lim\limits_{x\pm\infty}\left[\frac{1}{x}\right]$,

4.69. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4} \pm 0} \dfrac{|\operatorname{tg}(4x-\pi)|}{2x-\frac{\pi}{2}}$. **4.70.** $\lim\limits_{x \to 2\pi \pm 0} \dfrac{x^2}{\cos x - 1}$.

4.71. Demuéstrese que el límite de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 existe cuando, y sólo cuando, en dicho punto existen los límites izquierdo y derecho y, además, coinciden.

2. Infinitésimos e infinitos. Una función $\alpha(x)$ se llama *infinitésima* para $x \to x_0$, si el $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Los infinitésimos $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se denominan *comparables*, si existe por lo menos uno de los límites

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ unos infinitésimos comparables para $x \to x_0$, y supongamos, para concretar, que existe $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$. Entonces:

a) si $C \neq 0$, $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llamarán infinitésimos del mismo orden. En particular, cuando $C = 1$, los infinitésimos $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se denominan *equivalentes* y se escribe $a \sim b$.

b) Si $C = 0$, entonces el infinitésimo $\alpha(x)$ se dice que es infinitésimo de *orden superior* con relación a $\beta(x)$, y se escribe $\alpha = o(\beta)$. Si, en este caso, existe un número real $r > 0$ tal que el $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r} \neq 0$, $\alpha(x)$ se llamará infinitésimo de *orden* r con relación a $\beta(x)$.

Una función $\alpha(x)$ se denomina *infinito* para $x \to x_0$, si el $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \infty$. Por analogía a como se hizo anteriormente para los infinitésimos, se introduce también el concepto de infinitos comparables y la clasificación de ellos.

4.72. Demuéstrese que si el $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, se encontrarán tal número $\delta > 0$ y las constantes C_1 y C_2 que se verifique

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow C_1 \beta(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant C_2 \beta(x).$$

4.73. Demuéstrese que $\alpha \sim \beta$ cuando, y sólo cuando, $\alpha - \beta = 0(\alpha)$ o bien $\alpha - \beta = 0(\beta)$.

Determínese el orden de infinitud de $\alpha(x)$ con relación a $\beta(x) = x$, para $x \to 0$:

4.74. $\alpha(x) = \dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$. **4.75.** $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$.

4.76. $\alpha(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$. **4.77.** $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$.

4.78. $\alpha(x) - \operatorname{sen}(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})$.

4.79. $\alpha(x) = 3\operatorname{sen}^2 x - x^4$.

4.80. $\alpha(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x-1}}$.

4.81. $\alpha(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$.

4.82. $\alpha(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1$. 4.83. $\alpha(x) = 2^x - \cos x$.

4.84. Demuéstrese que $\alpha(x) - \beta(x)$ tiene segundo orden de infinitud con relación a x para $x \to 0$, si:

a) $\alpha(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\beta(x) = 1 - x$;

b) $\alpha(x) = \sqrt{a^2+x}$, $\beta(x) = a + \dfrac{1}{2a}x$ $(a \neq 0)$;

c) $\alpha(x) = (1+x)^n$, $\beta(x) = 1 + nx$ $(n \in \mathbb{N})$.

Calcúlense aproximadamente las siguientes expresiones:

4.85. $1/1{,}03$. 4.86. $\sqrt{25{,}3}$. 4.87. $(1{,}03)^5$.

4.88. $(0{,}97)^4$.

4.89. Demuéstrese que si

$\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ y $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ para $x \to x_0$,

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Utilizando los resultados del problema 4.89, calcúlense los límites:

4.90. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

◀ Por cuanto $\operatorname{arcsen} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\ln(1-x) \sim (-x)$ para $x \to 0$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x} = -1. \blacktriangleright$$

4.91. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{\lg x}$. 4.92. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$.

4.93. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{\operatorname{arcsen}(1-2x)}$.

4.94. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{\operatorname{arcsen} 3x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}$.

4.95. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2\operatorname{sen}^2 x + x \operatorname{tg} 7x}$.

4.96. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sqrt{2}-(\cos x + \operatorname{sen} x)^3}{1-\operatorname{sen} 2x}$.

Determínese el orden de crecimiento del infinito $A(x)$ con relación a $B(x) = x$ para $x \to \infty$:

4.97. $A(x) = x^3 + 150x + 10$.

4.98. $A(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5} + |x|$.

4.99. $A(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

4.100. $A(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$.

4.101. $A(x) = \dfrac{5x^6}{3x^4 + x^3 + 2}$. **4.102.** $A(x) = \dfrac{x^{5/2}}{x^{7/3} + 1}$.

3. Continuidad de la función en un punto. Clasificación de los puntos de discontinuidad. Una función $y = f(x)$ con un campo de definición D se llama *continua* en el punto x_0, si se cumplen las siguientes tres condiciones:

a) la función $y = f(x)$ está definida en el punto x_0, es decir, $x_0 \in D$;

b) existe el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

c) el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Cumplida la condición a), las condiciones b) y c) son equivalentes a lo siguiente:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0,$$

donde

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

es el *incremento de la función* $y = f(x)$ en el punto x_0 que corresponde al *incremento del argumento* $\Delta x = x - x_0$.

Si en el punto x_0 se viola aunque sea una de las condiciones a), b) y c), el punto x_0 recibe el nombre de punto de discontinuidad de la función $y = f(x)$. En tal situación se observan tres casos:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, pero la función no está definida en el punto x_0, o bien queda violada la condición $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. En este caso x_0 se llama *punto de discontinuidad evitable* de la función.

b) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no existe. Si en este caso existen ambos límites unilaterales $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ (evidentemente, distintos uno del otro), entonces x_0 recibe el nombre de *punto de discontinuidad de primera especie.*

c) En los demás casos x_0 lleva el nombre de *punto de discontinuidad de segunda especie.*

4.103. Utilizando los símbolos lógicos, escríbanse en el lenguaje «ε-δ» las siguientes afirmaciones:

a) la función $y = f(x)$ que tiene D como campo de definición es continua en el punto $x_0 \in D$;

b) la función $y = f(x)$ no es continua en el punto $x_0 \in D$.

Demuéstrese que las funciones que siguen son continuas en cada punto de su campo natural de definición:

4.104. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Recurriendo a la fórmula del binomio de Newton, obtenemos

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n = C_n^1 x_0^{n-1} \Delta x + C_n^2 x_0^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

De aquí $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0$. ▶

4.105. $f(x) = a$, $a > 0$.

4.106. $f(x) = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$.

4.107. $f(x) = \operatorname{sen} x$. **4.108.** $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

Sea dada la función $f(x)$. ¿Para qué elección de los parámetros que figuran en su definición, será continua $f(x)$?

4.109. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1. \end{cases}$

4.110. $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leqslant 1, \\ ax^2 - 2, & x > 1. \end{cases}$

4.111. $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leqslant \pi/2, \\ \operatorname{sen} x + b, & x > \pi/2. \end{cases}$

Hállense los puntos de discontinuidad de la función, investíguese su carácter, defínase la función adicionalmente, en el caso de discontinuidad evitable, «según la continuidad»:

4.112. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 (x - 1)}$. **4.113.** $f(x) = \dfrac{|3x - 5|}{3x - 5}$.

4.114. $f(x) = \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

4.115. $f(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen} x$. **4.116.** $f(x) = 1 - x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

4.117. $f(x) = 3^{\frac{x}{4-x^2}}$. **4.118.** $f(x) = (x+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

4.119. $f(x) = \frac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

4.120. $f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x-2}} - 1}{3^{\frac{1}{x-2}} + 1}$. **4.121.** $f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

4.122. $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$. **4.123.** $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$.

4.124. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \leqslant x < 1, \\ x-1, & 1 < x \leqslant 4, \\ 1 & x \quad 1. \end{cases}$

4.125. $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}} + 1}$.

4.126. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 4-2x, & 1 < x < 2{,}5, \\ 2x-7, & 2{,}5 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$

4.127. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{4}, \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4} < x \leqslant \pi. \end{cases}$

4.128. Demuéstrese que todos los puntos de discontinuidad de una función monótona acotada son puntos de discontinuidad de primera especie.

4. Continuidad en un conjunto. Continuidad uniforme. Una función $y = f(x)$ se denomina *continua en el conjunto* D, si es continua en todo punto $x \in D$. Se llama *uniformemente continua en el conjunto* D, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualesquiera x', $x'' \in D$ de la desigualdad $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ se deduce que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

TEOREMA DE CANTOR. *Si la función $y=f(x)$ es continua en cierto segmento $[a, b]$, será en éste uniformemente continua.*

4.129. Demuéstrese que si $y = f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces ella:

a) está acotada en $[a, b]$;

b) alcanza en $[a, b]$ sus cotas superior e inferior (*teorema de Weierstrasse*);

c) toma en cualquier intervalo $(a', b') \subset [a, b]$ todos los valores intermedios entre $f(a')$ y $f(b')$ (*teorema de Cauchy*).

4.130. Demuéstrese que si una función $y = f(x)$ es continua en $[a, \infty)$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, dicha función está acotada en $[a, \infty)$.

4.131. Muéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

toma en cualquier segmento $[0, a]$ todos los valores intermedios entre $f(0)$ y $f(a)$, no obstante no es continua en $[0, a]$.

4.132. Demuéstrese que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

4.133. Enúnciese en el lenguaje «ε-δ» la afirmación: la función $y = f(x)$ es continua en el conjunto D, pero no es uniformemente continua en dicho conjunto. Examínense a título de ejemplo las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D = (0, 1]$;

b) $f(x) = \lg x$, $D = (0, 10]$;

c) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$, $D = (0, 1]$.

4.134. Demuéstrese que si una función $y = f(x)$ es continua en $[a, +\infty)$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, dicha función es uniformemente continua en $[a, +\infty)$.

4.135. Pruébese que una función no acotada $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ es uniformemente continua en todo el eje $-\infty < x < +\infty$.

Investíguese la continuidad uniforme en los conjuntos dados de las siguientes funciones:

4.136. $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$, $D = [-1, 1]$.

4.137. $f(x) = \ln x$, $D = (0, 1]$.

4.138. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $D = (0, \pi]$.

4.139. $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x}$, $D = (0, 1]$.

4.140. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $D = \mathbb{R}$.

4.141. $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [1, +\infty)$.

4.142. $f(x) = x \operatorname{sen} x$, $D = [0, +\infty)$.

§ 5. Números complejos

1. Operaciones algebraicas con los números complejos. Se denominan *números complejos* toda clase de pares ordenados $z = (x, y)$ de los números reales, para los cuales las operaciones de adición y multiplicación vienen definidas del modo siguiente:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{1}$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{2}$$

El conjunto de todos los números complejos se designa por el símbolo $\mathbb{C}$.

Los números reales x e y llevan el nombre de *partes real e imaginaria* del número complejo $z = (x, y)$ y se denotan mediante los símbolos Re z o Im z, respectivamente.

Dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se dicen *iguales* cuando, y sólo cuando, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

De las definiciones (1) y (2) se deduce que todo número complejo (x, y) puede escribirse del modo siguiente:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0). \tag{3}$$

Si, ahora, identificamos los números complejos del tipo $(x, 0)$ con los números reales x [1]), y designamos el número $(0, 1)$ por el símbolo i, entonces la igualdad (3) tendrá la expresión

$$z = x + iy$$

y se denominará *forma algebraica* del número complejo $z = (x, y)$.

5.1. Demuéstrese que las operaciones de adición y multiplicación de los números complejos poseen las siguientes propiedades:

a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (*conmutatividad de la adición*);

b) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (*asociatividad de la multiplicación*).

---

[1]) Es decir, establecemos una correspondencia biunívoca $(x, 0) \leftrightarrow x$, entre los conjuntos $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y $\mathbb{R}$. De (1) y (2) se deduce que dicha correspondencia «conserva las operaciones»:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \leftrightarrow x_1 + x_2,$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0) \leftrightarrow x_1x_2.$$

c) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (*conmutatividad de la multiplicación*);
d) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (*asociatividad de la multiplicación*);
e) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (*ley de la distributividad*).

5.2. Demuéstrese que:
a) $\forall z_1,\ z_2 \neq 0\ \exists z\ (z_2 z = z_1)$.

(el número z se llama *cociente* de la división de z_1 por z_2 y se designa mediante el símbolo $\frac{z_1}{z_2}$);

b) si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

En los problemas 5.3—5.12 ejecútense las operaciones mencionadas, representando los resultados en forma algebraica.

5.3. $(1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i$.

◀ El problema consiste en que el número complejo dado sea representado en la forma

$$(1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i = x + iy.$$

Con este fin podemos aprovechar directamente las fórmulas (1) y (2), no obstante el mismo resultado lo obtendremos con mayor facilidad de la manera siguiente. Como muestran las propiedades de las operaciones enunciadas en el problema 5.1, al adicionar y multiplicar los números complejos, representados en la forma algebraica, podemos tratarlos igual que los binomios del tipo $a + ib$, teniendo en cuenta adicionalmente que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Por esto

$$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i,$$

$$(1 - 2i)(2 + i)^2 = (1 - 2i)(3 + 4i) = 3 - 2i + 8i^2 = 11 - 2i,$$

de donde obtenemos en definitiva

$$(1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i = 11 - 2i + 5i = 11 + 3i.$$ ▶

5.4. $(2 + 3i)(3 - i)$. **5.5.** $(1 + 2i)^2$.

5.6. $(1 - i)^3 - (1 + i)^3$. **5.7.** $(2i - i^2)^2 + (1 - 3i)^3$.

5.8. $\dfrac{2 - i}{1 + i}$.

◀ El resultado puede ser obtenido empleando directamente la fórmula del problema 5.2. Hemos de notar, sin embargo, que $(1 + i)(1 - i) = 2$ es un número real. Por eso, al multiplicar el numerador y denominador de la fracción dada por $1 - i$, encontramos

$$\frac{2 - i}{1 + i} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - 3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$ ▶

5.9. $\dfrac{1}{1 + 4i} + \dfrac{1}{4 - i}$. **5.10.** $\left(\dfrac{1 - i}{1 + i}\right)^3$.

5.11. $\dfrac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \dfrac{(1 - i)(3 - i)}{3 + i}$.

5.12. $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Hállense las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

5.13. $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i$.

5.14. $12((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i))=17+6i$.

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

5.15. $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i,\\(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7.\end{cases}$

5.16. $\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{cases}$

Si en un plano se ha introducido un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy, entonces a todo número complejo $z=x+iy$ se le puede asignar cierto punto $M(x, y)$ de abscisa x y ordenada y.

En este caso suele decirse que el punto $M(x, y)$ *representa* el número complejo $z=x+iy$. El plano, en el que se representan los números complejos, se denomina *plano complejo*, el eje Ox, *eje real* y el Oy, *eje imaginario*.

El número $r=\sqrt{x^2+y^2}$ se llama *módulo* del número complejo $z=x+iy$ y se denota por el símbolo $|z|$. El módulo del número z es igual a la distancia entre el punto M que representa este número y el origen de coordenadas.

Toda solución φ del sistema de ecuaciones

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \operatorname{sen}\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4}$$

recibe el nombre de *argumento* del número complejo $z=x+iy\neq 0$. Todos los argumentos del número z difieren en números enteros múltiples de 2π y se designan por el símbolo único $\operatorname{Arg} z$. Cada valor del argumento coincide con la magnitud φ de cierto ángulo al cual se debe girar el eje $\widetilde{Ox}$ hasta que coincida con el radio vector $\overrightarrow{OM}$ del punto M (en este caso $\varphi>0$, si el giro se realiza en sentido antihorario, y $\varphi<0$, en el caso contrario). Se denomina *valor principal* del argumento al valor de $\operatorname{Arg} z$ que satisface la condición $0\leqslant\operatorname{Arg} z<2\pi$, y se denota mediante el símbolo $\arg z$.

En algunos casos se llama valor principal del argumento el valor de $\operatorname{Arg} z$ que satisface la condición $-\pi<\operatorname{Arg} z\leqslant\pi$.

De las correlaciones (4) se deduce que para todo número complejo z se verifica la igualdad

$$z=|z|(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi),$$

llamada *forma trigonométrica* del número z.

EJEMPLO 1. Represéntese en la forma trigonométrica el número complejo $z=-2+2i\sqrt{3}$.

◀ Tenemos

$$r=|z|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4,$$

$$\cos\varphi=-1/2,\quad \operatorname{sen}\varphi=\sqrt{3}/2,$$

por lo cual el valor principal del argumento $\arg z = 2\pi/3$ y, por ende, $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$. ▶

Represéntense en forma trigonométrica y exprésense mediante los puntos en un plano complejo los siguientes números complejos:

517. $-i$. 5.18. $1 - i\sqrt{3}$. 5.19. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.20. $\frac{1-i}{1+i}$. 5.21*. $-\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$.

5.22. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$. 5.23. $1 + \cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$.

El número complejo $x - iy$ se llama *conjugado* del número complejo $z = x + iy$ y se designa por el símbolo $\bar{z}$.

Demuéstrese las igualdades siguientes:

5.24. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ y $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

5.25. $\overline{(\bar{z})} = z$. 5.26. $|\bar{z}| = |z|$.

5.27. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

5.28. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ y $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

5.29. $\overline{zz} = |z|^2$.

5.30. Calcúlense:

a) $z_1\bar{z}_2$ y $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2$, si $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$,

b) $z_1\bar{z}_2$ y $\frac{\bar{z}_1^2}{z_2}$, si $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 2i$.

5.31. Sea $p(z)$ un polinomio arbitrario de coeficientes reales. Demuéstrese que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se verifica la igualdad $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

5.32. $|z| - z = 1 + 3i$. 5.33. $|z| + z = 2 + i$.

5.34. Demuéstrese las igualdades y aclárese su significado geométrico:

a) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ y $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

b) $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$ y $\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

(las igualdades b) se entienden en el sentido de que los números que figuran en los primeros miembros coinciden con ciertos valores de los argumentos $z_1 z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$).

Aclárese el significado geométrico de las siguientes transformaciones del plano complejo:

5.35. $z \to z - 2$. **5.36.** $z \to z + (3 - i)$.

5.37. $z \to iz$. **5.38.** $z \to \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z$.

5.39. $z \to -z$. **5.40.** $z \to 2z$.

5.41. $z \to \frac{z}{1-i}$. **5.42.** $z \to \bar{z}$.

5.43. Demuéstrese que:

a) la magnitud $|z_1 - z_2|$ es igual a la distancia en el plano complejo entre los puntos M_1 y M_2, que representan los números complejos z_1 y z_2;

b) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ y $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$ (*desigualdad triangular*). ¿Cuál es el significado geométrico de estas desigualdades?

5.44. Demuéstrense las identidades:

a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (¿cuál es el significado geométrico de esta igualdad?);

b) $^*|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1 z_2}\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1 z_2}\right|$.

Dése, en los problemas 5.45—5.55, la descripción geométrica de los conjuntos de todos los puntos de un plano complejo que satisfacen las siguientes condiciones:

5.45. $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. **5.46.** $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1$. **5.47.** $|\operatorname{Im} z| \leqslant 2$.

5.48. $|z| < 1$. **5.49.** $|z + i| = 2$.

5.50. $1 < |z + 2| \leqslant 2$. **5.51.** $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$.

5.52. $|z - i| = |z + 2|$. **5.53.** $0 < \arg z \leqslant \pi/4$.

5.54. $|\pi - \arg z| < \pi/4$. **5.55.** $z = \bar{z}$.

5.56. Sea $z \neq -1$. Demuéstrese que $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1} = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Sea φ un número real arbitrario. Mediante el símbolo $e^{i\varphi}$ se denota un número complejo $\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$. Con ayuda de esta designación todo número complejo $z = |z|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ puede escribirse en la *forma exponencial*

$$z = |z| e^{i\varphi}.$$

Represéntense en la forma exponencial los siguientes números complejos:

5.57. $\frac{7+24i}{5}$. 5.58. $5-12i$. 5.59. $-3-4i$.

5.60. $-2+i$. 5.61. $\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha$.

5.62. $\operatorname{sen}\alpha + i(1-\cos\alpha)$.

5.63. Demuéstrese que el símbolo $e^{i\varphi}$ posee las siguientes propiedades:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}\ (e^{i2\pi n} = 1)$; b) $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$;

b) $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ y $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

5.64. Represéntense los números dados z_1 y z_2 en la forma exponencial y realícense con ellos las operaciones indicadas:

a) $z_1 z_2$, $\frac{z_1^2}{z_2}$, si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$;

b) $z_1^2\bar{z}_2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, si $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$.

5.65. Demuéstrense las *fórmulas de Euler*

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

5.66. Demuéstrese la *fórmula de Moivre*: si $z = re^{i\varphi}$, entonces

$$z^n = r^n e^{in\varphi},$$

o bien, en la forma geométrica,

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi).$$

Haciendo uso de la fórmula de Moivre, calcúlense las siguientes expresiones:

5.67. $(1+i)^{10}$. 5.68. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. 5.69. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

5.70. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.

5.71. Demuéstrense las igualdades:

a) $(1+i)^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right)$.

5.72. Haciendo uso de las fórmulas de Euler, exprésense en términos de los senos y cosenos de los arcos múltiples las funciones:

a) $\cos^3 \varphi$; b) $\operatorname{sen}^3 \varphi$.

Haciendo uso de la fórmula de Moivre, exprésense en términos de $\cos \varphi$ y $\operatorname{sen} \varphi$ las siguientes funciones:

5.73. $\cos 3\varphi$. **5.74.** $\operatorname{sen} 3\varphi$.

5.75. $\cos 4\varphi$. **5.76.** $\operatorname{sen} 4\varphi$.

Sea $a = re^{i\varphi}$ un número complejo fijo. Entonces, la ecuación $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, tiene exactamente n diferentes soluciones $z_0, z_1, \ldots$ $\ldots, z_{n-1}$, con la particularidad de que dichas soluciones se determinan por la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(aquí $\sqrt[n]{r}$ es un número positivo real). Los números z_k, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, se denominan *raíces de n-ésimo grado* del número complejo a y se designan por el símbolo $\sqrt[n]{a}$.

EJEMPLO 2. Hállense todas las raíces de tercer grado del número $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.

◀ Puesto que $a = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$, entonces

$$(\sqrt[3]{a})_k = \sqrt[3]{4}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} k\right)\right),$$

donde $k = 0, 1, 2$.

Para $k = 0$: $(\sqrt[3]{a})_0 = \sqrt[3]{4}\left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{9}\right)$.

Para $k = 1$: $(\sqrt[3]{a})_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{9}\right)$.

Para $k = 2$: $(\sqrt[3]{a})_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos \frac{14\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{14\pi}{9}\right)$. ▶

5.77. Hállense y exprésense en un plano complejo todas las raíces de segundo, tercero y cuarto grados de la unidad.

Hállense todos los valores de las raíces:

5.78. $\sqrt{i}$. **5.79.** $\sqrt[4]{-1}$. **5.80.** $\sqrt[9]{-9}$.

5.81. $\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}$. **5.82.** $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$.

5.83. $\sqrt[5]{-1-i}$.

5.84. $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$. 5.85. $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$.

5.86. Demuéstrese que las raíces cuadradas de un número complejo pueden hallarse según la fórmula

$$\sqrt{z}=\sqrt{x+iy}=\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}}+i\operatorname{sen} y\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

El empleo de la forma exponencial de números complejos en muchos casos simplifica considerablemente los cálculos.

EJEMPLO 3. Calcúlese la suma

$S(\varphi)=\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}2\varphi+\ldots+\operatorname{sen}n\varphi,\quad \varphi\neq 2\pi m,\quad m\in\mathbb{Z}$.

◀ Puesto que $\operatorname{sen}\varphi=\operatorname{Im}e^{i\varphi}$, entonces, recurriendo a la fórmula para la suma de una progresión geométrica, obtenemos:

$$S(\varphi)=\operatorname{Im}e^{i\varphi}+\operatorname{Im}e^{i2\varphi}+\ldots+\operatorname{Im}e^{in\varphi}=$$

$$=\operatorname{Im}(e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}+\ldots+e^{in\varphi})=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi}(1-e^{in\varphi})}{1-e^{i\varphi}}=$$

$$=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi+i\frac{n}{2}\varphi}\left(e^{-i\frac{n}{2}\varphi}-e^{i\frac{n}{2}\varphi}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}-e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}\operatorname{Im}e^{i\frac{n+1}{2}\varphi}=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\varphi}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}.\ \blacktriangleright$$

Calcúlense las sumas:

5.87. $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi$.

5.88. $\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\ldots+\cos(2n-1)\varphi$.

5.89. $\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}3\varphi+\operatorname{sen}5\varphi+\ldots+\operatorname{sen}(2n-1)\varphi$.

2. Polinomios y ecuaciones algebraicas. Se denomina *polinomio* (o *función racional entera*) de n-ésimo grado una función del tipo

$$p_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+z_0, \tag{5}$$

donde $z\in\mathbb{C}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son los coeficientes (generalmente complejos), con la particularidad de que $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$. La ecuación

$$a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0,\quad a_n\neq 0, \tag{6}$$

se llama *ecuación algebraica* de n-ésimo grado. El número z_0, para el cual $p_n(z_0)=0$, lleva el nombre de raíz del polinomio (5) o de la ecuación (6).

TEOREMA DE GAUSS (teorema fundamental del álgebra). *Todo polinomio de grado no nulo tiene por lo menos una raíz* (generalmente compleja).

El número z_0 es una raíz del polinomio $p_n(z)$, si, y sólo si, $p_n(z)$ se divide sin resto por el polinomio $z - z_0$, es decir, si

$$p_n(z) = (z - z_0)\, q_{n-1}(z),$$

donde $q_{n-1}(z)$ es un polinomio de $(n-1)$-ésimo grado. Si $p_n(z)$ se divide sin resto por $(z - z_0)^k$, $k \geqslant 1$, pero no se divide por $(z - z_0)^{k+1}$, entonces z_0 se llama *raíz de multiplicidad k* del polinomio $p_n(z)$; en este caso

$$p_n(z) = (z - z_0)^k\, q_{n-k}(z),$$

donde $q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

El teorema de Gauss puede ser precisado de la manera siguiente: *un polinomio de n-ésimo grado tiene exactamente n raíces, si cada raíz se cuenta tantas veces cual es su multiplicidad.*

Si los coeficientes del polinomio (5) son números reales y $z_0 = x_0 + iy_0$ es su raíz compleja, entonces el número conjugado $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ será también una raíz de dicho polinomio, con la particularidad de que las raíces z_0 y $\bar{z}_0$ son de multiplicidad igual (véase el problema 5.31).

Supongamos que el polinomio $p_n(z)$ tiene las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(m \leqslant n)$ cuyas multiplicidades son $k_1, k_2, \ldots, k_m$, respectivamente $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$. Podemos, en este caso, descomponerlo en factores lineales, es decir, resulta válida la identidad

$$p_n(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m}.$$

Si los coeficientes del polinomio son números reales, entonces, al reunir los paréntesis correspondientes a las raíces complejas conjugadas, podemos descomponer este polinomio en un producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

EJEMPLO 4. Hállense las raíces del polinomio $z^6 + 2z^3 + 1$ y descomplíquese el mismo en factores.

◀ Puesto que $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$, entonces las raíces de este polinomio son las de tercer grado de -1:

$$z_1 = -1;$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_3 = \cos\frac{\pi}{3} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cada raíz, además, tiene una multiplicidad de $k = 2$. La descomposición de este polinomio en factores lineales tiene por expresión

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2.$$

Al reunir los dos últimos paréntesis en un factor, obtendremos una descomposición en factores con coeficientes reales

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2 (z^2 - z + 1)^2. \blacktriangleright$$

Resuélvanse las ecuaciones cuadráticas:

5.90. $z^2 + 2z + 5 = 0$. **5.91.** $4z^2 - 2z + 1 = 0$.

5.92. $z^2 + (5 - 2i)\, z + 5\,(1 - i) = 0$.

5.93. $z^2 + (2i - 3)\, z + 5 - i = 0$.

Resuélvanse las ecuaciones binomias:

5.94. $z^3 - 1 = 0$. **5.95.** $z^3 + 1 = 0$.

5.96. $(z + 1)^4 - 16 = 0$. **5.97.** $(z + 1)^4 + 16 = 0$.

Resuélvanse las ecuaciones bicuadradas

5.98. $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$. **5.99.** $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$.

5.100. $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$.

5.101. $z^4 - (1 + i)\, z^2 + 2\,(1 + i) = 0$.

Resuélvanse las ecuaciones trinomias:

5.102. $z^6 + 4z^3 + 3 = 0$. **5.103.** $z^8 + 15z^4 - 16 = 0$.

5.104.* Muéstrese que todas las raíces de la ecuación

$$\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^n = \frac{(1 + ia)}{(1 - ia)} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

son reales y distintas.

Descompóngase en factores lineales y cuadráticos de coeficientes reales los polinomios siguientes:

5.105. $z^4 - 1$. **5.106.** $z^4 + 1$. **5.107.** $z^4 + z^2 + 1$.

5.108. $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10$; se conoce la raíz $z_1 = -1 + i$.

5.109. $z^5 + z^4 + z^3 - z^2 - z - 1$; se conoce la raíz doble $z_1 = z_2 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.110. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100$; se conoce la raíz $z_1 = 1 + 2i$.

3. Límite de la sucesión de números complejos. El número a se denomina *límite* de la sucesión de números complejos $(z_n)_n \in \mathbb{N}$ y se escribe $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que, siendo $n > N(\varepsilon)$, se cumple la desigualdad $|z_n - a| < \varepsilon$.

La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama *convergente al infinito* y se escribe $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, si para cualquier $E > 0$ existe un número $N(E)$ tal que, siendo $n > N(E)$, se verifica la desigualdad $|z_n| > E$.

5.111. Sea $x_n = \operatorname{Re} z_n$ e $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Demuéstrese que $\lim_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$ cuando, y sólo cuando, $\lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re} a$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = \operatorname{Im} a$.

5.112. Sea $\lim_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$, y $\lim_{n\to\infty} w_n = b \neq \infty$. Demuéstrese que:

a) $\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = a + b$; b) $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = ab$.

5.113. Sea $\lim_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$, y $\lim_{n\to\infty} w_n = b \neq 0$. Demuéstrese que $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}$.

Calcúlense los límites:

5.114. $\lim_{n\to\infty} \left(2 - i + \frac{1}{n}(1+i)\right)$. **5.115.** $\lim_{n\to\infty} \frac{1-in}{1+in}$.

5.116. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{3n+2} \cdot \frac{in^2}{n^2+n-4i}$.

5.117. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2i)(3+7in)}{(2-i)n^2+1}$.

5.118. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i^n}{n}\right)$. **5.119.** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} e^{in\frac{\pi}{4}}$.

5.120. $\lim_{n\to\infty} (2i)^n$. **5.121.** $\lim_{n\to\infty} \left(2^n + i\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$.

5.122. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5i} - \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(5i)^n}\right)$.

1.123. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{ik}{3^k}$. **5.124.** $\lim_{n\to\infty} \left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n} + \right.$

$\left. + i\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

5.125. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2-3i)^k}$.

5.126. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3+2i}{n}\right)^n$.

Demuéstrese que las sucesiones que siguen son acotadas, pero divergen:

5.127. $z_n = i^n$. **5.128.** $z_n = (-1)^n + i\frac{2-n}{2+n}$.

5.129. $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i\frac{n\pi}{2}}$.

5.130. $z_n = \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n)$.

Pruébese que las sucesiones siguientes no están acotadas, pero no convergen al infinito:

5.131. $z_n = n(1 + i^n)$. **5.132.** $z_n = (e^{i\frac{\pi n}{2}} - i)\ln n$.

5.133. Sea $r_n = |z_n|$ y $\varphi_n = \arg z_n$. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ $(0 < |a| < \infty)$ cuando, y sólo cuando, el $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = |a|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \arg\varphi$ (siendo eligido adecuadamente el campo de valores principales de argumentos).

El resultado del problema 5.133 se usa a menudo al calcular los límites de las sucesiones complejas.

EJEMPLO 5. Sea φ un número real $(\varphi \neq 0)$. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi = e^{i\varphi}.$$

◀ Analicemos dos sucesiones reales:

$$r_n = \left|\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n/2},$$

$$\varphi_n = \arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = n\arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right) = n\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{n}.$$

Calculemos sus límites:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{\varphi^2}}\right)^{\frac{\varphi^2}{2n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi^2}{2n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{n} = \varphi\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}} = \varphi.$$

De aquí obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = 1\cdot(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) = e^{i\varphi}. \blacktriangleright$$

5.134. Sea $z = x + iy$. Demuéstrese (véase el ejemplo 5) que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) = e^{x+iy} = e^z.$$

Demuéstrese la convergencia de las sucesiones a seguir y hállense sus límites:

5.135. $z_n = z^n$, $|z| < 1$. **5.136.** $z_n = nz^n$, $|z| < 1$.
5.137. $z_n = 1 + z + \ldots + z^n$, $|z| < 1$.
5.138. $z_n = \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$, $|z| > 1$.
5.139. Calcúlese

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+z_1+\ldots+z_1^n}{1+z_2+\ldots+z_2^n},$$

si $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$.
5.140. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n} = a.$$

RESPUESTAS

1.1. La aproximación por defecto 0,4; 0,10; 0,101. La aproximación por exceso: 0,2; 0,11; 0,102. **1.2.** a) $\frac{11}{9}$; b) $\frac{901}{300}$; c) $\frac{2183}{19800}$. **1.11.** $\log_{1/2}\frac{1}{3}\log_{1/3}\frac{1}{2}$. **1.12.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$. **1.13.** $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2} > 1$. **1.18.** $\left\{\frac{7}{6}, \frac{3}{2}\right\}$. **1.19.** $(-1, 0)$. **1.20.** ϕ. **1.21.** $\{0, 2\}$. **1.22.** $(-\infty, 2]$. **1.23.** $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$. **1.24.** $(3, 4)$. **1.25.** $[1-\sqrt{17}, -1+\sqrt{5}]$. **1.26.** $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. **1.27.** $(-\infty, -1]$. **1.28.** a) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$; b) ambas notaciones son justas. **1.29.** $A = \{0, 1, 2\}$. **1.30.** $A = \{1\}$. **1.31.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$. **1.32.** $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **1.33.** $A = \{1, 2, 3\}$. **1.34.** $A = \{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$. **1.35.** Véase la fig. 3. **1.36.** Véase la fig. 4 (la frontera de la región rayada no pertenece al conjunto). **1.37.** Véase la fig. 5. **1.38.** Véase la fig. 6 (la línea de trazos no pertenece al conjunto). **1.39.** Véase la fig. 7 (la frontera de la región rayada no pertenece al conjunto). **1.40.** El punto (2, 2). **1.41.** Véase la fig. 8. **1.42.** Véase la fig. 9 (la frontera de la región rayada no pertenece al conjunto). **1.43.** $A \cup B = \{-5, 3, 4\}$; $A \cap B = \{4\}$; $A \setminus B = \{-5\}$; $B \setminus A = \{3\}$. **1.44.** $\{2, 4, 8\}$. **1.45.** $\{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **1.46.** $\{1, 2, 4\}$. **1.47.** $\{24k \mid k \in \mathbb{N}\}$. **1.49.** $A \cup B = (-1, 4)$; $A \cap B = [1, 2]$; $A \setminus B = (-1, 1)$; $B \setminus A = (1, 4)$. **1.50.** $(0, 1)$. **1.51.** $[0, 1/4] \cup [1/2, 1]$. **1.52.** $\{0\} \cup (1/2, 1)$. **1.53.** $[0, 1/4) \cup (1/4, 3/4) \cup \{1\}$. **1.60.** $\mathbb{Z}$; $\{-1, 0, 1\}$. **1.61.** $\{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 3k, k \in \mathbb{N}\}$; $\varnothing$. **1.62.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n, n \in \mathbb{N}, (1)\}$. **1.63.** a) Todos

los puntos del círculo dado; ∅; b) todos los puntos del anillo encerrado entre la circunferencia dada y una circunferencia concéntrica de radio dos veces menor; ∅; c) todos los puntos del círculo; el centro del círculo. **1.73.** a) mín X no existe; máx $X = 1$; b) $[1, +\infty)$; $(-\infty, 0]$; sup $X = 1$; inf $X = 0$. **1.74.** $^1/_2$; no existe; $^1/_2$; 0. **1.75.**

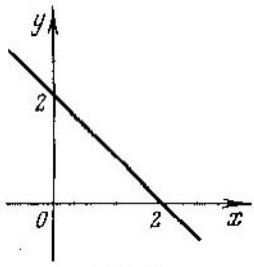


Fig. 3

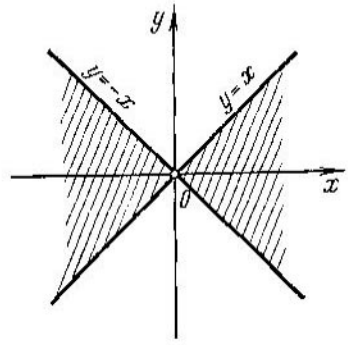


Fig. 4

1; —1; 1; —1. **1.76.** No existe; —5, 0; —5. **1.77.** No existe; no existe; 0; no existe. **1.78.** No existe; no existe; 1; 0. **1.79.** sup $X = \sqrt{2}$. **1.83.** a) Verídica; b) falsa; c) verídica; d) falsa. **1.84.** Falsa. **1.85.** Verídica. **1.86.** Falsa. **1.87.** Verídica. **1.88.** Verídica. **1.89.** Falsa. **1.90.** a) Verídica; b) falsa. **1.91.** a) Verídica; b) verídica; c) falsa. **1.92.** a) $f(x_0) = 0$; $f(x_0) \neq 0$. b) $f(x_0) = 0 \wedge \forall x\, (x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0) \neq 0)$; $f(x_0) \neq 0 \vee (f(x_0) = 0 \wedge \exists x\, (x \neq x_0 \wedge f(x) = 0))$; c) $\exists x_0\, (f(x_0) = 0) \wedge (\forall x\, (x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq 0))$; $\forall x\, (f(x) \neq 0) \vee \exists (x_1, x_2\, (x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) = 0))$. **1.93.** a) $\exists M \forall x \in X\, (x \leqslant M)$; $\forall M \exists x \in X\, (x > M)$. b) $(m \in X) \wedge (\forall x \in X\, (m \leqslant x))$; $(m \in X) \vee (\exists x \in X\, (x < m))$. c) $(\exists m \in X) \wedge (\forall x \in X\, (m \leqslant x))$; $\forall x' \in X \exists x \in X\, (x < x')$. **1.94.** a) $\exists k \in \mathbb{Z}\, (n = km)$; $\forall k \in \mathbb{Z}\, (n \neq km)$. b) $(2 \mid n \wedge 3 \mid n) \Rightarrow 6 \mid n$; $(2 \mid n \wedge 3 \mid n) \wedge 6 \nmid n$. (OBSERVACIÓN: Puesto que la declaración inicial es verídica, la negación de ella es falsa). c) $\forall n \in \mathbb{N}\, (n \mid p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p))$; $\exists n \in \mathbb{N}\, (n \mid p \wedge (n \neq 1 \wedge n \neq p))$.

2.1. $R = \sqrt{\dfrac{1}{\pi H}}$. **2.2.** $V = \dfrac{S^2 \sqrt{16\pi^2 - S^2}}{24\pi^2}$.

2.3. $S = \dfrac{3}{4} \operatorname{tg} \alpha$. **2.4.** $v = a(t - t_0)$; $s = \dfrac{a}{2}(t - t_0)^2$; $s = \dfrac{v^2}{2a}$, donde $t \geqslant t_0$.

2.5.
$$S_{ABNM} = \begin{cases} \dfrac{x^2 h}{a-b}, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a-b}{2}, \\ hx + \dfrac{(a-b)h}{4}, & \dfrac{a-b}{2} < x < \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{a+b}{2} h - \dfrac{(a-x)^2 h}{a-b}, & \dfrac{a+b}{2} < x \leqslant a. \end{cases}$$

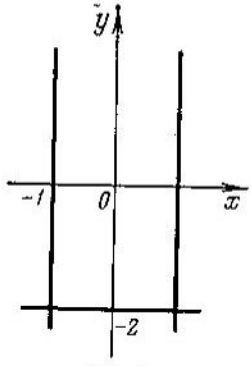


Fig. 5

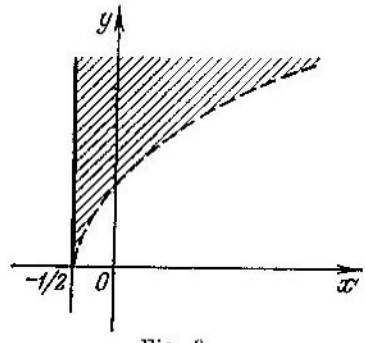


Fig. 6

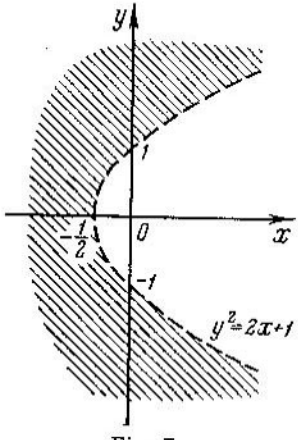


Fig. 7

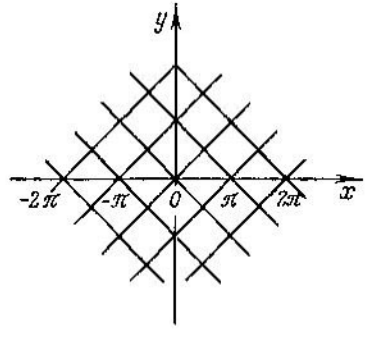


Fig. 8

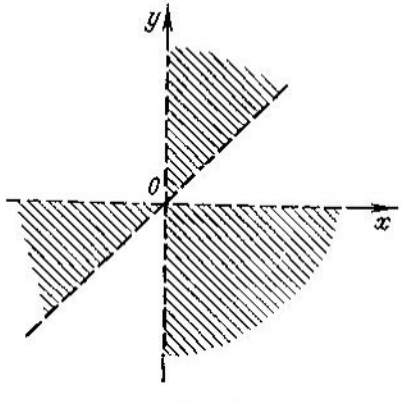


Fig. 9

2.6. $V=\frac{1}{4}\pi h\,(4R^2-h^2)$, $D=[0,2R]$. 2.7. a) $S=\frac{\pi l^2}{2R}\sqrt{4R^2-l^2}$, $D=[0,\ 2R]$; b) $S=4\pi R^2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $D=[0,\ \pi]$; c) $S=4\pi R^2\cos\beta\operatorname{sen}^2\beta$, $D=[0,\ \pi/2]$. 2.8. 0, $-6{,}4$. 2.9. -1, 0, 1, 2, 4. 2.10. 0, a^3-1, a^3+3a^2+3a, a^3-3a^2+3a-2, $16a^3-2$. 2.11. 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $-\frac{x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. 2.12. $D=(-3,\ \infty)$, $E=(-\infty,\ +\infty)$. 2.13. $D=(-\infty,\ {}^5/_2)$, $E=[0,\ +\infty)$. 2.14. $D=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}[4\pi^2k^2,\ \pi^2(2k+1)^2]$, $E=[0,\ \pi]$. 2.15. $D=\left[-\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right]$, $E=[0,\ \pi]$. 2.16. $D=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{2\pi}{3}\left(3k+\frac{1}{2}\right),\ \frac{2\pi}{3}\left(3k+\frac{5}{2}\right)\right)$, $E=[-\infty,\ \ln 3]$. 2.17. $D=[-1,\ 1]$, $E=[0,\ 1]$. 2.18. $E=(2,\ 3)$, $E=\left(-\infty,\ \lg\frac{1}{4}\right]$. 2.19. $D=[-1,1]$, $E=[0,\ \pi/4]$. 2.20. $D=[0,2]$, $E=[1,\ 2^{\pi}]$. 2.21. $D=(-\infty,\ +\infty)$, $E=[1/e^2,\ +\infty)$. 2.22. $G=[0,\ 4]$. 2.23. $G=[1,\ 2]$. 2.24. $G=(-\infty,0)\cup(1,\ +\infty)$. 2.25. $G=(0,\ 1/2]$. 2.26. $G=(1,\ 3]$. 2.27. $G=[0,\ \sqrt{2}/2)$. 2.28. $D_0=\{-1\}$, $D_+=(-1,\ +\infty)$, $D_-=(-\infty,\ -1)$. 2.29. $D_0=\{-1,\ 2\}$, $D_+=(-1,\ 2)$, $D_-=(-\infty,\ -1)\cup(2,\ +\infty)$. 2.30. $D_0=\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$, $D_+=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{2n},\ \frac{1}{2n+1}\right)$, $D_-=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\times\left(\frac{1}{2n+1},\ \frac{1}{2(n+1)}\right)$. 2.31. $D_0=\{1\}$, $D_+=(-\infty,0)\cup(1,\ +\infty)$, $D_-=(0,\ 1)$. 2.37. $f(x)=x^2-2$. 2.38. $f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. 2.39. $f(x)=\operatorname{sen}x$. 2.40. Par. 2.41. Ni par ni impar 2.42. Ni par ni impar. 2.43. Impar. 2.44. Ni par ni impar. 2.45. Impar. 2.47. $T=2\pi/7$. 2.48. $T=\pi/2$. 2.49. No periódica. 2.50. No periódica. 2.51. No periódica. 2.52. $T=6\pi$. 2.53. Si $a=0$, la función inversa no existe; si $a\neq 0$, entonces $y=\frac{x-b}{a}$ es la función inversa y $D=(-\infty,\ +\infty)$. 2.54. La inversa

$$y=\begin{cases}-\sqrt[3]{-x}+1, & \text{si } x\leqslant 0,\\ \sqrt[3]{x}+1, & \text{si } x>0.\end{cases}\qquad D=(-\infty,\ +\infty),$$

2.55. La función inversa no existe. 2.56. La función inversa $y=\frac{1}{2}e^x$, $D=(-\infty,\ +\infty)$. 2.57. La inversa $y=2\log_2 x$, $D=(0,\ +\infty)$. 2.58. La función inversa $y=\frac{1-x}{1+x}$, $x\neq -1$.

2.60. a) $y=-\sqrt{x+1}$, $D=\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$; b) $y=\sqrt{x+1}$, $D=\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$. **26.1.** a) $y=\operatorname{arcsen} x$, $D=[-1, 1]$; b) $y=\pi+\operatorname{arc\,sen} x$, $D=[-1, 1]$. **2.62.** $y=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ x/2, & x>0. \end{cases}$ **2.63.** a) $y=\frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$; b) $y=\pi-\frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$; c) $y=\pi+\frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$. **2.65.** $f\circ g=1-x^2$, $g\circ f=(1-x)^2$. **2.66.** $f\circ g=x$, $x>0$; $g\circ f=x$. **2.67.** $f\circ g=x$, $g\circ f=\begin{cases} x+\pi, & x\in[-\pi, -\pi/2), \\ x, & x\in[-\pi/2, \pi/2], \\ x-\pi, & x\in(\pi/2, \pi]. \end{cases}$

2.68. $f\circ g=0$, $g\circ f=g$. **2.69.** a) x; b) $x/\sqrt{1+3x^2}$. **2.70.** $f(u)=\sqrt{u}$, $u=x^2$. **2.71.** $f(u)=\operatorname{sen} u$, $u=\cos v$, $v=\sqrt{x}$. **2.72.** $f(u)=2^u$, $u=\operatorname{sen} v$, $v=x^2$. **2.73.** $f(u)=\operatorname{arcsen} u$, $u=e^v$, $v=\sqrt[3]{x}$. **2.74.** $f(u)=\operatorname{sen} u$, $u=2^v$, $v=x^2$. **2.75.** $f(u)=u^{-1/3}$, $u=v^2$, $v=\operatorname{tg} t$, $t=\log_3 x$. **2.77.** $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$ **2.78.** $\{(-1, 2), (1, 2)\}$.

2.79. $\{(2k\pi, k\pi) \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **2.80.** $\{(k\pi, 1) \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **2.81.** a) Una recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (1, 2); b) una recta paralela al eje Ox que pasa por el punto (0, —2); c) una recta que pasa por el punto $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto ángulos coordenados. **2.82.** a) La parábola $y=x^2$ desplazada en 1 hacia abajo a lo largo del eje Oy; b) la parábola $y=x^2$, estirada en 2 veces a lo largo del eje Oy, desplazada en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox; c) la parábola $y=x^2$ reflejada respecto al eje Ox, contraída en 2 veces a lo largo del eje Oy, desplazada en 2 a la izquierda a lo largo del eje Ox y en 3/2 hacia arriba a lo largo del eje Oy. **2.83.** a) La hipérbola $y=\frac{1}{x}$, desplazada en 1 hacia abajo a lo largo del eje Oy y en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox: b) la hipérbola $y=\frac{1}{x}$, reflejada respecto al eje Ox, estirada en dos veces a lo largo del eje Oy, desplazada en $\frac{1}{2}$ hacia abajo a lo largo del eje Oy y en 1 a la izquierda a lo largo del eje Ox. **2.84.** a) La sinusoide $y=\operatorname{sen} x$, contraída en dos veces a lo largo del eje Ox y desplazada en $\pi/6$ a la izquierda a lo largo del eje Ox; b) la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$, reflejada respecto del eje Ox, en dos veces estirada a lo largo del eje Oy, en dos veces estirada a lo largo del eje Ox y desplazada en $2\pi/3$ a la derecha a lo largo del eje Ox. **2.85.** a) la tangenzoide $y=\operatorname{tg} x$, en tres veces estirada a lo largo del eje Oy, en tres veces estirada a lo largo del eje Ox y desplazada en $3\pi/4$

a la izquierda a lo largo del eje Ox; b) la tangenzoide $y = \operatorname{tg} x$, reflejada respecto al eje Ox, contraída en dos veces a lo largo del eje Oy, contraída en dos veces a lo largo del eje Ox y desplazada en $3\pi/4$ a la izquierda a lo largo del eje Ox. **2.86.** a) La gráfica de la función trigonométrica inversa $y = \arcsen x$, en 4 veces estirada a lo largo del eje Oy y desplazada en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox; b) la gráfica de la función $y = \arcsen x$, reflejada respecto del eje Ox, en 3/2 veces contraída a lo largo del eje Oy y desplazada en 1/2 a lo largo del eje Ox a la izquierda. **2.87.** a) La gráfica de la función trigonométrica inversa $y = \operatorname{arctg} x$, reflejada respecto al eje Ox, en tres veces estirada respecto al eje Oy y desplazada en 5/2 a lo largo del eje Ox a la izquierda; b) la gráfica de la función $y = \operatorname{arctg} x$, en 5/2 veces contraída a lo largo del eje Oy y desplazada en 6 a la derecha a lo largo del eje Ox. **2.88.** La gráfica de la función exponencial $y = 2^x$, reflejada respecto del eje Oy y desplazada en 1 a lo largo del eje Ox a la derecha; b) gráfica de la función $y = 2^x$, reflejada respecto del eje Oy, dos veces contraída a lo largo del eje Ox y desplazada en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox. **2.89.** a) La gráfica de la función logarítmica $y = \ln x$, desplazada en 1 hacia arriba a lo largo del eje Oy y en 1/10 a la derecha a lo largo del eje Ox; b) la gráfica de la función $y = \ln x$, reflejada respecto del eje Ox, desplazada en $\lg 2$ hacia arriba a lo largo del eje Oy y en 4, a la izquierda a lo largo del eje Ox.

2.90 [1]).

$$y = \begin{cases} -2x, & x \in (-\infty, -2], \\ 4, & x \in (-2, 2], \\ 2x, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

2.91.

$$y = \begin{cases} (x+1)^3 - 1, & x \in (-\infty, 0], \\ x^2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

2.92.

$$y = \begin{cases} (x+3)^2, & x \in (-\infty, 0], \\ (x-3)^2, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

2.93.

$$y = \begin{cases} 6\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{25}{24}, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right] \cup [0, +\infty), \\ -6\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{23}{24}, & x \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right). \end{cases}$$

2.94.

$$y = \begin{cases} -(x+1)^2 + 1, & x \in (-\infty, 1], \\ (x+1)^2 - 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

2.95.

$$y = \begin{cases} 2(x-1), & x \in (-\infty, 1], \\ 0, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

2.96.

$$y = \begin{cases} 2 - \frac{7}{x+2}, & x \in (-\infty, -2) \cup [3/2, +\infty), \\ -2 + \frac{7}{x+2}, & x \in (-2, 3/2). \end{cases}$$

---

[1]) Aquí y en lo que sigue, en las respuestas para todos los problemas análogos de este párrafo, de hecho se aduce el tipo de función inicial del cual se obtiene con facilidad la gráfica de la misma.

2.97. $y=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x+2}, & x\in(-\infty,\ -2), \\ -1+\dfrac{1}{x+2}, & x\in(-2,\ 0], \\ 1-\dfrac{3}{x+2}, & x\in(0,\ +\infty). \end{cases}$

2.98. Si $x\in(-\infty,\ 0)$, la recta $y=-1$; si $x\in(0,\ +\infty)$, la recta $y=1$; si $x=0$, la recta $y=0$. **2.99.** Si $x\in[n,\ n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, la recta $y=n$. **2.100.** Si $x\in[n,\ n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, la recta $y=x-n$.

2.101. $y=\begin{cases} 2^{-x}-1, & x\in(-\infty,\ 0], \\ 2^{x}-1, & x\in(0,\ +\infty). \end{cases}$

2.102. $y=\begin{cases} 3^{x+1}+2, & x\in(-\infty,\ -1], \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+2, & x\in(-1,\ +\infty). \end{cases}$

2.103. $y=\begin{cases} \log_{1/2}(3-x), & x\in(-\infty,\ 3), \\ \log_{1/2}(x-3), & x\in(3,\ +\infty). \end{cases}$

2.104. $y=\begin{cases} -\log_2(x+1), & x\in(-1,\ 0], \\ \log_2(x+1), & x\in(0,\ +\infty). \end{cases}$

2.105.

$$y=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4}-2k\pi & x\in\left[2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right], \\ x+\dfrac{\pi}{4}-(2k+1)\,\pi, & \\ x\in\left((2k+1)\,\pi-\dfrac{3\pi}{4},\ (2k+1)\,\pi+\dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

2.106.

$$y=\begin{cases} 3x-2k\pi, & x\in\left[2k\dfrac{\pi}{3},\ (2k+1)\,\dfrac{\pi}{3}\right]. \\ 3x-(2k+1)\,\pi, & x\in\left((2k+1)\,\dfrac{\pi}{3},\ 2(k+1)\,\dfrac{\pi}{3}\right), \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

2.107.

$$y=\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in[2k\pi,\ (2k+1)\,\pi], \\ \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in((2k+1)\,\pi,\ 2(k+1)\,\pi), \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

2.108. $y=\begin{cases} -\operatorname{arctg}(x-1), & x\in(-\infty,\ 1], \\ \operatorname{arctg}(x-1), & x\in(1,\ +\infty), \end{cases}$

2.109. $y=\begin{cases} x, & x\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \\ -x, & x\in\left((2k+1)\pi-\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.

2.110.

$$y=\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & x\in\left[k\pi-\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{\pi}{4}\right], \\ -\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & x\in\left(k\pi+\frac{\pi}{4},\ (k+1)\pi-\frac{\pi}{4}\right), \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

2.111. $y=\frac{1}{2}(1-\cos x)$. 2.112. El segmento de la recta $y=\frac{x}{5}+\frac{2}{5}$, $x\in[-7, 3]$. 2.113. Los ejes de coordenadas.

2.114. La curva, simétrica respecto a ambos ejes de coordenadas; en el primer cuadrante una parte de la parábola $y=-(x-1)^2+4$ para $x\in[0, 3]$ y una parte de la parábola $y=(x-1)^2-4$ para $x\in(0, +\infty)$. 2.115. El cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. 2.116. El cuadrado cuyos lados son $x=\pm 1/2$, $y=\pm\frac{1}{2}$.

2.117. La curva, simétrica respecto de ambos ejes de coordenadas y la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero; en la región $G=\{(x, y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x\geqslant y\}$, el rayo $y=x-1$. 2.118. La curva simétrica respecto de ambos ejes de coordenadas; en el primer cuadrante es un segmento de la recta $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ cuando $y\leqslant\frac{1}{2}$, y un segmento de la recta $y=1-\frac{x}{\sqrt{3}}$ cuando $y>\frac{1}{2}$.

3.1. $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ 3.2. 2, 0, 6, 0, 10, ... 3.3. $-8, 11, \frac{14}{3}, \frac{17}{5}, \frac{20}{7}, \ldots$ 3.4. $\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \ldots$ 3.5. $x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$. 3.6. $x_n=1+(-1)^n$. 3.7. $x_n=\frac{2n}{2n-1}$. 3.8. $x_n=n\cos\frac{\pi(n-1)}{2}$. 3.9. $x_n=(-1)^n\frac{2n+1}{2n-1}$. 3.10. $x_n=\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{4}$.

3.11. El término mayor $x_3=4$. 3.12. El término mayor $x_5=e$. 3.13. El término mayor $x_9=1/6$. 3.14. El término menor $x_2=-22$. 3.15. El término menor $x_8=24$. 3.16. El término menor $x_3=-9/8$. 3.17. a) $\exists A>0\forall n\in\mathbb{N}\ (|x_n|\leqslant A)$; $\forall A>0\exists n\in\mathbb{N}\ (|x_n|>A)$. b) $\forall n\in\mathbb{N}\ (x_n<x_{n+1})$; $\exists n\in\mathbb{N}\ (x_n\geqslant x_{n+1})$. c) $\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\ (n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon)$; $\exists\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\exists n\in\mathbb{N}\times(n>\mathbb{N}\wedge|x_n-a|\geqslant\varepsilon)$. d) $\forall E>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\ (n>N\Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n| > E$); $\exists E > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}$ $(n > N \wedge |x_n| \leqslant E)$. e) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ $(|x_n - a| < \varepsilon)$; $\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ $(|x_n - a| \geqslant \varepsilon)$. 3.18. a) $a = 1/3$; $N = 3$; b) $a = 1$, $N = 10$; c) $a = 0$, $N = 999$; d) $a = 5/7$, $N = 3$. 3.19. $-5/9$. 3.20. $-1/2$. 3.21. 0. 3.22. 0. 3.23. -1. 3.24. $1/2$. 3.25. $1/3$. 3.26. 0. 3.27. 1. 3.28. $1/6$. 3.30. Lo es. 3.31. No lo es. 3.32. No lo es. 3.33. Lo es.

3.34. $1/3$, 3. 3.35. 0, $\sqrt{2}/2$, 1, $-\sqrt{2}/2$, -1. 3.36. $\pi/6$, $-\pi/6$. 3.38. $\inf\{x_n\} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\sup\{x_n\} = 2$. 3.39. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\} = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\sup\{x_n\} = 5/4$. 3.40. La sucesión no es acotada superiormente ni inferiormente: $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$. 3.41. $\inf\{x_n\} = -\sqrt{3}$, $\sup\{x_n\} = 2\sqrt{3}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 3.42. $\inf\{x_n\} = -\dfrac{1}{2}$, $\sup\{x_n\} = \dfrac{3}{2}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{2}$. 4.4. $\forall E > 0 \exists \delta < 0$ $(0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E)$. 4.5. $\forall E > 0 \exists \delta > 0$ $(-\delta < x - 1 < 0 \Rightarrow f(x) < -E)$. 4.6. $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0$ $(x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$. 4.7. $\forall E > 0 \exists A > 0$ $(x > A \Rightarrow f(x) > E)$.] 4.8. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ $(0 < x < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$. 4.9. $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0$ $(|x| > A \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon)$. 4.10. $\forall E > 0 \exists A > 0$ $(x < -A \Rightarrow f(x) < -E)$. 4.11. $\forall E > 0 \exists A > 0$ $(x < -A \Rightarrow |f(x)| > E)$. 4.12. -2. 4.13. 2. 4.14. ∞. 4.15. 0. 4.16. m/n. 4.17. $3x^2$. 4.18. 6. 4.19. $(a-1)/3a^2$. 4.20. $1/4$. 4.21. ∞. 4.22. $n+1$. 4.24. $3/5$. 4.25. $1/6$. 4.26. $\sqrt{2}/2$. 4.27. $\sqrt{2/3}$. 4. 28. $1/n$. 4.29. m/n. 4.30. $3/2$. 4.31. $3\sqrt[4]{2}/2$. 4.32. 0. 4.33. $1/2$. 4.34. $-7/4$. 4.35. 2. 4.36. 3. 4.37. $7/3$. 4.38. $1/\pi$. 4.39. $3/4$. 4.40. 2. 4.41. $(\alpha^2 - \beta^2)/2$. 4.42. 0. 4.43. $-\alpha/\pi$. 4.44. $-\sqrt{2}/4$. 4.45. 1. 4.46. ◀ Al observar que $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{1/x}$ y aprovechando la continuidad de la función $f(x) = \log_a x$ (véase el problema 4.105) podemos escribir: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \log_a e$. ▶ 4.47. ● Hágase el cambio de la variable $a^x - 1 = y$. 4.48. ● Hágase el cambio de la variable $(1+x)^a - 1 = y$. Entonces, $a \ln(1+x) = \ln(1+y)$. Por consiguiente, $\dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{\ln(1+x)} \cdot a \cdot \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. 4.49. e^{10}. 4.50. e^{10}. 4.51. $e^{-1/2}$. 4.52. e^3. 4.53. 2. 4.54. 1. 4.55. $\ln a$. 4.56 $a \ln a$. 4.57. $1/a \log_a e$. 4.58. $a - b$. 4.63. $+1$, -1. 4.64. $-\infty$, $+\infty$ 4.65. $+\infty$, 0. 4.66. 0, $+\infty$. 4.67. $\pi/2$, $-\pi/2$. 4.68. 0, -1. 4.69. 2, -2.

4.70. $-\infty$, $-\infty$. 4.74. 3/2. 4.75. 2/3. 4.76. 1. 4.77. 3. 4.78. 1. 4.79. 3. 4.80. 1/3. 4.81. 1/2. 4.82. 1/2. 4.83. 1/2. 4.85. 0,97. 4.86. 5,03. 4.87. 1,15. 4.88. 0,88. 4.91. $-\ln 10$. 4.92. 3. 4.93. -2. 4.94. 2/3. 4.95. 8/9 4.96. $3\sqrt{2}/2$. 4.97. 3. 4.98. 1. 4.99. 1/2. 4.100. 2/3. 4.101. 2. 4.102 1/6. 4.109. $A = 3$. 4.110. $a = 2$. 4.111. $b = \pi a/2$. 4.112. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ son puntos de discontinuidad de segunda especie. 4.113. $x = 5/3$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.114. $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0) = n$. 4.115. $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0) = 1$. 4.116. $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0) = 1$; 4.117. $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ son los puntos de discontinuidad de segunda especie. 4.118. $x = 0$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.119. $x = -2$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.120. $x = 2$ es un punto de discontinusdad de primera especie. 4.121. $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable, $f(0) = 2$; $x = \pm 1$ son los puntos de discontinuidad de segunda especie. 4.122. $x_1 = 0$ es un punto de discontinuidad evitable, $f(0) = -1$; $x_2 = 1$ es un punto de discontinuidad evitable, $f(1) = 0$; $x_3 = -1$ es un punto de discontinuidad de segunda especie. 4.123. $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0) = 1/2$. 4.124. $x = 1$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.125. $x = 1$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.126. $x = 2{,}5$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.127. $x = \pi/4$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.133. $(\forall \varepsilon > 0 \forall x_0 \in D \exists \delta > 0 (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)) \wedge (\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x', x'' \in D (|x' - x''| < \delta \wedge |f(x') - f(x'')| > \varepsilon))$. 4.136. Uniformemente continua. 4.137. No es uniformemente continua. 4.138. Uniformemente continua. 4.139. No es uniformemente continua. 4.140. Uniformemente continua. 4.141. No es uniformemente continua. 4.142. No es uniformemente continua.

5.4 $9+7i$. 5.5. $-3+4i$. 5.6 $-4i$. 5.7. $-29+22i$. 5.9. $\frac{5}{17} - \frac{3}{17}i$. 5.10. i. 5.11. $\frac{14}{5}i$. 5.12. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. 5.13. $x = 2$, $y = 3$. 5.14. $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$. 5.15. $z_1 = 1$, $z_2 = i$. 5.16. $z_1 = 2+i$, $z_2 = 2-i$. 5.17. $\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$. 5.18. $2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}\right)$. 5.19. $\cos \times \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$. 5.20. $\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$. 5.21. $\cos \frac{6\pi}{7} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{7}$. ● Determínese el ángulo φ que satisface las condiciones: $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\cos \varphi = -\cos \frac{\pi}{7}$, $\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$. 5.22. $\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$. 5.23. $2 \cos \frac{\pi}{14}\left(\cos \frac{\pi}{14} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{14}\right)$. 5.30. a) $-4i$, $\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $10-2i$, $-\frac{7}{4} - \frac{1}{4}i$. 5.32. $\frac{3}{2} - 2i$. 5.33. $\frac{3}{4} + i$. 5.35. El desplamiento sobre el vector $a(-2, 0)$. 5.36. El desplazamiento sobre el vector $a(3, -1)$. 5.37. El giro en un ángulo $\pi/2$

en sentido antihorario. 5.38. El giro del ángulo $\pi/4$ en sentido horario. 5.39. Simetría respecto del origen de coordenadas. 5.40. Homotecia con centro en el origen de coordenadas y coeficiente $k = 2$. 5.41. El giro en un ángulo $\pi/4$, en el sentido antihorario con la homotecia posterior de centro en el origen de coordenadas y coeficiente $1/\sqrt{2}$. 5.42. La reflexión respecto del eje real. 5.44. a) La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados. b) ● Hágase uso de la identidad a). 5.45. Semiplano $x \geqslant 0$. 5.46. Franja $0 \leqslant y < 1$. 5.47. Franja $|y| \leqslant 2$. 5.48. El interior de un círculo de radio 1 y centro en el origen de coordenadas. 5.49. Circunferencia $x^2 + (y + 1)^2 = 4$. 5.50. Anillo encerrado entre las circunferencias γ_1: $(x + 2)^2 + y^2 = 1$ y γ_2: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ (γ_1 no pertenece al anillo). 5.51. $D = \{(x, y) \mid y^2 > 1 - 2x\}$. 5.52. Una recta $2x + y + \frac{3}{2} = 0$. 5.53. Un sector limitado por los rayos $l_1 = \{(x, y) \mid y = 0, x \geqslant 0\}$ y $l_2 = \{(x, y) \mid y = x, x \geqslant 0\}$ (el rayo l_1 no pertenece al sector). 5.54. Un sector limitado por los rayos $l_1 = \{(x, y) \mid y = x, x < 0\}$ y $l_2 = \{(x, y) \mid y = -x, x \leqslant 0\}$.

5.55. Eje Ox. 5.57. $5e^{i\operatorname{arctg}\frac{24}{7}}$. 5.58. $13e^{i\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)}$.

5.59. $5e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi\right)}$. 5.60. $\sqrt{5}e^{i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}$.

5.61. $e^{i\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$. 5.62. $2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$ cuando $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} > 0$, $-2 \operatorname{sen} \times \frac{\alpha}{2} e^{i\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$ cuando $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} < 0$. 5.64. a) $24e^{-\frac{\pi i}{2}}$, $\frac{8}{3}$ b) $16e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. 5.67. $32i$. 5.68. 2. 5.69. $512(1 - i\sqrt{3})$ 5.70. $-\frac{1}{4}$. 5.72. a) $\frac{1}{4}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)$; b) $\frac{1}{4}(3 \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen} 3\varphi)$. 5.73. $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$. 5.74. $3 \operatorname{sen}\varphi - 4 \operatorname{sen}^3\varphi$. 5.75. $\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^4\varphi$. 5.76. $4 \operatorname{sen}\varphi \cos^3\varphi - 4\cos\varphi \operatorname{sen}^3\varphi$. 5.77. Las raíces de segundo grado de la unidad: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ las raíces de tercer grado de la unidad: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; las raíces de cuarto grado de la unidad: $z_1 = 1$ $z_2 = i$, $z_3 = -1$ $z_4 = -i$. 5.78. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. 5.79. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$. 5.80. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9}k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9}k\right)$, $k = 0, 1, \ldots, 8$. 5.81. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$. 5.82. $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$. 5.83. $\sqrt[10]{2}\left(\cos \times\right.$

$\times\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)\Big)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. 5.84. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. 5.85. $2\sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{5}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{(2k-1)\pi}{5}\right)\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. 5.87. $\dfrac{\mathrm{sen}\,\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}}$. 5.88. $\dfrac{\mathrm{sen}\,2n\varphi}{2\,\mathrm{sen}\,\varphi}$.

5.89. $\dfrac{\mathrm{sen}^2 n\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi}$. 5.90. $-1\pm 2i$. 5.91. $\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$. 5.92. $-2+i$, $-3+i$. 5.93. $1+i$, $2-3i$. 5.94. 1, $-\frac{1}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. 5.95. -1, $\frac{1}{2}\pm$ $\pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. 5.96. 1, -3, $-1\pm 2i$. 5.97. $(-1+\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$, $(-1,\ -\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$. 5.98. $z_{1,2}=z_{3,4}=\pm 3i$. 5.99. $\pm i$, $\pm\sqrt{3}i$. 5.100. $\pm 2i$; $\pm\sqrt{5}i$. 5.101. $\pm(1+i)$, $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)$. 5.102. $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, -1, $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, $-\sqrt[3]{3}$. 5.103. ± 1, $\pm i$, $\pm\sqrt{2}(1\pm i)$. 5.104. $x=\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha+\pi k}{n}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, donde $\alpha=\mathrm{arctg}\,a$. ● Hágase $a=\mathrm{tg}\,\alpha$, $x=\mathrm{tg}\,y$ y úsese la forma trigonométrica del número complejo. 5.105. $(z-1)(z+1)(z^2+1)$. 5.106. $(z^2-z\sqrt{2}+1)(z^2+z\sqrt{2}+1)$. 5.107. $(z^2-z+1)(z^2+z+1)$. 5.108. $(z^2+2z+2)(z^2+2z+5)$. 5.109. $(z-1)(z^2+z+1)^2$. 5.110. $(z^2-2z+5)(z^2+8z+20)$. 5.114. $2-i$. 5.115. -1. 5.116. $\frac{5}{3}i$. 5.117. $-\frac{7}{5}+\frac{14}{5}i$. 5.118. 1. 5.119. 0. 5.120. ∞. 5.121. ∞ 5.122. $\dfrac{-1-5i}{26}$. 5.123. $\frac{3}{10}(3+i)$. 5.124. $1+ie$. 5.125. $\dfrac{11+3i}{10}$. 5.126. $e^3(\cos 2+i\,\mathrm{sen}\,2)$. 5.135. 0. 5.136. 0. 5.137. $\dfrac{1}{1-z}$. 5.138. 0. 5.139. $\dfrac{1-z_2}{1-z_1}$.

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRA VECTORIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

§ 1. Álgebra vectorial

1. Operaciones lineales con los vectores. Se denomina *vector* $\boldsymbol{a}$ (*vector geométrico*) al conjunto de todos los segmentos dirigidos que tienen longitud y dirección iguales. De cualquier segmento $\overline{AB}$, perteneciente a dicho conjunto, suele decirse que representa un vector $\boldsymbol{a}$ (obtenido por aplicación del vector $\boldsymbol{a}$ al punto A). La longitud del segmento $\overline{AB}$ lleva el nombre de *longitud* (*módulo*) del vector $\boldsymbol{a}$ y se denota por el símbolo $|\boldsymbol{a}| = |AB|$. El vector de longitud nula se denomina *vector nulo* y se denota por el símbolo 0.

Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se denominan *iguales* ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$), si coinciden los conjuntos de segmentos dirigidos que representan dichos vectores.

En toda una serie de problemas resulta, a menudo, conveniente no distinguir el vector y cualquier segmento dirigido que lo representa. Precisamente en este sentido, por ejemplo, se debe entender la expresión «construir» un vector.

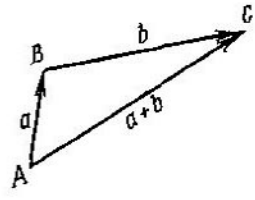


Fig. 10

Supongamos que el segmento dirigido $\overline{AB}$ representa el vector $\boldsymbol{a}$. Al aplicar al punto B el vector dado $\boldsymbol{b}$, obtendremos un segmento dirigido $\overline{BC}$. Un vector, representado por el segmento dirigido $\overline{AC}$ se llama suma de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y se designa $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (fig. 10).

Se llama *producto del vector* $\boldsymbol{a}$ *por un número real* λ al vector, denotado $\lambda\boldsymbol{a}$, tal que:

1) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$;

2) los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\lambda\boldsymbol{a}$ están orientados según la misma dirección cuando $\lambda > 0$, y tienen dirección opuesta cuando $\lambda < 0$.

1.1. Demuéstrese que la operación de adición de los vectores posee las siguientes propiedades:

a) $\boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}$;

b) $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1$ (*conmutatividad*);

c) $\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + \boldsymbol{a}_3$ (*asociatividad*);

d) $\forall a\ \exists!\ b\ (a + b = 0)$
(b se llama vector *opuesto* al vector a y se denota por el símbolo $-a$);

e) $\forall a_1,\ a_2 \exists!\ a_3\ (a_1 + a_3 = a_2)$
(a_3 se llama *diferencia* entre los vectores a_2 y a_1 y se denota por el símbolo $a_2 - a_1$).

1.2. Demuéstrense las igualdades:

a) $-a = (-1)\,a$; b) $a_2 - a_1 = a_2 + (-a_1)$;

c) $a = |a|\,a_0$, donde a_0 es un *versor* del vector a, es decir, un vector de longitud unidad y de la misma dirección que tiene el vector a $(a \neq 0)$.

1.3. En un paralelepípedo $ABCDA'B'C'D'$ los vectores m, n, p están representados por las aristas $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA'}$, respectivamente. Constrúyanse los vectores:

a) $m + n + p$; b) $1/2m + 1/2n - p$; c) $-m - n + 1/2p$.

1.4. Sean dados los vectores a_1 y a_2. Constrúyanse los vectores $3a_1$, $1/2a_2$, $a_1 + 2a_2$, $1/2a_1 - a_2$.

1.5. Demuéstrese que:

a) la operación de multiplicación del vector por un número posee las siguientes propiedades:

$$0a = \lambda 0 = 0, \quad (\lambda_1\lambda_2)\,a = \lambda_1\,(\lambda_2 a);$$

b) las operaciones de adición de los vectores y multiplicación de éstos por un número, están entrelazadas mediante las siguientes dos propiedades de *distributividad*:

$$\lambda\,(a_1 + a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2 \ \text{ y } \ (\lambda_1 + \lambda_2)\,a = \lambda_1 a + \lambda_2 a.$$

1.6. Demuéstrense las igualdades:

a) $a + {}^1/_2\,(b - a) = {}^1/_2\,(a + b)$; b) $a - {}^1/_2\,(a + b) = {}^1/_2\,(a - b)$. ¿Cuál es su significado geométrico?

1.7. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son las medianas del triángulo ABC. Demuéstrese la igualdad $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = 0$.

1.8. En el paralelogramo $ABCD$ se designan: $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$. Exprésense en términos de a y b los vectores $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ y $\overline{MD}$, donde M es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo.

1.9. $ABCDEF$ es un hexágono regular, siendo $\overline{AB} = p$, $\overline{BC} = q$. Exprésense en términos de p y q los vectores $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$.

1.10. M es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC, O es un punto arbitrario del espacio. Demuéstrese la igualdad $\overrightarrow{OM} = {}^1/_3\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

1.11. En un espacio están dados los triángulos ABC y $A'B'C'$; M y M' son los puntos de intersección de sus medianas. Exprésense el vector $\overrightarrow{MM'}$ mediante los vectores $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{CC'}$.

1.12. E y F son los puntos medios de los lados $[AD]$ y $[BC]$ del cuadrilátero $ABCD$. Demuéstrese que $\overrightarrow{EF} = {}^1/_2\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$. Dedúzcase de aquí el teorema de la línea media de un trapecio.

1.13. En el trapecio $ABCD$ la razón entre la longitud de la base $[AD]$ y la de la base $[BC]$ equivale a λ. Suponiendo $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}$ y $\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b}$, exprésense los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$ por medio de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Un sistema de vectores $a_1, \ldots, a_n$ se llama *linealmente dependiente*, si existen tales números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que por lo menos uno de ellos es distinto de cero y $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$. En el caso contrario el sistema es linealmente independiente.

1.14. Demuéstrense los siguientes criterios geométricos de la dependencia lineal:

a) el sistema $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ es linealmente dependiente cuando, y sólo cuando, los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ son *colineales*, es decir, sus direcciones coinciden o bien son opuestas;

b) el sistema $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ es linealmente dependiente cuando, y sólo cuando, los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$ son *coplanares*, esto es, son paralelos a cierto plano;

c) todo sistema de $n \geqslant 4$ vectores es linealmente dependiente.

1.15. En el lado $[AD]$ del paralelogramo $ABCD$ está marcado un vector $\overrightarrow{AK}$ de longitud $|\overrightarrow{AK}| = {}^1/_5\,|\overrightarrow{AD}|$, y en la diagonal $[AC]$, un vector $\overrightarrow{AL}$ de longitud $|\overrightarrow{AL}| = {}^1/_6\,|\overrightarrow{AC}|$. Demuéstrese que los vectores $\overrightarrow{KL}$ y $\overrightarrow{LB}$ son colineales y hállese tal λ que se verifique $\overrightarrow{KL} = \lambda \cdot \overrightarrow{LB}$.

1.16. Demuéstrese que para cualesquiera vectores dados $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ los vectores $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ son coplanares.

1.17. Sean dados tres vectores no coplanares $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Demuéstrese que los vectores $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$ son coplanares.

1.18. Sean dados tres vectores no coplanares a, b y c. Calcúlese los valores de λ, para los cuales los vectores $\lambda a + b + c$, $a + \lambda b + c$, $a + b + \lambda c$ son coplanares.

1.19. Sean dados tres vectores no coplanares a, b y c. Calcúlense los valores de λ y μ, para los cuales los vectores $\lambda a + \mu b + c$ y $a + \lambda b + \mu c$ son colineales.

2. Base y coordenadas de un vector. Una terna ordenada de vectores no coplanares e_1, e_2, e_3 lleva el nombre de *base* en el conjunto de todos los vectores geométricos. Todo vector geométrico a puede ser representado unívocamente en la forma

$$a = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3; \tag{1}$$

los números X_1, X_2, X_3 se denominan *coordenadas* del vector a en la base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$. La notación (1) se denomina, además, descomposición del vector a según la base $\mathfrak{B}$.

Análogamente, un par ordenado de vectores no colineales e_1, e_2 se llama base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2)$ en un conjunto de vectores geométricos coplanares respecto a cierto plano.

Por fin, todo vector no nulo e forma una base $\mathfrak{B} = (e)$ en un conjunto de todos los vectores geométricos colineales con relación a cierta dirección.

Si el vector a es una *combinación lineal* de los vectores $a_1, \ldots, a_n$ con coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, es decir,

$$a = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k,$$

entonces cada coordenada $X_i(a)$ del vector a es igual a la suma de productos de los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ por las coordenadas homónimas de los vectores $a_1, \ldots, a_n$:

$$X_i(a) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_i(a_k), \qquad i = 1, 2, 3.$$

La base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ se llama rectangular, si los vectores e_1, e_2 y e_3 son perpendiculares dos a dos y tienen longitud unidad. En este caso se han adoptado las siguientes designaciones

$$e_1 = i, \quad e_2 = j, \quad e_3 = k. \tag{2}$$

Se denomina *proyección* del vector a sobre el vector e el número $\mathrm{pr}_e a = |a| \cos \varphi$, donde $\varphi = \widehat{(a, e)}$ es el ángulo formado por los vectores a y e $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

Las coordenadas X, Y, Z del vector a en la base rectangular coinciden con las proyecciones del vector a sobre los versores básicos i, j, k, respectivamente, mientras que la longitud del vector a es igual a

$$|a| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{3}$$

Los números

$$\cos\alpha = \cos\widehat{(a,\ i)} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\beta = \cos\widehat{(a,\ j)} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos\widehat{(a,\ k)} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

reciben el nombre de *cosenos directores* del vector a.

1.20. Sea dado el tetraedro $OABC$. En la base de las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ hállense las coordenadas:

a) del vector $\overline{DE}$, donde D y E son los puntos medios de las aristas $\overline{OA}$ y $\overline{BC}$;

b) del vector $\overline{OF}$, donde F es el punto de intersección de las medianas de la base ABC.

1.21. En el tetraedro $OABC$ la mediana $[AL]$ de la arista ABC se divide por el punto M en la razón $|\overline{AM}| : |\overline{ML}| = 3 : 7$. Hállense las coordenadas del vector $\overline{OM}$ en la base de las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$.

1.22. Fuera del plano del paralelogramo $ABCD$ se ha elegido un punto O. En la base de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ hállense las coordenadas:

a) del vector $\overline{OM}$, donde M es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo;

b) del vector $\overline{OK}$, donde K es el punto medio del lado $[AD]$.

1.23. En el trapecio $ABCD$ se conoce la razón entre las longitudes de las bases: $|\overline{AB}|/|\overline{CD}| = \lambda$. Hállense las coordenadas del vector $\overline{CB}$ en la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.

En lo sucesivo los vectores vienen representados, siempre que no se diga lo contrario, por sus coordenadas en cierta base rectangular. La notación $a\ (X, Y, Z)$ quiere decir que las coordenadas del vector a son iguales a X, Y, Z, es decir, $a = Xi + Yj + Zk$.

1.24. Sean dados los vectores $a_1\ (-1, 2, 0)$, $a_2\ (3, 1, 1)$, $a_3\ (2, 0, 1)$ y $a = a_1 - 2a_2 + 1/3a_3$. Calcúlense:

a) $|\boldsymbol{a}_1|$ y las coordenadas del versor $\boldsymbol{a}_{1,0}$ del vector $\boldsymbol{a}_1$;

b) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{j}})$;

c) la coordenada X del vector $\boldsymbol{a}$;

d) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}$.

1.25. Sean dados los vectores $\boldsymbol{e}(-1, 1, {}^1/_2)$ y $\boldsymbol{a}(2, -2, -1)$. Convénzase de que son colineales y hállese la descomposición del vector $\boldsymbol{a}$ según la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e})$.

1.26. En un plano están dados los vectores $\boldsymbol{e}_1(-1, 2)$, $\boldsymbol{e}_2(2, 1)$ y $\boldsymbol{a}(0, -2)$. Convénzase de que $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ es una base en el conjunto de todos los vectores en el plano. Constrúyanse los vectores dados y hállese la descomposición del vector $\boldsymbol{a}$ según la base $\mathfrak{B}$.

1.27. Sea dada una terna de vectores no coplanares $\boldsymbol{e}_1(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2(1, 1, 0)$ y $\boldsymbol{e}_3(1, 1, 1)$. Calcúlense las coordenadas del vector $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$ en la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ y escríbase la descomposición correspondiente según la base.

1.28. Sean dados los vectores $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Hállense:

a) las coordenadas del versor $\boldsymbol{a}_0$;

b) las coordenadas del vector $\boldsymbol{a} - {}^1/_2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$;

c) la descomposición del vector $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$ según la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$;

d) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

1.29. Hállese el vector $\boldsymbol{x}$, colineal al vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, que forma con el versor $\boldsymbol{j}$ un ángulo agudo y cuya longitud es $|\boldsymbol{x}| = 15$.

1.30. Hállese el vector $\boldsymbol{x}$ que forma con todos los tres versores básicos ángulos agudos iguales, si $|\boldsymbol{x}| = 2\sqrt{3}$.

1.31. Hállese el vector $\boldsymbol{x}$ que forma con el versor $\boldsymbol{j}$ un ángulo de 60° y con el versor $\boldsymbol{k}$, un ángulo de 120°, si $|\boldsymbol{x}| = 5\sqrt{2}$.

1.32. ¿Para qué valores de α y β los vectores $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \alpha\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{b} = \beta\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ son colineales?

1.33.* Hállese el vector $\boldsymbol{x}$, dirigido a lo largo de la bisectriz del ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a} = 7\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, si $|\boldsymbol{x}| = 5\sqrt{6}$.

1.34. Sean dados los vectores: $\boldsymbol{a}(1, 5, 3)$, $\boldsymbol{b}(6, -4, -2)$, $\boldsymbol{c}(0, -5, 7)$ y $\boldsymbol{d}(-20, 27, -35)$. Se requiere elegir los números α, β y γ de tal modo que los vectores $\alpha\boldsymbol{a}$, $\beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ formen una línea quebrada cerrada, si el «origen» de cada vector sucesivo se hace coincidir con el «extremo» del anterior.

3. Coordenadas rectangulares cartesianas de un punto. Problemas clementales de la geometría analítica. Dicen que en un espacio tridimensional está introducido un *sistema de coordenadas rectangulares cartesianas* $\langle O, \mathfrak{B}\rangle$, si se han dado:

1) cierto punto O, llamado *origen de coordenadas*;

2) cierta base rectangular $\mathfrak{B} = (i, j, k)$ en el conjunto de todos los vectores geométricos.

Los ejes Ox, Oy y Oz, trazados por el punto O en dirección de los versores básicos i, j, y k, se llaman *ejes coordenados* del sistema de coordenadas $\langle O, \mathfrak{B}\rangle = Oxyz$.

Si M es un punto arbitrario del espacio, entonces el segmento dirigido $\overline{OM}$ se denomina *radio vector* del punto M. Se llaman *coordenadas del punto* M en el sistema $\langle O, \mathfrak{B}\rangle$ las coordenadas de su radio vector OM como vector geométrico en la base $\mathfrak{B}$, es decir,

$$x(M) = X(\overline{OM}), \quad y(M) = Y(\overline{OM}), \quad z(M) = Z(\overline{OM}).$$

Si $M_1(x_1, y_1, z_1)$ y $M_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos arbitrarios en el espacio, entonces las coordenadas del vector $\overline{M_1M_2}$ son iguales a

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1. \tag{4}$$

De aquí, en virtud de (3), la distancia entre los puntos se expresa según la fórmula

$$\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Al resolver los problemas de la geometría analítica es conveniente emplear al máximo los métodos del álgebra vectorial.

EJEMPLO 1. Sean dados los vértices A (1, 0, —1), B (2, 2, 1) y el punto E (—1, 2, 1) en el que se cortan las medianas del triángulo ABC. Hállense las coordenadas del vértice C.

◀ Por cuanto las coordenadas del vértice A están prefijadas, para calcular las coordenadas del vértice C basta hallar las coordenadas del vector $\overline{AC}$. Sea $\overline{BF}$ una mediana trazada desde el vértice B. En este caso

$$\overline{AC} = 2\overline{AF} = 2(\overline{BA} + \overline{BF}) = 2\left(\overline{AB} + \frac{3}{2}\overline{BE}\right) \tag{5}$$

(se ha utilizado aquí el hecho de que el punto E divide la mediana BF en razón de 2 : 1). Luego, partiendo de las condiciones de problema, calculamos, con ayuda de la fórmula (4), las coordenadas de los vectores $\overline{AB}$ (1, 2, 2) y $\overline{BE}$ (—3, 0, 0), de donde, en virtud de la (5), obtenemos $\overline{AC}$ (—7, 4, 4) y, finalmente, aplicando nuevamente la fórmula 4), encontramos las coordenadas del punto C:

$$x(C) = x(A) + X(\overline{AC}) = -6;$$

$$y(C) = y(A) + Y(\overline{AC}) = 4;$$

$$z(C) = z(A) + Z(\overline{AC}) = 3. \blacktriangleright$$

Supongamos que en la recta l están dados los punto M_1, M_2 y M, con la particularidad de que $M_1 \neq M_2$. Veamos los vectores $\overline{M_1M}$ y $\overline{MM_2}$. Puesto que son colineales, se encontrará tal número real λ que

$\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$. El número λ se llama *razón*, en la cual el punto M divide el segmento dirigido $\overline{M_1M_2}$; además este número es positivo, si el punto M se dispone dentro del segmento $\overline{M_1M_2}$, negativo (y $\lambda \neq -1$), si M se dispone fuera del segmento $\overline{M_1M_2}$, y es igual a cero, si $M = M_1$.

EJEMPLO 2. Sabiendo las coordenadas de los puntos $M_1(x_1, y_1, z_1)$ y $M_2(x_2, y_2, z_2)$ y la razón λ, en la que el punto M divide el segmento dirigido $\overline{M_1M_2}$, hállense las coordenadas del punto M.

◀ Sea O el origen de coordenadas. Designemos: $\overline{OM_1} = r_1$, $\overline{OM_2} = r_2$, $\overline{OM} = r$. Como

$$\overline{M_1M} = r - r_1, \quad \overline{MM_2} = r_2 - r,$$

entonces

$$r - r_1 = \lambda (r_2 - r),$$

de donde (puesto que $\lambda \neq -1$)

$$r = \frac{r_1 + \lambda r_2}{1 + \lambda}.$$

La fórmula obtenida nos da precisamente la solución del problema en la forma vectorial. Pasando en esta fórmula a las coordenadas, obtendremos

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \blacktriangleright \qquad (6)$$

1.35. El punto M (1, —5, 5) viene dado mediante sus coordenadas en un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas $\langle O, \mathfrak{B} = (i, j, k) \rangle$. Hállense las coordenadas de este punto en el sistema $\langle O', \mathfrak{B}' = (i', j', k') \rangle$, si

a) $\overline{OO'} = -2i + j - k$ y $i' = i$, $j' = j$; $k' = k$;

b) $O' = O$ e $i' = -j$, $j' = k$, $k' = i$;

c) $\overline{OO'} = j$ e $i' = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$, $j' = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $k' = k$

(hay que convencerse previamente de que $\mathfrak{B}'$ es una base rectangular).

1.36. Sean dados tres vértices A (3, —4, 7), B (—5, 3, —2) y C (1, 2, —3) del paralelogramo $ABCD$. Hállese su cuarto vértice D, opuesto a B.

1.37. Sean dados dos vértices adyacentes del paralelogramo A (—2, 6), B (2, 8) y el punto de intersección de sus diagonales M (2, 2). Hállense dos vértices restantes.

1.38. Hállese en el eje de abscisas el punto M cuya distancia hasta el punto A (3, —3) es igual a 5.

1.39. Hállese en el eje de ordenadas el punto M equidistante respecto de los puntos A (1, —4, 7) y B (5, 6, —5).

1.40. Sean dados los vértices del triángulo A (3, —1, 5), B (4, 2, —5) y C (—4, 0, 3). Hállese la longitud de la mediana trazada desde el vértice A.

1.41. Un segmento, cuyos extremos se encuentran en los puntos A (3, —2) y B (6, 4), está dividido en tres partes iguales. Hállense las coordenadas de los puntos de división.

1.42. Determínense las coordenadas de los extremos de un segmento que está dividido en tres partes iguales mediante los puntos C (2, 0, 2) y D (5, —2, 0).

1.43.* Sean dados los puntos A (1, 2, 3), B (2, —2, 1), C (3, 0, 3) y D (16, 10, 18). E es un punto de intersección del plano OAB (O es el origen de coordenadas) con una recta trazada por el punto D paralelamente a la recta (OC). Hállense las coordenadas del punto E.

1.44.* Sean dados los puntos A (2, 5, 2) y B (14, 5, 4); C es el punto de intersección del plano coordenado Oxy con una recta trazada por el punto B paralelamente a la recta (OA). Hállense las coordenadas del punto C.

1.45. Sean dados los vértices del triángulo A (1, —1, —3), B (2, 1, —2) y C (—5, 2, —6). Calcúlese la longitud de la bisectriz de su ángulo interior en el vértice A.

◀ Hallemos la descomposición del vector $\overline{AE}$ según la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Sea $e_1 = \overline{AB}/|\overline{AB}|$ y $e_2 = \overline{AC}/|\overline{AC}|$ los versores de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Entonces, el vector $\overline{AE}$ tiene igual orientación con el vector $e = e_1 + e_2$ (compárese con el problema 1.33), es decir, existe un número $\lambda > 0$ tal que

$$\overline{AE} = \lambda e = \lambda \left(\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} \right). \tag{7}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \overline{AF} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AC} + \mu \overline{CB} = AC + \mu (\overline{AB} - \overline{AC}) = \\ = \mu \overline{AB} + (1 - \mu) \overline{AC}, \quad \mu > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Las fórmulas (7) y (8) representan en sí dos descomposiciones del vector $\overline{AE}$ según la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Siendo única la descomposición de un vector según la base, se tiene

$$\frac{\lambda}{|\overline{AB}|} = \mu \quad \text{y} \quad \frac{\lambda}{|\overline{AC}|} = 1 - \mu. \tag{9}$$

Al resolver el sistema (9), hallamos

$$\lambda = \frac{1}{1/|\overline{AC}| + 1/|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}{|\overline{AB}| + |\overline{AC}|},$$

así que la fórmula (7) adquiere la forma

$$\overrightarrow{AE} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} + \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}. \qquad (10)$$

De las condiciones del problema hallamos:

$\overrightarrow{AB}(1, 2, 1)$ y $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC}(-6, 3, -3)$ y $|\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{6}$, y en virtud de (10), obtenemos

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

de donde

$$\overrightarrow{AE}\left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, 0\right) \quad y \quad |\overrightarrow{AE}| = \frac{3}{4}\sqrt{10}. \blacktriangleright$$

1.46. Un triángulo viene dado por las coordenadas de sus vértices A (3, −2, 1), B (3, 1, 5), C (4, 0, 3). Calcúlese la distancia entre el origen de coordenadas y el punto de intersección de las medianas de este triángulo.

1.47. Sean dados los vértices de un triángulo A (1, 0, 2), B (1, 2, 2) y C (5, 4, 6). El punto L divide el segmento $\overline{AC}$ en la razón $\lambda = {}^1/_3$, $[CE]$ es la mediana trazada desde el vértice C. Hállense las coordenadas del punto M, donde se cortan las rectas (BL) y (CE).

4. **Producto escalar de vectores.** Se denomina *producto escalar* de los vectores no nulos a_1 y a_2 el número

$$(a_1, a_2) = |a_1| \, |a_2| \cos(a_1, a_2).$$

A la par con la designación (a_1, a_2), para el producto escalar se usa también la designación a_1a_2.

Propiedades geométricas del producto escalar:

1) $a_1 \perp a_2 \Leftrightarrow a_1a_2 = 0$ (*condición de perpendicularidad de los vectores*);

2) si $\varphi = (a_1, a_2)$, entonces $0 \leqslant \varphi < \pi/2 \Leftrightarrow a_1a_2 > 0$ y $\pi/2 < \varphi \leqslant \pi \Leftrightarrow a_1a_2 < 0$.

Propiedades algebraicas del producto escalar:

1) $a_1a_2 = a_2a_1$;

2) $(\lambda a_1)\, a_2 = \lambda\,(a_1a_1)$;

3) $a\,(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2$.

Si los vectores a_1 (X_1, Y_1, Z_1) y a_2 (X_2, Y_2, Z_2) están representados por sus coordenadas en una base rectangular, el producto escalar será

$$a_1a_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

De esta fórmula se deduce, en particular, otra fórmula que se destina para determinar el coseno del ángulo formado por los vectores

$$\cos\widehat{(a_1, a_2)} = \frac{a_1a_2}{|a_1|\,|a_2|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

1.48. Demuéstrense las propiedades algebraicas del producto escalar.

1.49. $|a_1| = 3$, $|a_2| = 4$, $(\widehat{a_1, a_2}) = 2\pi/3$. Calcúlense: a) $a_1^2 = a_1 a_1$; b) $(3a_1 - 2a_2)(a_1 + 2a_2)$; c) $(a_1 + a_2)^2$

1.50. $|a_1| = 3$, $|a_2| = 5$. Determínese para qué valor de α los vectores $a_1 + \alpha a_2$ y $a_1 - \alpha a_2$ serán perpendiculares.

1.51. Hállese el ángulo, formado por los vectores unidad e_1 y e_2, si se sabe que los vectores $a = e_1 + 2e_2$ y $b = 5e_1 - 4e_2$ son perpendiculares.

1.52. Hállese el ángulo α del vértice de un triángulo isósceles, sabiendo que las medianas trazadas desde los extremos de la base de dicho triángulo son recíprocamente perpendiculares.

1.53. Al vértice de un cubo están aplicadas tres fuerzas cuya magnitud es 1, 2, 3, dirigidas a lo largo de las diagonales de las caras del cubo que se intersecan en dicho vértice. Hállese la magnitud de la resultante de las tres fuerzas mencionadas.

1.54. Sean dados un rectángulo $ABCD$ y un punto arbitrario M dispuesto fuera de dicho rectángulo. Demuéstrese la igualdad $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$. Dedúzcase de aquí que $|\overline{MA}|^2 + |\overline{MC}|^2 = |\overline{MB}|^2 + |\overline{MD}|^2$.

1.55. $ABCD$ es un trapecio isósceles, $\overline{AB} = a$ es la base, $\overline{AD} = b$, el lado lateral, y el ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ es igual a $\pi/3$. Exprésense en términos de a y b los vectores $\overline{DC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$.

1.56. Sabiendo que $|a| = 3$, $|b| = 1$, $|c| = 4$ y $a + b + c = 0$, calcúlese la suma $ab + bc + ca$.

1.57. Sean dados los vectores a_1 (4, —2, —4) y a_2 (6, —3, 2). Calcúlense:

a) $a_1 a_2$; b) $(2a_1 - 3a_2)(a_1 + 2a_2)$; c) $(a_1 - a_2)^2$;

d) $|2a_1 - a_2|$; e) $\mathrm{pr}_{a_1} a_2$; f) $\mathrm{pr}_{a_2} a_1$;

g) los cosenos directores del vector a_1;

h) $\mathrm{pr}_{a_1 + a_2}(a_1 - 2a_2)$; i) el $\cos(\widehat{a_1, a_2})$.

1.58. Sean dados los puntos A (2, 2) y B (5, —2). Hállese en el eje de abscisas tal punto M que $\widehat{AMB} = \pi/2$.

1.59. Hállense las longitudes de los lados y las magnitudes de los ángulos de un triángulo cuyos vértices son A (—1, —2, 4), B (—4, —2, 0) y C (3, —2, 1).

1.60. Demuéstrese que un cuadrilátero con los vértices A (—3, 5, 6), B (1, —5, 7), C (8, —3, —1) y D (4, 7, —2) es un cuadrado.

1.61. Hállese el coseno del ángulo φ entre las diagonales (AC) y (BD) de un paralelogramo, si están dados tres vértices de él: A (2, 1, 3), B (5, 2, —1) y C (—3, 3, —3).

1.62. Calcúlese el trabajo de la fuerza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ al trasladarse un punto material de la posicion A (—1, 2, 0) a la B (2, 1, 3).

1.63. Sean dados los vectores $\boldsymbol{a}$ (1, 1) y $\boldsymbol{b}$ (1, —1). Determínese el coseno del ángulo entre los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ que satisfacen el sistema de ecuaciones $2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$.

1.64. Los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ tienen longitudes iguales y forman dos a dos ángulos iguales. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{c}$, si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

◀ Si $\boldsymbol{c} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$, entonces, de las condiciones del problema se deduce que el vector $\boldsymbol{c}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\boldsymbol{ca} = X + Y = \boldsymbol{ab} = 1;$$
$$\boldsymbol{cb} = Y + Z = \boldsymbol{ab} = 1;$$
$$|\boldsymbol{c}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = |\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 = 2.$$

Resolviendo este sistema, hallamos que $X_1 = -1/3$, $Y_1 = 4/3$, $Z_1 = -1/3$ o bien $X_2 = 1$, $Y_2 = 0$, $Z_2 = 1$. ▶

1.65. Los rayos $[OA)$, $[OB)$, y $[OC)$ forman dos a dos ángulos iguales cuya magnitud es $\pi/3$. Hállese el ángulo entre las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$.

1.66. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$, que es colineal con el vector $\boldsymbol{a}$ (2, 1, —1) y satisface la condición $\boldsymbol{ax} = 3$.

1.67. El vector $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}_1$ (2, 3, —1) y $\boldsymbol{a}_2$ (1, —2, 3) y satisface la condición $\boldsymbol{x}(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = -6$. Hállense las coordenadas de $\boldsymbol{x}$.

Si se da cierto vector $\boldsymbol{e}$, entonces se llama *componente ortogonal* del vector arbitrario $\boldsymbol{a}$ *a lo largo del vector* $\boldsymbol{e}$ al vector $\boldsymbol{a}_e$, colineal con $\boldsymbol{e}$, con la particularidad de que la diferencia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_e$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{e}$.

Por analogía, se llama *componente ortogonal* del vector $\boldsymbol{a}$ *en el plano* P el vector $\boldsymbol{a}_P$, coplanar con el plano P, con la particularidad de que la diferencia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_P$ es perpendicular a dicho plano.

1.68. Hállense, para el vector $\boldsymbol{a}$ (—1, 2, 1), el componente ortogonal a lo largo del versor básico $\boldsymbol{j}$ y el componente ortogonal en el plano de los vectores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{k}$.

1.69. Se dan los vectores $e\,(1, 1, 1)$ y $a\,(-1, 2, 1)$. Hállense:

a) el componente ortogonal del vector a a lo largo del vector e;

b) el componente ortogonal del vector a en el plano P que es perpendicular al vector e.

1.70. Se dan los vértices de un triángulo $A\,(-1, -2, 4)$, $B\,(-4, -1, 2)$ y $C\,(-5, 6, -4)$; $[BD]$ es la altura del triángulo trazada por el vértice B. Hállense las coordenadas del punto D.

1.71*. Se dan los vectores $e_1\,(1, -2, 0)$, $e_2\,(1, 1, 1)$ y $a\,(-2, 0, 1)$. Hállese el componente ortogonal a_{e_1, e_2} del vector a en el plano de los vectores e_1 y e_2.

Si la base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ es rectangular, entonces las coordenadas de un vector arbitrario $a = X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3$ en esta base pueden calcularse según la fórmula

$$X_i = ea_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11$$

En particular, la fórmula (11) permite establecer fácilmente la relación que existe entre las coordenadas de un mismo vector en distintas bases rectangulares.

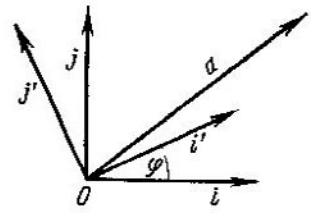


Fig. 11

EJEMPLO 3. Supongamos que la base $\mathfrak{B}' = (i', j')$ se ha obtenido de la base $\mathfrak{B} = (i, j)$ girando la última alrededor del punto O en un ángulo φ ($\varphi > 0$, si el giro se realiza en el sentido antihorario, $\varphi < 0$, en el caso contrario) (fig. 11). Establézcase la relación que existe entre las coordenadas del vector a en las bases $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$.

◀ Sea $a = Xi + Yj$. En este caso

$$X' = ai' = Xii' + Yji', \quad (12)$$
$$Y' = aj' = Xij' + Yjj'.$$

Por otra parte, tenemos:

$$ii' = \cos\varphi, \quad ji' = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{sen}\varphi,$$

$$ij' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \operatorname{sen}\varphi, \quad jj' = \cos\varphi,$$

Por eso las fórmulas de transformación de las coordenadas (12) toman la forma

$$X' = X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi,$$
$$Y' = X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi. \blacktriangleright$$

1.72. Dedúzcanse las fórmulas de transformación de las coordenadas de los puntos de un plano al pasar del sistema de coordenadas $\langle O, \mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})\rangle$ al sistema $\langle O'\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')\rangle$, si $\overrightarrow{OO'} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j}$, y la base $\mathfrak{B}'$ se ha obtenido de la base $\mathfrak{B}$ girándola en un ángulo φ en torno al punto O.

1.73. Escríbanse las fórmulas de transformación de las coordenadas de los vectores al pasar de la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ a la base $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$, si

$$\boldsymbol{i}' = \cos\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j}' = -\operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \cos\varphi\cdot\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}.$$

1.74. En la base rectangular $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ el vector $\boldsymbol{a}$ se descompone en $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Convénzase de que la terna de vectores

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{k}$$

forma también una base rectangular $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$; hállense en dicha base las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$.

1.75. Sea dada una terna no coplanar de vectores $\boldsymbol{e}_1$ (1, —2, 0), $\boldsymbol{e}_2$ (0, 1, 1) y $\boldsymbol{e}_3$ (1, 2, 2) que forma una base oblicuángula (¡compruébese!). Los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ en dicha base se descomponen en $\boldsymbol{a}_1 = X_1^{(1)}\boldsymbol{e}_1 + X_2^{(1)}\boldsymbol{e}_2 + X_3^{(1)}\boldsymbol{e}_3$ y $\boldsymbol{a}_2 = X_1^{(2)}\boldsymbol{e}_1 + X_2^{(2)}\boldsymbol{e}_2 + X_3^{(2)}\boldsymbol{e}_3$. Exprésese el producto escalar $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ en términos de las coordenadas de los vectores en esta base.

5. Producto vectorial de vectores. Una terna ordenada de vectores no coplanares $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ se llama *derecha*, si para un observador ubicado dentro del ángulo sólido formado por dichos vectores, el giro más corto de $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$ y de $\boldsymbol{e}_2$ a $\boldsymbol{e}_3$ parece realizarse en el sentido antihorario. En el caso contrario la terna $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ se denomina *izquierda*.

Se llama *producto vectorial* del vector $\boldsymbol{a}_1$ por el vector $\boldsymbol{a}_2$ el vector, denotado por el símbolo $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ (o bien $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$), que se define mediante las siguientes tres condiciones:

1) la longitud del vector $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ es igual al área de un paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$, es decir, $|\,[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\,| = |\,\boldsymbol{a}_1\,|\cdot|\,\boldsymbol{a}_2\,|\,\operatorname{sen}(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$;

2) el vector $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ es perpendicular al plano de vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$;

3) una terna ordenada $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ es derecha.

De la definición del producto vectorial proviene que

$$\boldsymbol{a}_1 \parallel \boldsymbol{a}_2 \Leftrightarrow [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = 0.$$

Las propiedades algebraicas del producto vectorial:

1) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = -[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1]$;

2) $[\lambda a_1, a_2] = \lambda [a_1, a_2]$;
3) $[a_1 + a_2, b] = [a_1, b] + [a_2, b]$,

Si $a_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ y $a_2 (X_2, Y_2, Z_2)$ son los vectores dados por sus coordenadas en la base rectangular derecha, entonces la descomposición del producto vectorial en la misma base se expresa

$$[a_1, a_2] = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\, i + (Z_1X_2 - X_1Z_2)\, j + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\, k,$$

o bien, en la notación simbólica (aplicando el concepto de determinante de tercer orden; véase § 1, cap. 3)

$$[a_1, a_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

1.76. $|a_1| = 1$, $|a_2| = 2$ y $(\widehat{a_1, a_2}) = 2\pi/3$. Calcúlense:
a) $|[a_1, a_2]|$; b) $|[2a_1 + a_2, a_1 + 2a_2]|$;
c) $|[a_1 + 3a_2, 3a_1 - a_2]|$.

1.77. ¿Qué condición deben satisfacer los vectores a_1 y a_2 para que los vectores $a_1 + a_2$ y $a_1 - a_2$ sean colineales?

1.78. Simplifíquense las expresiones:
a) $[i, j + k] - [j, i + k] + [k, i + j + k]$,
b) $[a + b + c, c] + [a + b + c, b] + [b - c, a]$,
c) $[2a + b, c - a] + [b + c, a + b]$,
d) $2i\,[j, k] + 3j\,[i, k] + 4k\,[i, j]$.

1.79. Demuéstrese que $[a - b, a + b] = 2[a, b]$ y acláre se el sentido geométrico de esta identidad.

1.80. $|a| = |b| = 5$, $(\widehat{a, b}) = \pi/4$. Calcúlese el área de un triángulo construido sobre los vectores $a - 2b$ y $3a + 2b$.

1.81. Los vectores a, b y c están asociados mediante la condición $a + b + c = 0$. Demuéstrese que $[a, b] = [b, c] = [c, a]$. ¿Cuál es el sentido geométrico de este resultado?

1.82. Demuéstrese que para cualesquiera vectores a, p, q y r los vectores $[a, p]$, $[a, q]$ y $[a, r]$ son coplanares.

1.83. $|a| = 2$, $|b| = 5$, $(\widehat{a, b}) = \pi/6$. Exprésese a través de los vectores a y b el vector unidad c_0, perpendicular a los vectores a y b, y tal que:
a) la terna (a, b, c_0) sea derecha;
b) la terna (b, c_0, a) sea izquierda.

1.84. Sean dados los vectores a_1 (3, —1, 2) y a_2 (1, 2, —1). Hállense las coordenadas de los vectores:
a) $[a_1, a_2]$; b) $[2a_1 + a_2, a_2]$; c) $[2a_1 - a_2, 2a_1 + a_2]$.

1.85. Calcúlese el área de un triángulo cuyos vértices son $A\,(1, 1, 1)$, $B\,(2, 3, 4)$ y $C\,(4, 3, 2)$.

1.86. En un triángulo con los vértices $A\,(1, -1, 2)$, $B\,(5, -6, 2)$ y $C\,(1, 3, -1)$ hállese la altura $h = |\overrightarrow{BD}|$.

1.87. Tres vectores no nulos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ están ligados entre sí mediante las relaciones $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Hállense las longitudes de estos vectores y los ángulos entre ellos.

1.88. La fuerza $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ está aplicada al punto $A\,(4, -2, 3)$. Determínese el momento de esta fuerza respecto al punto $O\,(3, 2, -1)$.

1.89. Sean dadas tres fuerzas: $\boldsymbol{F}_1\,(2, -1, -3)$, $\boldsymbol{F}_2\,(3, 2, -1)$ y $\boldsymbol{F}_3\,(-4, 1, 3)$ aplicadas al punto $A\,(-1, 4, 2)$. Determínense la magnitud y los cosenos directores del momento de la resultante de dichas fuerzas respecto del punto $O\,(2, 3, -1)$.

1.90. Calcúlese el área de un paralelogramo cuyas diagonales son vectores $2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ y $4\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2$, donde $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ son los vectores unidad y $(\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}) = \pi/4$.

1.91. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$, si se sabe que éste es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}_1\,(4, -2, -3)$ y $\boldsymbol{a}_2\,(0, 1, 3)$, forma con el versor $\boldsymbol{j}$ un ángulo obtuso y que $|\boldsymbol{x}| = 26$.

1.92. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$, si éste es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}_1\,(2, -3, 1)$ y $\boldsymbol{a}_2\,(1, -2, 3)$ y satisface, además, la condición $\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) = 10$.

1.93. ¿En qué condiciones la ecuación $\boldsymbol{a}_2 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}]$ tiene solución respecto de $\boldsymbol{x}$? ¿Cuántas soluciones existen?

1.94. Hállese el componente del vector $\boldsymbol{a}\,(-1, 2, 0)$ que sea perpendicular al plano de los vectores $\boldsymbol{e}_1\,(1, 0, 1)$ y $\boldsymbol{e}_2\,(1, 1, 1)$.

1.95. ¿Cómo variará la expresión (13), si prefijamos las coordenadas de los vectores en la base rectangular izquierda? ¿Será válida esta fórmula para el caso de una base oblicuángula?

1.96*. El vector $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$ se llama *producto vectorial doble* de los vectores dados. Demuéstrese que se verifica la igualdad

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

6. Producto mixto de vectores. Se denomina *producto mixto* de una terna ordenada de vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ al número $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\,\boldsymbol{a}_3$.

Las propiedades geométricas del producto mixto son:

1) si V es el volumen de un paralelepípedo construido sobre los vectores a_1, a_2 y a_3, entonces

$$[a_1, a_2]\, a_3 = \begin{cases} V, \text{ si la terna } (a_1, a_2, a_3) \text{ es} \\ \text{derecha,} \\ -V, \text{ si la terna } (a_1, a_2, a_3) \text{ es} \\ \text{izquierda;} \end{cases}$$

2) para que tres vectores a_1, a_2, a_3 sean coplanares, es necesario y suficiente el cumplimiento de la condición $[a_1, a_2]\, a_3 = 0$.

La propiedad algebraica fundamental del producto mixto consiste en que la permutación cíclica de los vectores no cambia su magnitud, es decir,

$$[a_1, a_2]\, a_3 = [a_2, a_3]\, a_1 = [a_3, a_1]\, a_2.$$

Esta propiedad permite introducir la designación $[a_1, a_2]\, a_3 = a_1 a_2 a_3$ (el resultado no depende de cómo se colocan los corchetes en el segundo miembro). Un producto mixto puede ser escrito en términos de coordenadas de los vectores en la base rectangular derecha en la forma

$$a_1 a_2 a_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

1.97. Los vectores a_1, a_2, a_3 forman una terna derecha, son recíprocamente perpendiculares y $|a_1| = 4$, $|a_2| = 2$, $|a_3| = 3$. Calcúleso $a_1 a_2 a_3$.

1.98. Se dan los vectores a_1 (1, —1, 3), a_2 (—2, 2, 1) y a_3 (3, —2, 5). Calcúlese $a_1 a_2 a_3$. ¿Cuál es la orientación de las ternas:

a) (a_1, a_2, a_3); b) (a_2, a_1, a_3); c) (a_1, a_3, a_2)?

1.99. Establézcase si los vectores a_1, a_2 y a_3 forman una base en el conjunto de todos los vectores, si:

a) a_1 (2, 3, —1), a_2 (1, —1, 3), a_3 (1, 9, —11);

b) a_1 (3, —2, 1), a_2 (2, 1, 2), a_3 (3, —1, —2).

1.100. Demuéstrese que $|a_1 a_2 a_3| \leqslant |a_1|\,|a_2|\,|a_3|$; ¿en qué caso tiene lugar el signo de igualdad?

1.101. Demuéstrese que para cualesquiera a, b y c los vectores $a - b$, $b - c$ y $c - a$ son coplanares. ¿Cuál es el sentido geométrico de este hecho?

1.102. Demuéstrese la identidad

$$(a + b + c)(a - 2b + 2c)(4a + b + 5c) = 0.$$

1.103. Demuéstrese que si $\alpha [a, b] + \beta [b, c] + \gamma [c, a] = 0$, y por lo menos uno de los números α, β y γ es distinto de cero, entonces los vectores a, b y c son coplanares.

1.104. Calcúlese el volumen del tetraedro $OABC$, si $\overline{OA} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$; $\overline{OB} = -3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\overline{OC} = 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$.

1.105. Calcúlese el volumen de un tetraedro con los vértices situados en los puntos A (2, —3, 5), B (0, 2, 1), C (—2, —2, 3) y D (3, 2, 4).

1.106. En un tetraedro con los vértices situados en los puntos A (1, 1, 1), B (2, 0, 2), C (2, 2, 2) y D (3, 4, —3) calcúlese la altura $h = |\overline{DE}|$.

1.107. Demuéstrese que los cuatro puntos A (1, 2, —1), B (0, 1, 5), C (—1, 2, 1) y D (2, 1, 3) en sitúan en un plano.

1.108. Pruébese que el volumen de un paralelepípedo construido sobre las diagonales de las aristas del paralelepípedo dado es igual al volumen duplicado del mismo.

1.109. Demuéstrense las identidades:

a) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{abc}$;

b) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = 3\boldsymbol{abc}$;

c) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{abc}$;

d) $\forall\, \alpha,\ \beta\ (\boldsymbol{ab}\,(\boldsymbol{c} + \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{abc})$.

§ 2. Objetos geométricos lineales

1. Recta en un plano. Una línea recta en un plano dentro del sistema rectangular de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy puede ser definida por la ecuación de cualquiera de los siguientes tipos:

1) $Ax + By + C = 0$ que es la *ecuación general* de la recta;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ que es la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0(x_0, y_0)$ y es perpendicular al vector normal $\boldsymbol{n}(A, B)$;

3) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ que es la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0(x_0, y_0)$ y es paralela respecto del *vector director* $\boldsymbol{q}(l, m)$ (*ecuación canónica* de la recta);

4) $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$ $t \in (-\infty, \infty)$, que son las ecuaciones paramétricas de la recta las que en la forma vectorial se expresan así:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{q}t,$$

donde $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0)$ es el radio vector del punto $M_0(x_0, y_0)$, $\boldsymbol{q}(l, m)$ es el vector director de la recta;

5) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ que es la ecuación de la recta *en segmentos*, donde a y b son las magnitudes de los segmentos dirigidos que se obtienen al cortar la recta los ejes coordenados Ox y Oy, respectivamente;

6) $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$, que es la *ecuación normal* de la recta, donde $\cos\alpha$ y $\cos\beta$ son cosenos directores del vector normal $\boldsymbol{n}$,

dirigido desde el origen de coordenadas hacia la recta, y $p > 0$ es la distancia entre el origen de coordenadas y la recta.

La ecuación general de la recta 1) se reduce a la forma normal 6) multiplicándola por el factor normalizador

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Si la recta L está dada por la ecuación del tipo 6) y $M(x, y)$ es un punto del plano, entonces la expresión

$$\delta(M, L) = x\cos\alpha + y\cos\beta - p$$

lleva el nombre de *desviación del punto M de la recta L*. El signo $\delta(M, L)$ indica la disposición mutua del punto M, la recta L y el origen de coordenadas, a saber: si el punto M y el origen de coordenadas están situados por diferentes lados de la recta L, entonces $\delta(M, L) > 0$, y si M y el origen de coordenadas se hallan a un mismo lado de la recta L, entonces $\delta(M, L) < 0$. La distancia $\rho(M, L)$ entre el punto M y la recta L se determina por la igualdad $\rho(M, L) = |\delta(M, L)|$.

EJEMPLO 1. Escríbase la ecuación de la recta L' que es paralela a las dos rectas dadas L_1: $x + 2y - 1 = 0$, L_2: $x + 2y + 2 = 0$ y que pasa entre ellos por el medio.

◀ Método 1. Por cuanto el vector $n(1, 2)$, normal respecto de las rectas dadas L_1 y L_2, es también normal respecto de L', será suficiente encontrar un punto M', situado en el medio de la distancia entre L_1 y L_2. De las ecuaciones para L_1 y L_2 hallamos cualesquiera dos puntos $M_1 \in L_1$ y $M_2 \in L_2$, por ejemplo, $M_1(1, 0)$ y $M_2(-2, 0)$. En este caso el punto $M'(-1/2, 0)$ que divide el segmento M_1M_2 por la mitad, se fija en medio de la distancia entre L_1 y L_2. Por eso la ecuación de la recta L' tiene por expresión

$$L': x + 2y + \frac{1}{2} = 0.$$

Método 2. Un punto arbitrario M pertenece a L' cuando, y sólo cuando, $\rho(M, L_1) = \rho(M, L_2)$, es decir,

$$|\delta(M, L_1)| = |\delta(M, L_2)|. \qquad (1)$$

Para despejarnos de los módulos en esta relación, establezcamos la posición del origen de coordenadas con respecto a las rectas dadas L_1 y L_2. Las ecuaciones normales de estas rectas son:

$$L_1: \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad y \quad L_2: -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.$$

Puesto que las normales n_1 y n_2, trazadas del punto O en dirección de L_1 y L_2, son contrariamente orientadas, entonces el punto O se encuentra en la franja entre L_1 y L_2.

Por ello, la relación (1) toma la forma $\delta(M, L_1) = \delta(M, L_2)$, o bien

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}},$$

decir, L': $x + 2y + \frac{1}{2} = 0$. ▶

En los problemas 2.1—2.3 se pide:

1) escribir la ecuación de la recta, reducirla a la forma general y construir la recta.

2) reducir la ecuación general a la forma normal y determinar la distancia del origen de coordenadas hasta la recta.

2.1. La recta L viene dada por el punto $M_0(x_0, y_0) \in L$ y el vector normal $\boldsymbol{n}(A, B)$:

a) $M_0(-1, 2)$, $\boldsymbol{n}(2, 2)$; b) $M_0(2, 1)$, $\boldsymbol{n}(2, 0)$:

c) $M_0(1, 1)$, $\boldsymbol{n}(2, -1)$.

2.2. La recta L está dada por el punto $M_0(x_0, y_0) \in L$ y el vector director $\boldsymbol{q}(l, m)$:

a) $M_0(-1, 2)$, $\boldsymbol{q}(3, -1)$; b) $M_0(1, 1)$, $\boldsymbol{q}(0, -1)$;

c) $M_0(-1, 1)$, $\boldsymbol{q}(2, 0)$.

2.3. La recta L está dada por medio de sus dos puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$:

a) $M_1(1, 2)$, $M_2(-1, 0)$; b) $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -2)$;

c) $M_1(2, 2)$, $M_2(0, 2)$.

2.4. Se dan la recta L y el punto M. Se requiere:

1) calcular la distancia $\rho(M, L)$ del punto M hasta la recta L;

2) escribir la ecuación de la recta L' que pasa por el punto M y es perpendicular a la recta dada L;

3) escribir la ecuación de la recta L'' que pasa por el punto M y es paralela a la recta dada L.

Los datos de partida son:

a) L: $-2x + y - 1 = 0$, $M(-1, 2)$;

b) L: $2y + 1 = 0$, $M(1, 0)$;

c) L: $x + y + 1 = 0$, $M(0, 1)$.

Sean dadas dos rectas L_1 y L_2. Son posibles dos casos de su disposición mutua:

1) L_1 y L_2 son rectas paralelas que, en particular, coinciden;

2) L_1 y L_2 se cortan.

En los problemas 2.5—2.9 investíguese la disposición mutua de las rectas dadas L_1 y L_2. En el caso 1) hállese la

distancia $\rho(L_1, L_2)$ entre las rectas, en el segundo caso hállese el coseno del ángulo $(\widehat{L_1, L_2})$ y el punto M_0 de intersección de las rectas.

2.5. L_1: $-2x + y - 1 = 0$, L_2: $2y + 1 = 0$,

2.6. $L_1 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1}$ $\quad L_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{0}$,

2.7. L_1: $x + y - 1 = 0$, L_2: $2x - 2y + 1 = 0$,

2.8. $L_1 : x + y - 1 = 0$, $\quad L_2 : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2}$,

2.9. L_1: $x + 2y + 1 = 0$, L_2: $2x - 4y - 2 = 0$.

2.10. El triángulo ABC está dado por las coordenadas de sus vértices. Se necesita:

1) escribir la ecuación del lado (AB);

2) escribir la ecuación de la altura (CD) y calcular su altura $h = |CD|$;

3) hallar el ángulo φ entre la altura (CD) y la mediana (BM);

4) escribir la ecuación de las bisectrices L_1 y L_2 de los ángulos interior y exterior en el vértice A.

Los datos de partida son:

a) A (1, 2), B (2, —2), C (6, 1);

b) A (2, —2), B (6, 1), C (—2, 0).

2.11. Pruébese que el punto M (—1, 2) pertenece a la recta L: $x = 2t$, $y = -1 - 6t$. Hállese el valor del parámetro t que corresponde a este punto.

2.12. Calcúlese la distancia desde el punto M (1, 1) hasta la recta L: $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$.

Si la recta viene dada por la ecuación general $Ax + By + C = 0$, y, además, $B \neq 0$ (es decir, la recta no es paralela al eje Oy), entonces dicha recta puede ser descrita mediante una *ecuación con coeficiente angular* del tipo $y = kx + b$.

EJEMPLO 2. Escríbase la ecuación de la recta L' que pasa por el punto M (2, 1) bajo el ángulo $\pi/4$ respecto de la recta L: $2x + 3y + 4 = 0$.

◀ Se denomina ángulo entre las rectas L y L' el menor de dos ángulos adyacentes formados por las mismas. Por ello (véase el problema 2.13)

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \left| \frac{k + \frac{2}{2}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)k} \right| = 1,$$

donde k es el coeficiente angular de la recta L'. De esta ecuación hallamos $k_1 = 1/5$ y $k_2 = -5$. Por consiguiente, el problema tiene

dos soluciones. Haciendo uso de las coordenadas del punto M, podemos escribir para cada caso una ecuación con coeficiente angular:

$$y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}, \qquad y=-5x+11,$$

o bien, en el caso general,

$$x-5y+3=0, \quad 5x+y-11=0. \blacktriangleright$$

2.13. Demuéstrese que si las rectas L_1 y L_2 están dadas por las ecuaciones con coeficiente angular, entonces

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2})=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

2.14. Del punto M (5, 4) sale un rayo de luz bajo el ángulo $\varphi = \operatorname{arc\,tg} 2$ respecto al eje Ox y se refleja de éste. Escríbanse las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.

2.15. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto M (8, 6) y forma con los ejes coordenados un triángulo de área 12.

2.16. Escríbase la ecuación de una recta que es paralela a las dos rectas dadas L_1 y L_2 y pasa por el medio entre ellas, si:

a) $L_1: 3x-2y-1=0, \quad L_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{3}$;

b) $L_1: 3x-15y-1=0, \quad L_2: \dfrac{x+\frac{1}{2}}{5}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{1}$.

2.17. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto M (2, 1) y forma con la recta L: $x = 1 + t$, $y = -2 - {}^2/_3 t$ un ángulo igual a $\pi/4$.

2.18. Escríbanse las ecuaciones de los lados del triángulo ABC, si se conoce su vértice A (1, 3) y están dadas sus dos medianas $x - 2y + 1 = 0$, e $y - 1 = 0$.

2.19*. Demuéstrese que la recta $2x + y + 3 = 0$ corta el segmento $[M_1M_2]$, donde M_1 (−5, 1) y M_2 (3, 7).

2.20. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto M_0 (−2, 3) siendo equidistante de los puntos M_1 (5, −1) y M_2 (3, 7).

2.21. Establézcase si el punto M_0 (1, −2) y el origen de coordenadas se disponen en un ángulo, en ángulos adyacentes o en ángulos opuestos por el vértice y formados por las rectas L_1 y L_2 que se cortan, si:

a) $L_1 : 2x - y - 5 = 0$, $L_2 : 3x + y + 10 = 0$,
b) $L_1 : x - 2y - 1 = 0$, $L_2 : 3x - y - 2 = 0$.

2.22. Establézcase cuál de los ángulos, agudo u obtuso, formados por las rectas $3x - 5y - 4 = 0$ y $x + 2y + 3 = 0$, contiene el punto M (2, —5).

2.23. Escríbanse las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se sabe uno de sus vértices B (2, 6), y también las ecuaciones de la altura $x - 7y + 15 = 0$ y la bisectriz $7x + y + 5 = 0$, trazadas desde un mismo vértice.

2.24. Escríbanse las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se sabe uno de sus vértices B (2, —7), y también las ecuaciones de la altura $3x + y + 11 = 0$ y la mediana $x + 2y + 7 = 0$, trazadas desde los diferentes vértices.

2.25. Escríbanse las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se sabe uno de sus vértices A (3, —1), y también las ecuaciones de la bisectriz $x - 4y + 10 = 0$ y la mediana $6x + 10y - 59 = 0$, trazadas desde los diferentes vértices.

2. El plano y la recta en el espacio. El plano P en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas $Oxyz$ puede ser dado por cualquiera de las ecuaciones del siguiente tipo:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$, *ecuación general* del plano;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y que es perpendicular al *vector normal* $\boldsymbol{n}(A, B, C)$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, ecuación *segmentaria* del plano, donde a, b, c son las magnitudes de los segmentos dirigidos que se obtienen al cortar el plano los ejes coordenados Ox, Oy, Oz, respectivamente;

4) $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, la *ecuación normal* de un plano, donde $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ son cosenos directores del vector normal $\boldsymbol{n}$, que está dirigido desde el origen de coordenadas hacia el plano, y $p > 0$ es la distancia entre el origen de coordenadas y el plano.

La ecuación general 1) se reduce a la normal del tipo 4) multiplicándola por el factor normalizador

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Si el plano P viene dado por la ecuación normal del tipo 4) y $M(x, y, z)$ es cierto punto del espacio, entonces la expresión

$$\delta(M, P) = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p,$$

lleva el nombre de desviación del punto M del plano P. El signo $\delta(M, P)$ indica la disposición mutua del punto M, el plano P y el origen de coordenadas, a saber: si el punto M y el origen de coordenadas se disponen por distintos lados respecto al punto P, entonces $\delta(M, P) > 0$, y si el punto M y el origen de coordenadas están a un mismo lado respecto al plano P, entonces $\delta(M, P) < 0$.

La distancia $\rho(M, P)$ entre el punto M y el plano P se determina por la igualdad $\rho(M, P) = |\delta(M, P)|$.

La recta L en el espacio puede ser dada:

1) *por las ecuaciones generales*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

donde los coeficientes A_1, B_1, C_1 no son proporcionales a los coeficientes A_2, B_2, C_2, lo que es equivalente a la definición de la recta como línea de intersección de los planos.

2) *por las ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

o en la forma vectorial

$$r(t) = r_0 + qt,$$

donde $r_0(x_0, y_0, z_0)$ es el radio vector de cierto punto perteneciente a la recta, mientras que $q(l, m, n)$ es el vector director de la recta;

3) *por las ecuaciones canónicas*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

lo que es equivalente a la descripción de la recta como línea de intersección de tres planos que proyectan esta recta sobre los planos coordenados.

EJEMPLO 3. Escríbase la ecuación de un plano P que pasa por los puntos $M_1(1, 1, 1)$ y $M_2(0, 2, 1)$ paralelamente al vector $a(2, 0, 1)$.

◀ El problema tiene una solución única, puesto que los vectores $\overrightarrow{M_1M_2}$ $(-1, 1, 0)$ y $a(2, 0, 1)$ no son colineales. A título de vector normal al plano puede ser elegido el vector

$$n = [\overrightarrow{M_1M_2}, a] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + j - 2k.$$

La ecuación del plano tiene la forma $(x - 1) + (y - 1) - 2(z - 1) = 0$, o bien $x + y - 2z = 0$. La última ecuación está privada del término independiente, por lo cual el plano pasa por el origen de coordenadas.

Otro procedimiento. El punto $M(x, y, z)$ pertenece al plano buscado P cuando, y sólo cuando, los vectores $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ y a son coplanares. Por consiguiente,

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot a = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $x + y - 2z = 0$. ▶

EJEMPLO 4. La recta L viene dada por las ecuaciones generales

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2=0. \end{cases}$$

Escríbanse las ecuaciones canónicas de esta recta y también la ecuación de su proyección sobre el eje coordenado Oxz.

◀ El punto M (0, 2, 2) satisface las ecuaciones generales de la recta (compruébelo) y, por tanto, se sitúa en dicha recta. A título de vector director de la recta podemos tomar el vector $q=[n_1, n_2]$, donde n_1 (1, 1, —1) y n_2 (2, —1, 0) son vectores normales de los planos cuya línea de intersección es precisamente la recta dada. De este modo,

$$q=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-i-2j-3k,$$

y las ecuaciones canónicas de la recta son:

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{-3}.$$

La proporción obtenida es equivalente al sistema de tres ecuaciones

$$\begin{cases} -2x+y-2=0, \\ -3x+z-2=0, \\ -3y+2z+2=0, \end{cases}$$

que describen tres planos que proyectan la recta sobre los planos coordenados Oxy, Oxz y Oyz, respectivamente (ecuación de la recta en proyecciones). En particular, la ecuación $-3x+z-2=0$ es la ecuación de proyección de la recta dada sobre el plano Oxz. ▶

EJEMPLO 5. Sean dadas las rectas que se cruzan

$$L_1:\ \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{1} \quad \text{y} \quad L_2:\ \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

Hállese la distancia $\rho(L_1, L_2)$ entre las rectas y escríbase la ecuación de la perpendicular L común para ambas rectas.

◀ Hallemos la ecuación del plano P que pasa por la recta L_1 paralelamente a la recta L_2 (fig. 42). El punto M_1 (0, 1, —2) se sitúa en la recta L_1 y, por ende, pertenece al plano buscado P. A título de vector normal al plano citado tomemos el vector

$$n=[q_1, q_2]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2i-j-4k.$$

La ecuación del plano P es:

$$-2x-(y-1)-4(z+2)=0,$$

o bien, en la forma general, $2x+y+4z+7=0$.

La distancia $\rho(L_1, L_2)$ es igual a la distancia de cualquier punto de la recta L_2, por ejemplo del punto $M_2(-1, -1, 2)$ hasta el plano P. La ecuación normal del plano P tiene por expresión

$$-\frac{2}{\sqrt{21}}x-\frac{1}{\sqrt{21}}y-\frac{4}{\sqrt{21}}z-\frac{7}{\sqrt{21}}=0,$$

de donde

$$\rho(L_1, L_2)=|\delta(M_2, P)|=\left|\frac{2}{\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{21}}-\frac{8}{\sqrt{21}}-\frac{7}{\sqrt{21}}\right|=\frac{12}{\sqrt{21}}.$$

Con el objeto de formar la ecuación de la perpendicular común L, hallemos las ecuaciones de los planos P_1 y P_2 que pasan por las rectas

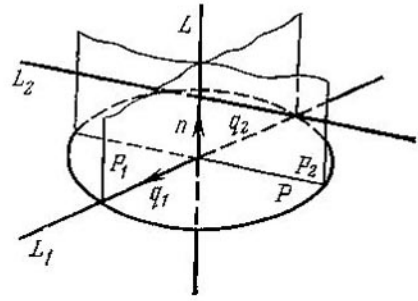


Fig. 12

dadas L_1 y L_2, respectivamente, y que son perpendiculares al plano P. Tenemos: $M_1(0, 1, -2) \in P_1$ y $\boldsymbol{n}_1 = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{n}] = \boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \perp P_1$, de donde P_1: $x - 10y + 2z + 14 = 0$. Análogamente, $M_2(-1, -1, 2) \in P_2$ y $\boldsymbol{n}_2 = [\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{n}] = -9\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \perp P_2$, de donde P_2: $3x - 2y - z + 3 = 0$.

Puesto que $L = P_1 \cap P_2$, resulta que

$$\begin{cases} x-10y+2z+11=0, \\ 3x-2y-z+3=0 \end{cases}$$

son las ecuaciones generales de la recta L. ▶

2.26. Se dan el plano P y el punto M. Escríbase la ecuación del plano P' que pasa por el punto M paralelamente al plano P, y calcúlese la distancia $\rho(P, P')$, si:

a) P: $-2x + y - z + 1 = 0$, $M(1, 1, 1)$;

b) P: $x - y - 1 = 0$, $M(1, 1, 2)$.

2.27. Escríbase la ecuación del plano P' que pasa por los puntos dados M_1 y M_2 y que es perpendicular al plano dado P, si:

a) P: $-x + y - 1 = 0$, $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$;
b) P: $2x - y + z + 1 = 0$, ($M(0, 1, 1)$, $M(2, 0, 1)$.

2.28. Escríbase la ecuación de un plano que pasa por el punto M paralelamente a los vectores a_1 y a_2, si:
a) $M(1, 1, 1)$, $a_1(0, 1, 2)$, $a_2(-1, 0, 1)$;
b) $M(0, 1, 2)$, $a_1(2, 0, 1)$, $a_2(1, 1, 0)$.

2.29. Escríbase la ecuación de un plano que pasa por los puntos M_1 y M_2 paralelamente al vector a, si:
a) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $a(3, 0, 1)$;
b) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 3, -1)$, $a(0, -1, 2)$.

2.30. Escríbase la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados M_1, M_2, y M_3, si:
a) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $M_3(3, 0, 1)$;
b) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, -1, 2)$, $M_3(2, 3, -1)$.

Sean dados dos planos P_1 y P_2. Son posibles dos casos de su disposición mutua:
1) $P_1 \parallel P_2$, en particular, los planos coinciden;
2) P_1 y P_2 se cortan a lo largo de cierta recta.

En los problemas 2.31-2.34 investíguense la disposición mútua de los planos dados. En el caso 1) hállese la distancia $\rho(P_1, P_2)$ entre los planos, en el caso 2) hállese el coseno del ángulo entre los planos.

2.31. P_1: $-x + 2y - z + 1 = 0$, P_2: $y + 3z - 1 = 0$.
2.32. P_1: $2x - y + z - 1 = 0$, P_2: $-4x + 2y - 2z - 1 = 0$.
2.33. P_1: $x - y + 1 = 0$, P_2: $y - z + 1 = 0$.
2.34. P_1: $2x - y - z + 1 = 0$, P_2: $-4x + 2y + 2z - 2 = 0$

2.35. Calcúlese el volumen de una pirámide limitada por el plano P: $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ y los planos coordenados.

2.36. Escríbanse las ecuaciones de los planos que dividen por el medio los ángulos diedros formados por los planos P_1 y P_2, si:
a) P_1: $x - 3y + 2z - 5 = 0$, P_2: $3x - 2y - z + 3 = 0$,
b) P_1: $2x - y + 5z - 3 = 0$, P_2: $2x - 10y + 4z - 2 = 0$.

2.37. Escríbase la ecuación de un plano equidistante de los dos planos dados P_1 y P_2, si:
a) P_1: $4x - y - 2z - 3 = 0$, P_2: $4x - y - 2z - 5 = 0$
b) P_1: $5x - 3y + z + 3 = 0$, P_2: $10x - 6y + 2z + 7 = 0$.

2.38. Establézcase si los puntos $M_1(2, -1, 1)$ y $M_2(1, 2, -3)$ se sitúan en un ángulo, en los ángulos adyacentes o en los ángulos opuestos por el vértice, formados por los planos P_1 y P_2, si:

a) P_1: $3x - y + 2z - 3 = 0$, P_2: $x - 2y - z + 4 = 0$
b) P_1: $2x - y + 5z - 1 = 0$, P_2: $3x - 2y + 6z - 1 = 0$

2.39. La recta L viene dada por las ecuaciones generales. Esríbanse para esta recta las ecuaciones canónicas y las ecuaciones en proyecciones (véase el ejemplo 4), si:

a) $L: \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0; \end{cases}$ b) $L: \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0; \\ 2x - y + z + 2 = 0; \end{cases}$

2.40. Escríbanse las ecuaciones canónicas de una recta que pasa por el punto M_0 (2, 0, —3) paralelamente:

a) al vector q (2, —3, 5);

b) a la recta $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$;

c) al eje Ox; d) al eje Oz;

e) a la recta $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

f) a la recta $x = -2 + t$, $y = 2t$, $z = 1 - {}^1/_2\, t$.

2.41. Escríbanse las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos dados M_1 y M_2, si:

a) M_1 (1, —2, 1), M_2 (3, 1, —1);
b) M_1 (3, —1, 0), M_2 (1, 0, —3).

2.42. Se dan una recta $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ y un punto M (0, 1, 2) $\notin L$ (compruébese). Se pide:

a) escribir la ecuación de un plano que pasa por la recta L y el punto M;

b) escribir la ecuación de un plano que pasa por el punto M y es perpendicular a la recta L;

c) escribir la ecuación de una perpendicular trazada desde el punto M a la recta L;

d) calcúlese la distancia $\rho\,(M, L)$;

e) hállese la proyección del punto M sobre la recta L.

2.43. Se dan el plano P: $x + y - z = 0$ y una recta L: $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, con la particularidad de que $L \notin P$ (compruébese). Se pide:

a) calcular el seno $(\widehat{P, L})$ y las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano;

b) escribir la ecuación de un plano que pasa por la recta L y es perpendicular al plano P;

c) escribir las ecuaciones de la proyección de la recta L sobre el plano P.

2.44. Sean dadas dos rectas:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Demuéstrese que las rectas L_1 y L_2 se disponen en un mismo plano cuando, y sólo cuando, se cumple la condición

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

2.45. Haciendo uso de los resultados del problema 2.44, convénzase de que las rectas L_1 y L_2 pertenecen a un mismo plano y escríbase la ecuación de este plano. Los datos de partida son:

a) $L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$, $L_2: \frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$;

b) $L_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $L_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

2.46. Demuéstrese que las rectas

$$L_1: \begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad y_2: \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$$

son paralelas y hállese la distancia $\rho(L_1, L_2)$.

2.47. Demuéstrese que la distancia entre las rectas que se cruzan L_1: $r(t)=r_1+q_1t$ y L_2: $r(t)=r_2+q_2t$ puede ser calculada según la fórmula

$$\rho(L_1, L_2)=\frac{|(r_2-r_1)\,q_1q_2|}{|[q_1, q_2]|}.$$

2.48. Sean dadas dos rectas $L_1: \frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$ y $L_2: \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$. Se necesita:

a) demostrar que las rectas no se disponen en un mismo plano, es decir, se cruzan;

b) escribir la ecuación de un plano que pasa por la recta L_2 paralelamente a L_1;

c) calcular la distancia entre las rectas;

d) escribir la ecuación de la perpendicular común a las rectas L_1 y L_2.

2.49. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto M_0 (3, —2, —4) paralelamente al plano $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ y que corta la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

§ 3. Curvas en el plano

1. Ecuación de la curva en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas. Se dice que la curva Γ en el sistema de coordenadas Oxy tiene la ecuación

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

si se cumple la siguiente condición: el punto $M(x, y)$ pertenece a la curva Γ cuando, y sólo cuando, sus coordenadas x e y satisfacen la relación (1). Si, en particular, $F(x, y) = f(x) - y$, la ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$y = f(x), \tag{2}$$

y en este caso la curva Γ coincide con la gráfica de la función $f(x)$.

En el presente párrafo se estudia la relación existente entre las propiedades geométricas de la curva y su ecuación en algunos casos más simples.

EJEMPLO 1. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la suma de los cuadrados de las distancias de cualquiera de sus puntos hasta los puntos $A(-a, 0)$, $B(0, a)$ y $C(a, 0)$ es igual a $3a^2$.

◀ Sea Γ una curva que satisface las condiciones del problema; $M(x, y) \in \Gamma$, si, y sólo si

$$\rho^2(M, A) + \rho^2(M, B) + \rho^2(M, C) = 3a^2,$$

o bien

$$(x + a)^2 + y^2 + x^2 + (y - a)^2 + (x - a)^2 + y^2 = 3a^2.$$

Realizadas las transformaciones sencillas, obtenemos

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}ay = 0,$$

o bien, formando el cuadrado perfecto,

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{a^2}{9}.$$

Ésta es precisamente la ecuación buscada de la curva que representa en sí una circunferencia de radio $a/3$ y con el centro en el punto M_0 $(0, a/3)$. ▶

En los problemas 3.1—3.14 se pide establecer cuáles curvas se definen por las ecuaciones dadas y construir estas curvas.

3.1. $x + |y| = 0$. **3.2.** $|x| + y - x = 0$. **3.3.** $x^2 - xy = 0$.

3.4. $xy + y^2 = 0$. **3.5.** $x^2 - y^2 = 0$. **3.6.** $xy = 0$.

3.7. $y^2 - 9 = 0$. **3.8.** $x^2 - x - 6 = 0$.

3.9. $x^2y - 7xy + 10y = 0$. **3.10.** $x^2 + y^2 = 4$.

3.11. $x^2 + (y + 3)^2 = 1$. **3.12.** $x^2 + 2y^2 = 0$.

3.13. $2x^2 + y^2 + 2 = 0$. **3.14.** $x^2 + |y^2 - 1| = 0$.

3.15. Escríbase la ecuación de una curva, cada punto de la cual se encuentra a una misma distancia de los puntos M_1 $(3, 2)$ y M_2 $(2, 3)$.

3.16. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la diferencia de los cuadrados de las distancias desde cualquiera de sus puntos hasta los puntos M_1 $(-a, 0)$ y M_2 $(a, 0)$ es igual a c.

3.17. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la distancia de cualquiera de sus puntos hasta el eje Ox es dos veces mayor que la distancia hasta el eje Oy.

3.18. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la suma de los cuadrados de las distancias de cualquiera de sus puntos hasta los puntos M_1 $(-3, 0)$ y M_2 $(3, 0)$ es igual a 50.

3.19. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la distancia de cualquiera de sus puntos hasta el punto M_1 $(-1, 1)$ es dos veces menor que la distancia hasta el punto M_2 $(-4, 4)$.

3.20. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la suma de las distancias de cualquiera de sus puntos hasta los puntos F_1 $(-2, 0)$ y F_2 $(2, 0)$ es igual a $2\sqrt{5}$.

3.21. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual el módulo de la diferencia de distancias entre cualquiera de sus puntos y los puntos F_1 $(-2, -2)$ y F_2 $(2, 2)$ es igual a 4.

3.22. Escríbase la ecuación de una curva, cada punto de la cual es equidistante del punto F $(2, 2)$ y del eje Ox.

3.23. Establézcase que cualquiera de las ecuaciones siguientes define una circunferencia; hállese el centro de la misma C y el radio R:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; c) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

3.24. Escríbase la ecuación de la circunferencia en cada uno de los siguientes casos (designaciones: C es el centro de la circunferencia, R, el radio y M, M_1, M_2, M_3 son los puntos en la circunferencia):

a) $C\,(2, -3)$, $R = 7$; b) $M\,(2, 6)$, $C\,(-1, 2)$;

c) $M_1\,(3, 2)$, $M_2\,(-1, 6)$ son los extremos del diámetro de la circunferencia;

d) $C\,(1, -1)$, la recta $5x - 12y + 9 = 0$ es la línea tangente a la circunferencia;

e) $M\,(1, 2)$, la circunferencia toca los ejes de coordenadas;

f) $M_1\,(3, 1)$, $M_2\,(-1, 3)$, $C \in L$; $3x - y - 2 = 0$;

g)* $M_1\,(-1, 3)$, $M_2\,(0, 2)$, $M_3\,(1, -1)$.

3.25. Escríbase la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, perpendicular a la recta $5x + 2y - 13 = 0$.

3.26. Cálculese la distancia mínima del punto M_0 hasta la circunferencia Γ, si:

a) $M_0\,(6, -8)$, Γ: $x^2 + y^2 = 9$;

b) $M_0\,(-7, 2)$, Γ: $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

3.27. Determínese la disposición de una recta respecto de una circunferencia: la corta, es tangente a la circunferencia o pasa fuera de la última, siempre que la recta y la circunferencia vienen dadas por las ecuaciones:

a) $2x - y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$;

b) $x - 2y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;

c) $x - y + 10 = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

2. Curvas algebraicas de segundo orden. Se llama *curva algebraica de segundo orden* una curva Γ cuya ecuación en el sistema de coordenadas cartesianas se expresa

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (3)$$

donde no todos los coeficientes A, B y C son nulos simultáneamente (de lo contrario Γ sería una recta, es decir, una curva algebraica de primer orden).

En el caso general puede resultar que la ecuación (3) defina la así llamada curva *degenerada* (un conjunto vacío, un punto, una recta, un par de rectas).

En cambio, si la curva Γ es regular, se encontrará para ella tal sistema de coordenadas rectangulares cartesianas en el que la ecuación

de la curva mencionada tenga una de las siguientes tres formas (*ecuación canónica*):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a \geqslant b > 0, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,\ b>0, \tag{5}$$

$$y^2=2px, \qquad p>0. \tag{6}$$

La curva Γ se llama en este caso *elipse*, *hipérbola* o *parábola*, respectivamente, mientras que el propio sistema de coordenadas en el que su ecuación tiene la forma (4), (5) ó (6), lleva el nombre de *sistema canónico de coordenadas* para la curva dada.

La reducción de la ecuación general de una curva de segundo orden a la forma canónica se analiza detalladamente en el p. 4 del § 3, cap. 4.

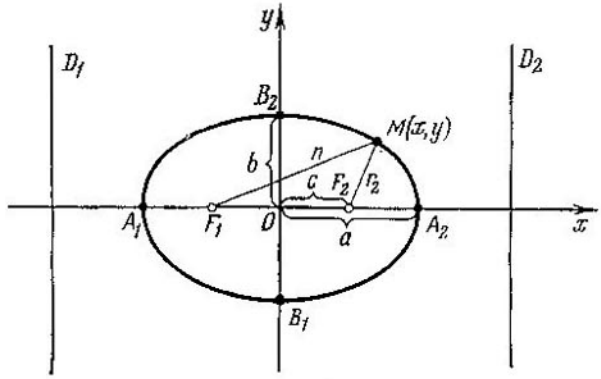


Fig. 13

El objetivo del presente punto consiste en el estudio de las propiedades geométricas fundamentales de las curvas regulares de segundo orden sobre la base de sus ecuaciones canónicas.

La *elipse* expresada por la ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a \geqslant b > 0$, tiene la forma expuesta en la fig. 13.

Los parámetros a y b se denominan *semiejes* de la elipse (mayor y menor, respectivamente), los puntos A_1 $(-a, 0)$, A_2 $(a, 0)$, B_1 $(0, -b)$ y B_2 $(0, b)$ son los *vértices* de la elipse, los ejes de simetría Ox y Oy son *ejes principales*, y el centro de simetría O, *centro* de la elipse.

Los puntos F_1 $(-c, 0)$, y F_2 $(c, 0)$, donde $c=\sqrt{a^2-b^2} \geqslant 0$, se denominan *focos* de la elipse, los vectores $\overrightarrow{F_1M}$ y $\overrightarrow{F_2M}$ son *radios vectores focales* y los números $r_1=|\overrightarrow{F_1M}|$ y $r_2=|\overrightarrow{F_2M}|$, *radios focales* del punto M perteneciente a la elipse. En un caso particular $a=b$ los focos F_1 y F_2 coinciden con el centro, mientras que la ecuación canónica tiene por expresión $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, o bien $x^2+y^2=a^2$,

es decir, describe una circunferencia de radio a cuyo centro se dispone en el origen de coordenadas.

El número $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ $(0 \leqslant e < 1)$ se denomina *excentricidad* de la elipse y sirve de medida de su «achatamiento» (para $e = 0$ la elipse se convierte en una circunferencia).

Las rectas D_1: $x = -a/e$ y D_2: $x = a/e$, que son perpendiculares al eje principal y pasan a una distancia de a/e del centro, se llaman *directrices* de la elipse.

3.28. Constrúyase una elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$. Hállense:

a) los semiejes ; b) las coordenadas de los focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de las directrices.

3.29. Escríbase la ecuación canónica de una elipse, si:

a) $a = 3$, $b = 2$; b) $a = 5$, $c = 4$; c) $c = 3$, $e = 3/5$; d) $b = 5$, $e = 12/13$; e) $c = 2$ y la distancia entre las directrices es igual a 5; f) $e = 1/2$ y la distancia entre las directrices es igual a 32.

3.30. Escríbase la ecuación de una elipse con los semiejes a y b y el centro en el punto $C(x_0, y_0)$, si se sabe que los ejes principales de la elipse son paralelos a los ejes coordenados.

3.31. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen define una elipse, hállense el centro de la misma, los semiejes, la excentricidad y las ecuaciones de las directrices:

a) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;
b) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
c) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

3.32. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geqslant b$, entonces los radios focales de este punto son

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = a - ex$$

(véase fig. 13). De aquí, en particular, se deduce que para todo punto M de la elipse se verifica la igualdad

$$r_1(M) + r_2(M) = \text{const} = 2a.$$

b) Sean dados los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, $c \geqslant 0$. Entonces el conjunto de puntos M que satisfacen la condi-

ción $|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = \text{const} = 2a$, es una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$.

3.33. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, $r_1(M)$, $r_2(M)$ son radios focales de este punto, y $\rho(M, D_1)$ y $\rho(M, D_2)$ son las distancias entre dicho punto y las directrices, entonces se verifica la igualdad

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)} = \text{const} = e.$$

b) Sean dados un punto $F(c, 0)$ y una recta D: $x - d = 0$, $d > c > 0$. En este caso el conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = e < 1$, es una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a = de$ y $b^2 = a^2 - c^2$.

3.34. La elipse cuyos ejes principales coinciden con los ejes coordenados pasa por los puntos $M_1(2, \sqrt{3})$ y $M_2(0, 2)$. Escríbase la ecuación de la elipse y hállense los radios focales del punto M_1 y las distancias del punto citado hasta las directrices.

3.35. Hállese en la elipse $9x^2 + 24y^2 = 225$ un punto cuya distancia hasta el foco F_2 sea cuatro veces mayor que la distancia hasta el foco F_1.

3.36. Escríbase la ecuación de una curva por la cual se mueve el punto M, si la suma de distancias entre dicho punto y los puntos $F_1(-1, -1)$ y $F_2(1, 1)$ queda constante e igual a $2\sqrt{3}$.

3.37. Escríbase la ecuación de una curva por la cual se mueve el punto M, si la distancia entre dicho punto y el punto $F(3, 0)$, es dos veces menor que la distancia hasta la recta $x + y - 1 = 0$.

3.38. Determínese la disposición de una recta respecto de una elipse: la corta, es tangente o bien pasa fuera de la elipse, si la recta y la elipse vienen dadas por las ecuaciones:

a) $2x - y - 3 = 0$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,

b) $2x + y - 10 = 0$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,

c) $3x + 2y - 20 = 0$, $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

3.39. Escríbase la ecuación de una tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $M_0(x_0, y_0)$.

◀ Supongamos primero que $y_0 \neq 0$, es decir, el punto M_0 no coincide con ninguno de los vértices A_1 $(-a, 0)$ y A_2 $(a, 0)$. En este caso la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ define implícitamente la función $y = y(x)$, $-a < x < a$, cuya gráfica pasa por el punto M_0 (x_0, y_0) y coincide con la mitad correspondiente (superior cuando $y_0 > 0$ ó inferior, cuando $y_0 < 0$) de la elipse. Al derivar respecto de x la identidad $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2(x)}{b^2} = 1$, llegamos a que la derivada $y'(x_0)$ es igual a

$$y'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

De aquí la ecuación de la tangente a la elipse en el punto M_0 (x_0, y_0) tiene por expresión

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0),$$

o bien, teniendo presente la igualdad $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$,

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Si, en cambio, $y_0 = 0$ (y, por consiguiente, $x_0 = \pm a$), entonces las ecuaciones de las tangentes a la elipse se expresan por $x = \pm a$, es decir, en este caso la fórmula (7) queda también en vigor. ▶

3.40. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la elipse $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5/2} = 1$ que sean paralelas a la recta $3x + 2y + 7 = 0$.

3.41. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 20$ que sean perpendiculares a la recta $2x - 2y - 13 = 0$.

3.42. Demuéstrese que las tangentes a una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trazadas por los extremos de un mismo diámetro, son paralelas.

3.43. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a una elipse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, trazadas desde el punto $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

3.44. En la elipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ hállese un punto M_0 que sea el más próximo a la recta $2x - 3y + 25 = 0$, y calcúlese la distancia entre el punto M_0 y dicha recta.

3.45. Demuéstrese que la tangente a una elipse en un punto arbitrario M de ésta forma ángulos iguales con los radios vectores focales $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ del punto mencionado.

3.46*. Del foco izquierdo de la elipse $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ se dirige un rayo de luz que forma con el eje Ox un ángulo obtuso α, con la particularidad de que $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Escríbase la ecuación de una recta, en la que está situado el rayo reflejado de la elipse.

La *hipérbola* expresada por la ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a,\ b>0$, tiene la forma expuesta en la fig. 14.

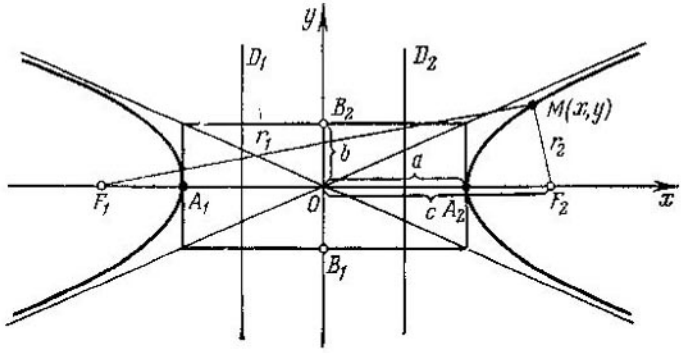


Fig. 14

Los parámetros a y b se llaman *semiejes* de la hipérbola, los puntos $A_1(-a, 0)$ y $A_2(a, 0)$ son los *vértices*, los ejes de simetría Ox y Oy llevan el nombre de *ejes real* e *imaginario* y el centro de simetría 0, de *centro* de la hipérbola.

Las rectas $y=-\pm\frac{b}{a}x$ son las asíntotas de la hipérbola.

Los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, donde $c=\sqrt{a^2+b^2}>0$, se denominan *focos* de la hipérbola, los vectores $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ son *radios vectores focales* y los números $r_1=|\overline{F_1M}|$ y $r_2=|\overline{F_2M}|$, *radios focales* del punto M perteneciente a la hipérbola.

El número $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ $(1<e<\infty)$ recibe el nombre de *excentricidad* de la hipérbola y sirve de medida de su «achatamiento». En el caso particular, cuando $a=b$, la hipérbola se llama *equilátera*; su excentricidad es igual a $e=\sqrt{2}$, y el ángulo entre las asíntotas es $\pi/2$.

Se denominan *directrices* de la hipérbola las rectas D_1: $x = -a/e$ y D_2: $x = a/e$ que son perpendiculares al eje real y pasan a la distancia a/e del centro.

3.47. Constrúyase una hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$. Hállense: a) los semiejes; b) las coordenadas de los focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de las asíntotas; e) las ecuaciones de las directrices.

3.48. Constrúyase una hipérbola $16x^2 - 9y^2 = -144$, llamada *conjugada* de la hipérbola del problema 3.47. ¿Cuál es el sistema canónico de coordenadas para esta hipérbola? Hállense:

a) los semiejes; b) las coordenadas de los focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de las asíntotas; e) las ecuaciones de las directrices.

3.49. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si:

a) $a = 2$, $b = 3$; b) $b = 4$, $c = 5$; c) $c = 3$, $e = 3/2$; d) $a = 8$, $e = 5/4$; e) $c = 10$ y las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm 4/3x$; f) $e = 3/2$ y la distancia entre las directrices es igual a $8/3$.

3.50. Escríbase la ecuación de una hipérbola con los semiejes a y b y el centro en el punto $C(x_0, y_0)$, si se sabe que sus ejes real e imaginario son paralelos a los ejes Ox y Oy, respectivamente.

3.51. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen define una hipérbola, hállense su centro, los semiejes, la excentricidad, las ecuaciones de asíntotas y de directrices:

a) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

b) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

c) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

3.52. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, entonces los radios focales de este punto son

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = -a + ex,$$

si el punto M se dispone en la rama derecha de la hipérbola, y

$$r_1(M) = -a - ex, \quad r_2(M) = a - ex,$$

si este punto se dispone en la rama izquierda. De aquí se deduce, en particular, que para todo punto M de la hipérbola se verifica la igualdad

$$|r_1(M) - r_2(M)| = \text{const} = 2a.$$

b) Sean dados los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, $c > 0$. Entonces el conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $||\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}|| = \text{const} = 2a$, $a > 0$, es una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $b^2 = c^2 - a^2$.

3.53. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $r_1(M)$ y $r_2(M)$ son los radios focales de dicho punto y $\rho(M, D_1)$ y $\rho(M, D_2)$ representan las distancias entre el punto y las directrices, entonces se verifica la igualdad

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)} = \text{const} = e.$$

b) Sean dados el punto $F(c, 0)$ y una recta D: $x - d = 0$, $c > d > 0$. Un conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $\frac{|\overrightarrow{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = e > 1$, es una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a = de$ y $b^2 = c^2 - a^2$.

3.54. Habiéndose convencido de que el punto $M(-5, 9/4)$ está situado en la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, hállense los radios focales de este punto y sus distancias hasta las directrices.

3.55. Hállense los puntos de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ se encuentran a la distancia 7 del foco F_1.

3.56. Escríbase la ecuación de una hipérbola, si se sabe que sus focos son los puntos $F_1(-3, -4)$ y $F_2(3, 4)$, mientras que la distancia entre las directrices es igual a 3,6.

3.57. Escríbase la ecuación de una hipérbola, si se saben su excentricidad $e = \sqrt{5}$, el foco $F(2, -3)$ y la ecuación de la directriz correspondiente es $3x - y + 3 = 0$.

3.58. Pruébese que la curva, dada por la ecuación $xy = 1$ ó $y = 1/x$, es la hiperbola equilátera. Escríbase su ecuación canónica, hállense la excentricidad, los focos y las ecuaciones de las directrices.

3.59*. Escríbase la ecuación de una tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en su punto $M_0(x_0, y_0)$.

3.60. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, paralelas a la recta $10x - 3y + 9 = 0$.

3.61. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, perpendiculares a la recta $4x + 3y - 7 = 0$.

3.62. Demuéstrese que las tangentes a una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trazadas por los extremos de un mismo diámetro, son paralelas.

3.63. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $A\ (-1, -7)$ a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$.

3.64. Hállese en la hipérbola $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ un punto M_0, que sea más próximo a la recta $3x + 2y + 1 = 0$, y calcúlese la distancia del punto M_0 hasta la recta mencionada.

3.65. Demuéstrese que la tangente a una hipérbola en su punto arbitrario M forma ángulos iguales con los radios vectores focales $\overrightarrow{F_1M}$ y $\overrightarrow{F_2M}$ de este punto.

3.66*. Del foco derecho de la hipérbola $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ se dirige un rayo de luz que forma con el eje Ox un ángulo α $(\pi < \alpha < 3/2\pi)$ con la particularidad de que $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Escríbase la ecuación de una recta en la que se sitúa un rayo reflejado de la hipérbola.

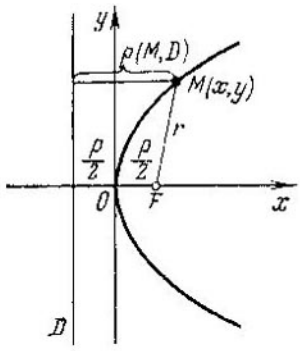


Fig. 15

Una *parábola* que se expresa por la ecuación canónica $y^2 = 2px$, $p > 0$, tiene una forma expuesta en la fig. 15.

El número p se denomina *parámetro* de la parábola, el punto O es su *vértice* y el eje Ox, el *eje* de la parábola.

El punto $F\ (p/2, 0)$ lleva el nombre de *foco* de la parábola, el vector FM, de *radio vector focal* y el número $r = |\overrightarrow{FM}|$, de *radio focal* del punto M de la parábola.

Se llama *directriz* de la parábola la recta D: $x = -p/2$, que es perpendicular al eje y pasa a la distancia $p/2$ del vértice de la parábola.

3.67. Constrúyanse las siguientes parábolas y hállense los parámetros de ellas:

a) $y^2 = 6x$; b) $x^2 = 5y$; c) $y^2 = -4x$; d) $x^2 = -y$.

3.68. Escríbase la ecuación de una parábola cuyo vértice se encuentra en el origen de coordenadas, si se sabe que:

a) la parábola se dispone en el semiplano izquierdo, simétricamente respecto al eje Ox y $p = 1/2$;

b) la parábola es simétrica respecto al eje Oy y pasa por el punto M (4, —8);

c) el foco de la parábola se ubica en el punto F (0, —3).

3.69. Escríbase la ecuación de la parábola, si se sabe que su vértice se encuentra en el punto A (x_0, y_0), el parámetro es igual a p, el eje es paralelo al eje Ox y con respecto a la recta $x = x_0$ la parábola está situada:

a) en el semiplano derecho;

b) en el semiplano izquierdo.

3.70. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen define una parábola, hállense las coordenadas de su vértice A y la magnitud del parámetro p:

a) $y^2 = 4x - 8$; b) $x^2 = 2 - y$;

c) $y = 4x^2 - 8x + 7$; d) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$;

e) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$; f) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

3.71. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si M (x, y) es un punto arbitrario de la parábola $y^2 = 2px$, r (M) es su radio focal y ρ (M, D), la distancia entre M y la directriz (véase la fig. 15), entonces se verifica la igualdad

$$\frac{r(M)}{\rho(M, D)} = \text{const} - 1.$$

b) Sean dados el punto F $(p/2, 0)$ y la recta D: $x = -p/2$. Entonces el conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = 1$, es la parábola $y^2 = 2px$.

3.72. Calcúlese el radio focal del punto M de la parábola $y^2 = 12x$, si $y(M) = 6$.

3.73. Escríbase la ecuación de una parábola, si se conocen:

a) el foco F (4, 3) y la directriz D: $y + 1 = 0$;

b) el foco F (2, —1) y la directriz D: $x - y - 1 = 0$.

3.74. Escríbase la ecuación de una tangente a la parábola $y^2 = 2px$ en su punto M_0 (x_0, y_0).

3.75. Escríbase la ecuación de una tangente a la parábola $y^2 = 8x$ que sea paralela a la recta $2x + 2y - 3 = 0$.

3.76. Escríbase la ecuación de una tangente a la parábola $x^2 = 16y$ que sea perpendicular a la recta $2x + 4y + 7 = 0$.

3.77. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y^2 = 36x$ trazadas desde el punto A (2, 9).

3.78. Hállese en la parábola $y^2 = 64x$ un punto M_0, que sea el más próximo a la recta $4x + 3y - 14 = 0$, y calcúlese la distancia entre el punto M_0 y dicha recta.

3.79. Demuéstrese que la tangente a una parábola en un punto arbitrario de ésta M forma ángulos iguales con el radio vector focal del punto M y con el rayo que parte del punto M y está orientado igual que el eje de la parábola.

3.80. Del foco de la parábola $y^2 = 12x$ se dirige un rayo de luz que forma con el eje Ox un ángulo agudo α, siendo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Escríbase la ecuación de una recta en la que se dispone el rayo reflejado de la parábola.

3. Ecuación de una curva en el sistema polar de coordenadas. Se dice que en un plano queda introducido el sistema polar de coordenadas (O, u), si vienen dados:

1) cierto punto O, llamado *polo*;

2) cierto rayo u que parte del punto O y se llama *eje polar*.

Se denominan coordenadas polares del punto $M \neq 0$ dos números: el *radio polar* $r(M) = |\overline{OM}| > 0$ y el *ángulo polar* $\varphi(M)$ al que se debe girar el eje u para que su dirección coincida con la del vector $\overline{OM}$ (en este caso, como siempre, $\varphi(M) > 0$, si el giro se realiza en el sentido antihorario, y $\varphi(M) < 0$, en el caso contrario). La notación $M(r, \varphi)$ significa que el punto M tiene las coordenadas polares r y φ.

El ángulo polar $\varphi(M)$ tiene una infinidad de valores posibles (que se diferencian uno del otro en una magnitud del tipo $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). El valor del ángulo polar que satisface la condición $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, se llama *principal*. En algunos casos se llama valor principal del ángulo polar los valores de φ que satisfacen la condición $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Supongamos que en un plano están introducidos el sistema directo de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy (esto es, un sistema tal que el giro más corto del eje Ox hacia el Oy se realiza en el sentido antihorario) y un sistema polar de coordenadas (O, u), además el eje polar coincide con el semieje positivo de abscisas. En tal caso la relación entre las coordenadas cartesianas y polares de un punto arbitrario $M \neq O$ se expresa por las fórmulas

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \qquad y = r\operatorname{sen}\varphi; \\ r &= \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{7}$$

La ecuación de una curva en coordenadas polares tiene la forma $F(r, \varphi) = 0$, o bien $r = f(\varphi)$. Puede obtenerse o bien directamente, partiendo de las propiedades geométricas de la curva, o bien pasando

a las coordenadas polares en la ecuación de esta recta, dada en las coordenadas rectangulares cartesianas.

EJEMPLO 2. Constrúyase una curva dada por la ecuación $r = 6 \cos \varphi$.

◀ Indiquemos, ante todo, lo siguiente: si el punto $M(r, \varphi)$ pertenece a la curva dada, entonces para el punto mencionado el $\cos \varphi = \frac{1}{6} r \geqslant 0$, y, por consiguiente, toda la curva está situada en el sector $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Con el fin de construir la curva, pasemos en su ecuación a las coordenadas cartesianas. Al multiplicar ambos miembros de la ecuación $r = 6 \cos \varphi$ por r, obtenemos $r^2 = 6r \cos \varphi$, de donde, en vista de las fórmulas del cambio (7), $x^2 + y^2 = 6x$, ó $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. De este modo, la curva dada es una circunferencia de radio 3 y el centro en el punto M_0 cuyas coordenadas son $x_0 = 3$, $y_0 = 0$, o bien $r_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$. ▶

EJEMPLO 3. Dedúzcase la ecuación de una recta en el sistema polar de coordenadas.

◀ Si la recta L pasa por el polo y su coeficiente angular respecto al eje polar es igual a k, entonces la ecuación de esta recta es $\operatorname{tg} \varphi = k$.

Supongamos ahora que la recta L no pasa por el polo. Escribamos la ecuación normal de esta recta en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$$

y pasemos en esta ecuación a las coordenadas polares. Obtenemos (teniendo presente que $\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha$):

$$r \cos \varphi \cos \alpha + r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha - p = 0.$$

$$r \cos (\varphi - \alpha) = p,$$

$$r = \frac{p}{\cos (\varphi - \alpha)}.$$

La ecuación (8) es precisamente la ecuación buscada de la recta en el sistema polar de coordenadas. Esta ecuación puede obtenerse también directamente del siguiente hecho evidente: $M_1 \in L \Leftrightarrow \operatorname{pr}_{\alpha} r = r \cos (\varphi - \alpha) = \text{const} = p$ (fig. 16) ▶

EJEMPLO 4. Sea Γ una elipse, una rama de la hipérbola o parábola, sea F el foco de esta curva y D, la directriz correspondiente. Dedúzcase la ecuación de la curva Γ en el sistema polar de coordenadas cuyo polo coincide con el foco y el eje polar está orientado igual que el eje de la curva (fig. 17).

◀ La propiedad general de la elipse, hipérbola y parábola consiste en lo siguiente (véanse los problemas 3.33, 3.53 y 3.71):

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{\rho(M, F)}{\rho(M, D)} = \text{const} = e, \qquad (9)$$

donde e es la excentricidad de la curva ($e < 1$ para la elipse, $e > 1$ para la hipérbola y $e = 1$ para la parábola).

Designemos mediante p/e la distancia entre el foco y la directriz (p es el parámetro de la curva llamado diámetro semifocal). Entonces,

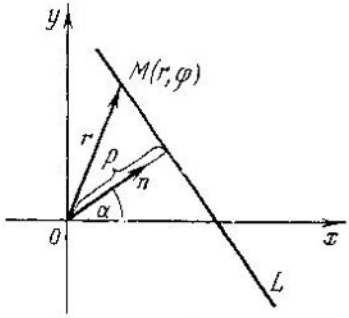


Fig. 16

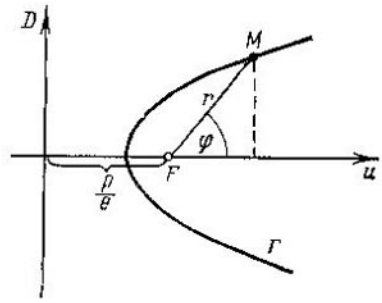


Fig. 17

de la figura 17 se deduce que $\rho(M, F) = r$ y $\rho(M, D) = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$. Sustituyendo estas expresiones en (9), obtenemos

$$\frac{r}{\frac{p}{e} + r\cos\varphi} = e,$$

de donde

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \qquad (10)$$

La ecuación (10) es precisamente la ecuación buscada en el sistema polar de coordenadas, común para la elipse, hipérbola y parábola. ▶

Escríbanse las ecuaciones de las curvas dadas en las coordenadas polares:

3.81. $y = x$. **3.82.** $y = 1$. **3.83.** $x + y - 1 = 0$.

3.84. $x^2 + y^2 = a^2$. **3.85.** $x^2 - y^2 = a^2$.

3.86. $x^2 + y^2 = ax$.

Escríbanse las ecuaciones de las curvas dadas en las coordenadas rectangulares cartesianas y constrúyanse dichas curvas:

3.87. $r = 5$. **3.88.** $\operatorname{tg}\varphi = -1$. **3.89.** $r\cos\varphi = 2$.

3.90. $r\operatorname{sen}\varphi = 1$. **3.91.** $r = \dfrac{1}{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}$.

3.92. $r = \dfrac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}$. 3.93. $r = 2a \cos \varphi$.

3.94. $r = 2a \operatorname{sen} \varphi$. 3.95. $\operatorname{sen} \varphi = 1/\sqrt{5}$.

3.96. $\operatorname{sen} r = 1/2$. 3.97. $r^2 \operatorname{sen} 2\varphi = 2a^2$.

3.98. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

3.99. Escríbanse en las coordenadas polares las ecuaciones:

a) de una recta que es perpendicular al eje polar y corta en el mismo un segmento igual a 3;

b) de un rayo que parte del polo, formando con el eje polar un ángulo igual a $\pi/3$;

c) de una recta que pasa por el polo y forma con el eje polar un ángulo igual a $\pi/4$.

3.100. Escríbase en las coordenadas polares la ecuación de una circunferencia, si:

a) el radio $R = 5$, la circunferencia pasa por el polo y su centro se dispone en el eje polar;

b) el radio $R = 3$ y la circunferencia es tangente en el polo al eje polar.

3.101. Determínense las coordenadas polares del centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias:

a) $r = 4 \cos \varphi$; b) $r = 3 \operatorname{sen} \varphi$; c) $r = -5 \operatorname{sen} \varphi$;

d) $r = 6 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$; e) $r = 8 \operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$;

f) $r = 8 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$.

3.102. Dedúzcase en el sistema polar de coordenadas la ecuación de una circunferencia de radio R, con el centro en el punto $C(r_0, \varphi_0)$.

3.103. Escríbase la ecuación polar para la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, considerando que el eje polar está orientado igual que el eje de abscisas, mientras que el polo se encuentra:

a) en el foco izquierdo; b) en el foco derecho.

3.104. Escríbase la ecuación polar para la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, considerando que el eje polar está orientado igual que el de abscisas, mientras que el polo se halla:

a) en el foco izquierdo; b) en el foco derecho.

3.105. Escríbase la ecuación polar para la parábola $y^2 = 6x$, considerando que el eje polar está orientado igual que el eje de abscisas y el polo se encuentra en el foco de la parábola.

3.106. Escríbanse las ecuaciones canónicas de las siguientes curvas de segundo orden:

a) $r = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$; b) $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; c) $r = \dfrac{3}{1 - \cos\varphi}$.

3.107. Dedúzcase la ecuación polar de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a condición de que el eje polar tiene la misma dirección que el eje Ox y el polo se encuentra en el centro de la elipse.

3.108. Dedúzcase la ecuación polar de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a condición de que el eje polar está orientado igual que el eje Ox y el polo se encuentra en el centro de la hipérbola.

3.109. Dedúzcase la ecuación polar de la parábola $y^2 = 2px$ a condición de que el eje polar está orientado igual que el eje Ox y el polo se encuentra en el vértice de la parábola.

4. Ecuaciones paramétricas de una curva. Sean dadas las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, continuas en cierto intervalo I del eje numérico (I puede ser representado por el intervalo (a, b), el segmento $[a, b]$ y también por uno de los semiintervalos $(a, b]$ o bien $[a, b)$, además no se excluyen los casos en que $a = -\infty$ y/o $b = +\infty$). Las ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I, \tag{10}$$

se denominan *ecuaciones paramétricas* de la curva Γ en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas, siempre que se cumple la siguiente condición: para todo valor del parámetro $t \in I$ el punto $M(\varphi(t), \psi(t))$ pertenece a la curva Γ, y, viceversa, para todo punto $M(x, y)$ de la curva Γ existe tal valor del parámetro $t \in I$ que $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$. Eliminando el parámetro t de las ecuaciones (10), podemos representar la ecuación de la curva en la forma $F(x, y) = 0$.

Análogamente se determinan las ecuaciones paramétricas de la curva en coordenadas polares.

EJEMPLO 5. Muéstrese que las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

definen la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

◀ Si el punto $M\ (x, y)$ es tal que $x = a \cos t$ e $y = a \operatorname{sen} t$ para cierto valor de $t \in [0, 2\pi)$, entonces

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2,$$

es decir, el punto $M\ (x, y)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Lo recíproco es también cierto: si el punto $M\ (x, y)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, entonces poniendo $t = (\widehat{OM}, i)$, $t \in [0, 2\pi)$, obtendremos $x = a \cos t$ e $y = a \operatorname{sen} t$. ▶

Ejemplo 6. La curva Γ viene dada por la ecuación polar $r = 2R \operatorname{sen} \varphi$. Fórmense las ecuaciones paramétricas de esta curva en las coordenadas polares y rectangulares cartesianas, tomando a título de parámetro el ángulo polar φ.

◀ No es difícil convencerse de que la curva dada es una circunferencia de radio R, con el centro en el punto $C\ (0, R)$. Las ecuaciones paramétricas de esta curva en coordenadas polares son:

$$r = 2R \operatorname{sen} t, \quad \varphi = t, \quad t \in [0, \pi).$$

Las ecuaciones paramétricas en las coordenadas rectangulares cartesianas se obtienen, si en las fórmulas del cambio $x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$ sustituimos r y φ por sus expresiones en forma de las funciones del parámetro t. Como resultado obtendremos:

$$x = r\ (t) \cos \varphi\ (t) = R \operatorname{sen} 2t,$$
$$y = r\ (t) \operatorname{sen} \varphi\ (t) = R\ (1 - \cos 2t), \quad t \in [0, \pi). \blacktriangleright$$

3.110. El rayo $\Gamma = \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0, y \geqslant 0\}$ tiene por origen el punto $M_0(-1, 0)$ (¡compruébese!). Fórmense las ecuaciones paramétricas de este rayo, tomando a título de parámetro:

a) la abscisa x; b) la ordenada y;

c) la distancia $\rho\ (M, M_0)$ entre el punto $M \in \Gamma$ y el vértice M_0 del rayo;

d) el ángulo polar, si el polo coincide con el origen de coordenadas y el eje polar está orientado igual que el eje Ox.

3.111. Fórmense las ecuaciones paramétricas de un segmento cuyos extremos son los puntos $M_1\ (1, 1)$ y $M_2\ (2, 3)$, tomando a título de parámetro:

a) la distancia $\rho\ (M, M_1)$; b) la distancia $\rho\ (M, M_2)$.

3.112. Fórmense las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio R, con el centro en el punto $M_0\ (x_0, y_0)$, tomando a título de parámetro t el ángulo entre el eje Ox y el vector $\overrightarrow{M_0M}$, calculado en sentido antihorario.

3.313. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2Rx$, tomando a título de parámetro el ángulo polar, si el eje polar está orientado igual que el eje Ox, y el polo se encuentra:

a) en el origen de coordenadas; b) en el centro de la circunferencia.

En los problemas 3.114—3.122 se pide hallar, eliminando el parámetro t, las ecuaciones de las curvas dadas en la forma $F(x, y) = 0$ y construir dichas curvas.

3.114. $x = -1 + 2t$, $y = 2 - t$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

3.115. $x = t^2 - 2t + 1$, $y = t - 1$, $t \in (-\infty, +\infty)$

3.116. $x = -1 + 2\cos t$, $y = 3 + 2 \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi)$.

3.117. $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi)$.

3.118. $x = 1 + 2 \sec t$, $y = -1 + \operatorname{tg} t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$

3.119. $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, $t \in (0, +\infty)$.

3.120. $x = 2R \cos^2 t$, $y = R \operatorname{sen} 2t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2)$.

3.121. $x = R \operatorname{sen} 2t$, $y = 2R \operatorname{sen}^2 t$, $t \in [0, \pi)$.

3.122. $x = 2p \operatorname{ctg}^2 t$, $y = 2p \operatorname{ctg} t$, $t \in (0, \pi/2]$.

3.123. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tomando a título de parámetro t el ángulo formado por el eje Ox y el radio vector $\overline{OM}$ y calculado en el sentido antihorario.

3.124. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, tomando a título de parámetro t el ángulo entre el eje Ox y el radio vector $\overline{OM}$, calculado en el sentido antihorario.

3.125. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la parábola $y^2 = 2px$, tomando a título de parámetro:

a) la ordenada y;

b) el ángulo entre el eje Ox y el vector $\overline{OM}$ calculado en el sentido antihorario.

c) el ángulo entre el eje Ox y el radio vector focal $\overline{FM}$ calculado en el sentido antihorario.

5. Algunas curvas que se encuentran en las matemáticas y en sus aplicaciones. En este punto que lleva un carácter informativo se aducen unas ecuaciones y se indican las propiedades geométricas fundamentales de una serie de curvas especiales (algebraicas y trascendentes) que se encuentran en los cálculos prácticos de ingeniería. La deducción de las ecuaciones de dichas curvas puede ofrecerse a título de problemas de dificultad algo elevada al estudiar el curso de geometría analítica. El estudio bastante detallado de la forma de las curvas puede realizarse con ayuda de los métodos aceptados en el cálculo diferencial.

1. *Espirales*: *espiral de Arquímedes* $r = a\varphi$ (fig. 18), *espiral hiperbólica* $r = \frac{a}{\varphi}$ (fig. 19), *espiral logarítmica* $r = a^{\varphi}$ (fig. 20); la flecha

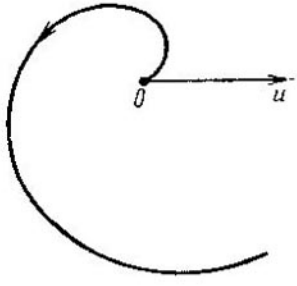


Fig. 18

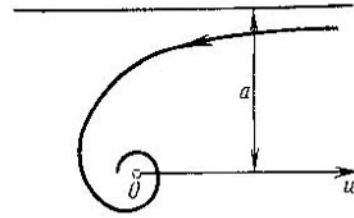


Fig. 19

indica la dirección de recorrido de la curva correspondiente al crecimiento de φ.

2. *Lemniscata de Bernoulli* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$ (fig. 21) o bien $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ (el polo se sitúa en el punto O). La propiedad

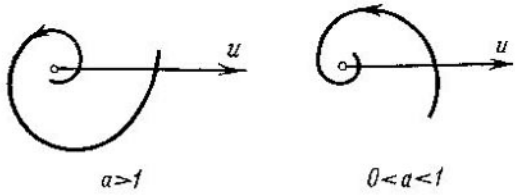


Fig. 20

característica: $| F_1M | \cdot | F_2M | = \text{const} = a^2$, donde $F_1 (-a, 0)$, $F_2 (a, 0)$.

3. *Cisoide* $y^2 (2R - x) = x^3$ (fig. 22), o bien $r = 2R \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} \varphi$ (el polo se sitúa en el punto O). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto O se tiene $| OM | = | BC |$.

4. *Concoide* $x^2y^2 + (x + a)^2 (x^2 - b^2) = 0$ (fig. 23), o bien $r = \frac{a}{\cos \varphi} \pm b$ (el polo está situado en el punto A). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto A $(-a, 0)$ se tiene $| BM | = | BN | = \text{const} = b$.

5. *Estrofoide* $x^2 ((x + a)^2 + y^2) = a^2y^2$ (fig. 24), o bien $r = \frac{a}{\cos \varphi} \pm a \operatorname{tg} \varphi$ (el polo se ha situado en el punto A). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto A $(-a, 0)$ se tiene $| BM | = | BN | = | OB |$.

6. *Caracol de Pascal* $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2 (x^2 + y^2)$ (fig. 25), o bien $r = 2a \cos \varphi \pm b$ (el polo se ha situado en el punto O). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto O se tiene $|BM| = |BN| = \text{const} = b$.

7. *Rosácea de cuatro pétalos* $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ (fig. 26), o bien $r = a|\operatorname{sen} 2\varphi|$ (el polo se ha situado en el punto O). La propiedad característica es: todo punto M de esta curva es una base de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas sobre el segmento

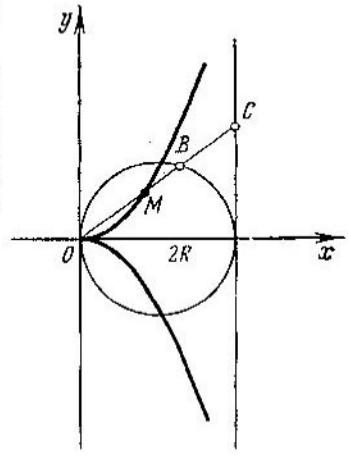


Fig. 22

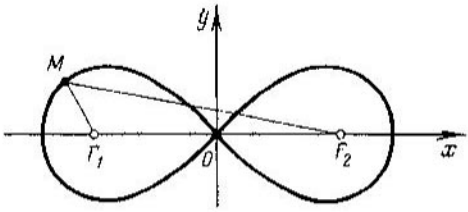


Fig. 21

$[AB]$ de longitud constante $2a$, el cual se desliza de tal manera que sus extremos siempre se encuentran en los ejes coordenados.

8. *Astroide* $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $t \in [0, 2\pi)$, o bien $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (fig. 27). La propiedad característica es: todo punto M

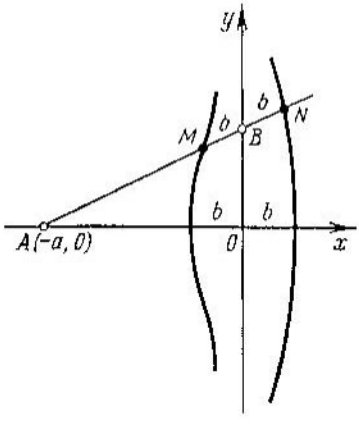


Fig. 23

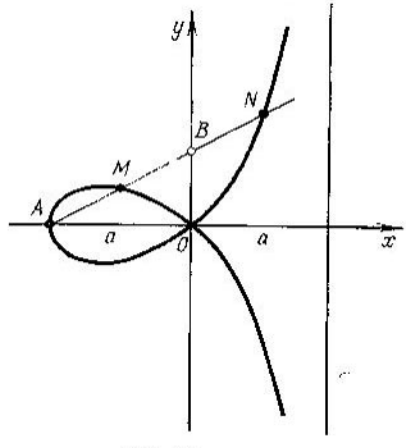


Fig. 24

de esta curva es la base de una perpendicular $[PM]$ al segmento $[AB]$ de longitud constante que se desplaza de tal manera que sus extremos siempre se encuentran en los ejes coordenados.

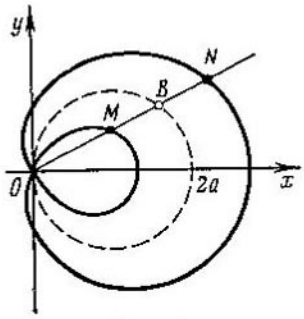


Fig. 25

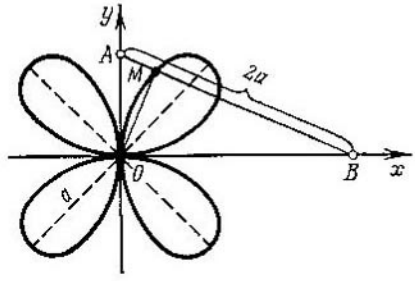


Fig. 26

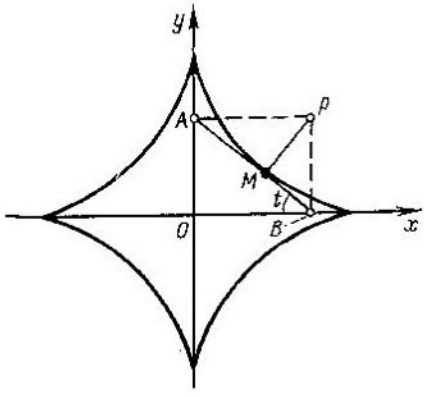


Fig. 27

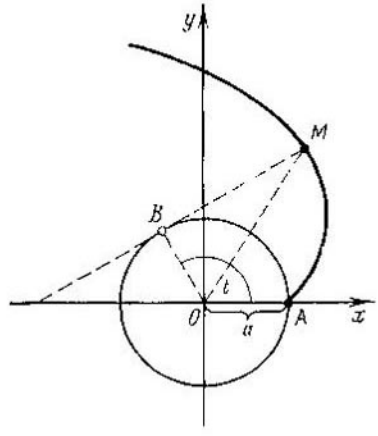


Fig. 28

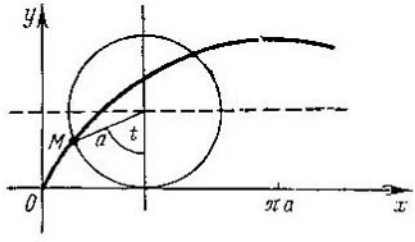


Fig. 29

9. *Envolvente de la circunferencia* $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$, $t \in [0, \infty)$ (fig. 28). La propiedad característica es: cada punto M de esta curva es el extremo de un hilo el cual, quedando siempre tenso, se desenrolla de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

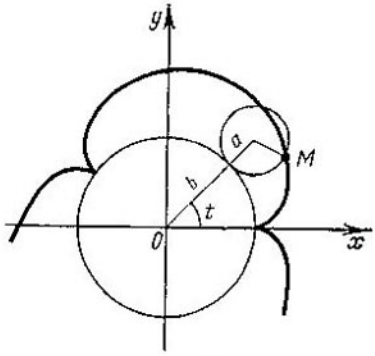


Fig. 30

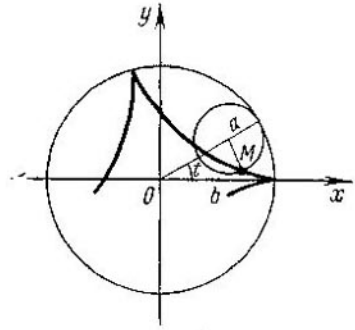


Fig. 31

(en el instante inicial el extremo del hilo se encuentra en el punto $A(a, 0)$).

10. *Cicloide* $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in (-\infty, -\infty)$ (fig. 29). La propiedad característica es: la curva coincide con la

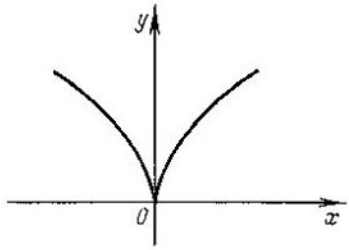


Fig. 32

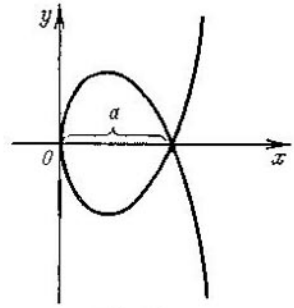


Fig. 33

trayectoria del punto M de una circunferencia de radio a, la cual rueda, sin deslizamiento, por el eje Ox (en el instante inicial el punto M se encuentra en el origen de coordenadas).

11. *Epicicloide* $x = (a + b)\cos t - a\cos\dfrac{a+b}{a}t$, $y = (a+b)\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{a}t$, $t \in [0, \infty)$ (fig. 30). La propiedad característica es:

la curva coincide con la trayectoria del punto M de una circunferencia de radio a, la cual rueda sin deslizamiento por la circunferencia $x^2 + y^2 = b^2$, quedando siempre fuera de ésta (en el instante inicial el punto M se encuentra en la posición $A\ (b, 0)$). En el caso particular, cuando $a = b$, la curva correspondiente recibe el nombre de *cardioide*.

12. *Hipocicloide* $x = (b-a)\cos t + a\cos\dfrac{b-a}{a}t$, $y = (b-a)\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen}\dfrac{b-a}{a}t$, $t \in [0, \infty)$ (fig. 31). La propiedad característica es: la curva coincide con la traectoria del punto M de una circunferencia de radio a, la cual rueda sin deslizamiento por la circunferencia

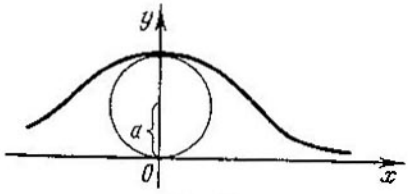


Fig. 34

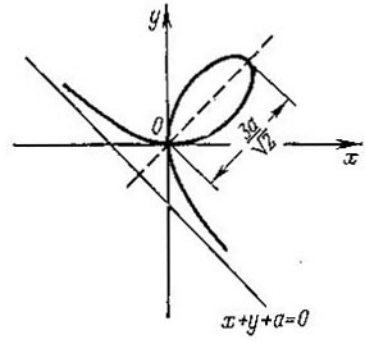


Fig. 35

$x^2 + y^2 = b^2$, quedando siempre en el interior de la misma (en el instante inicial el punto M se encuentra en la posición $A\ (b, 0)$). En el caso particular, cuando $a = b/4$, esta curva coincide con la astroide.

13. *Parábola semicúbica* $y^2 = ax^3$ (fig. 32).

14. *Parábola de bucle* $ay^2 = x\,(x-a)^2$ (fig. 33).

15. *Curva de Agnesi* $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ (fig. 34).

16. *Folio de Descartes* $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (fig. 35).

§ 4. Superficies y curvas en el espacio

1. Ecuaciones de la superficie y de la curva en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas. Se dice que la superficie S en el sistema de coordenadas $Oxyz$ tiene la ecuación

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

si se cumple la siguiente condición: el punto $M\ (x, y, z)$ pertenece a la superficie S cuando, y sólo cuando, sus coordenadas x, y y z satisfacen la relación (1). Si, en particular, $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, la ecuación (1) puede ser escrita en la forma

$$z = f(x, y), \tag{2}$$

y en este caso la superficie S coincide con la gráfica de la función de dos variables $f(x, y)$.

La curva Γ en el espacio se define, en el caso general, como una línea de intersección de ciertas superficies S_1 y S_2 (definidas de manera no unívoca), es decir, prefijando un sistema de dos ecuaciones

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

EJEMPLO 1. Dedúzcase la ecuación de una superficie, cada punto de la cual es dos veces más próximo al punto A (2, 0, 0) que al punto B (—4, 0, 0).

◀ Si S es la superficie definida por las condiciones del problema, entonces $M(x, y, z) \in S$ cuando, y sólo cuando, $\rho(M, B) = 2\rho(M, A)$ o bien

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}.$$

De aquí obtenemos

$$(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 4((x-2)^2 + y^2 + z^2),$$
$$3x^2 - 24x + 3y^2 + 3z^2 = 0$$

o bien, formando un cuadrado perfecto en los sumandos que contienen x,

$$(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16. \tag{4}$$

La ecuación (4) es precisamente la ecuación buscada de la superficie. De esta ecuación se ve que la superficie dada S es una esfera de radio 4, con el centro en el punto M_0 (4, 0, 0). ▶

EJEMPLO 2. Investíguese la forma de la curva Γ, dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=36, \\ y+z=0. \end{cases} \tag{5}$$

Determínese la forma de su proyección sobre el plano Oxy.

◀ La curva Γ viene dada como una línea de intersección de la esfera $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36$ con el plano $y + z = 0$, y, por consiguiente, es una circunferencia. Como el centro de la esfera C (1, 0, 0) se encuentra en el plano de la sección $y + z = 0$, el centro de la circunferencia coincide con el punto C y su radio es igual al de la esfera, es decir, a $R = 4$.

Establezcamos la forma de la proyección de la circunferencia Γ sobre el plano Oxy. Eliminando z del sistema (5), obtenemos $(x-1)^2 + 2y^2 = 36$, o bien $\dfrac{(x-1)^2}{36} + \dfrac{y^2}{18} = 1$. De aquí que la proyección buscada es una elipse cuyos ejes están orientados igual que los ejes Ox y Oy, el centro se encuentra en el punto C' (1, 0) y los semiejes son $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$. ▶

Establézcase qué imágenes geométricas se definen por las ecuaciones dadas:

4.1. $z + 5 = 0$. **4.2.** $x - 2y + z - 1 = 0$.

4.3. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. **4.4.** $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$.

4.5. $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$. **4.6.** $x^2 + 4z^2 = 0$.
4.7. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 7 = 0$. **4.8.** $x^2 - 4z^2 = 0$.
4.9. $xz = 0$. **4.10.** $xyz = 0$.
4.11. $x^2 - 4x = 0$. **4.12.** $xy - y^2 = 0$.

4.13. Dedúzcase la ecuación de una superficie, para la cual la diferencia entre los cuadrados de las distancias de cada punto de la superficie hasta los puntos $F_1(2, 3, -5)$ y $F_2(2, -7, -5)$ es igual a 13.

4.14. Dedúzcase la ecuación de una superficie, para la cual la suma de los cuadrados de las distancias de cada punto de la superficie hasta los puntos $F_1(-a, 0, 0)$ y $F_2(a, 0, 0)$ es igual al número constante $4a^2$.

4.15. Dedúzcase la ecuación de una superficie, para la cual la suma de las distancias entre cualquier punto de la superficie y los puntos $F_1(0, 0, -4)$ y $F_2(0, 0, 4)$ es igual a 10.

4.16. Dedúzcase la ecuación de la superficie, para la cual el módulo de la diferencia entre las distancias de cada punto de la superficie hasta los puntos $F_1(0, -5, 0)$ y $F_2(0, 5, 0)$ es igual a 6.

4.17. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen definen una esfera, hállese su centro C y el radio R:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$.

4.18. Fórmese la ecuación de una esfera en cada uno de los siguientes casos (designaciones: C es el centro de la esfera, R es el radio, M, M_1, M_2, M_3 son los puntos en la esfera):

a) $C(-1, 2, 0)$, $R = 2$; b) $M(2, -1, -3)$, $C(3, -2, 1)$;

c) $M_1(2, -3, 5)$ y $M_2(4, 1, -3)$ son los extremos del diámetro de la esfera;

d) $C(3, -5, -2)$, el plano $2x - y - 3z + 11 = 0$ es tangente a la esfera;

e) $M_1(3, 1, -3)$, $M_2(-2, 4, 1)$, $M_3(-5, 0, 0)$, $C \in P$: $2x + y - z + 3 = 0$.

4.19. Fórmese la ecuación de una esfera cuyo centro se ubica en la recta

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

y que toca los planos $x + 2y - 2z - 2 = 0$ y $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

4.20. Fórmese la ecuación de una esfera inscrita en un tetraedro formado por los planos

$$3x - 2y + 6z - 8 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

4.21. Fórmense las ecuaciones paramétricas del diámetro de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + z - 11 = 0$, que sea perpendicular al plano $5x - y + 2z - 17 = 0$.

4.22. En la esfera $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ hállese un punto M_0 que sea el más próximo al plano $3x - 4z + 19 = 0$ y calcúlese la distancia de este punto hasta el plano.

4.23. Determínese la disposición de un plano respecto de una esfera (la corta, es tangente a ella o pasa fuera de ella), si el plano y la esfera se han dado por las ecuaciones:

a) $z = 3,\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$;

b) $y = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$;

c) $x = 5,\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$.

4.24. Establézcase qué curvas se definen por las siguientes ecuaciones

a) $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ z + 2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49, \\ y = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20, \\ z - 2 = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 25 = 0. \end{cases}$

4.25. Hállense el centro y el radio de una circunferencia:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10y, \\ x + 2y + 2z - 19 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0. \end{cases}$

● El centro de una circunferencia es la proyección del centro de la esfera sobre el plano.

4.26. Hállese la proyección sobre el plano $z = 0$ de la sección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4(x - 2y - 2z)$ por un plano que pasa por el centro de la esfera y que es perpendicular a la recta $x = 0,\ y + z = 0$.

4.27. Los puntos A (3, −2, 5), y B (−1, 6, −3) son los extremos del diámetro de una circunferencia que pasa

por el punto C (1, —4, 1). Fórmense las ecuaciones de esta circunferencia.

4.28. Fórmense las ecuaciones de una circunferencia que pasa por los tres puntos M_1 (3, —1, —2), M_2 (1, 1, —2) y M_3 (—1, 3, 0).

2. Superficies algebraicas de segundo grado. Se llama *superficie algebraica de segundo grado* la superficie S cuya ecuación en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas tiene la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \qquad (6)$$

donde no todos los coeficientes de los términos de segundo orden son iguales a cero simultáneamente (de lo contrario, S sería una superficie algebraica de primer orden, es decir, un plano).

Puede resultar que la ecuación (6) defina la así llamada superficie *degenerada* (un conjunto vacío, un punto, un plano, un par de planos,

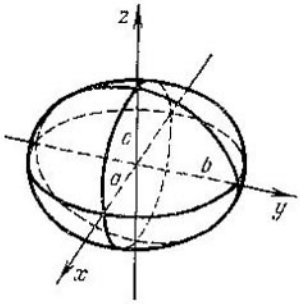
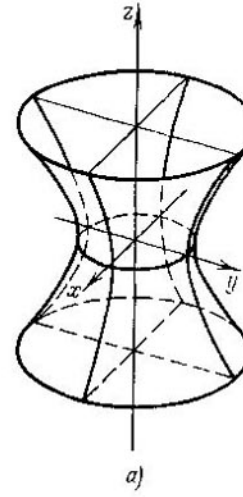


Fig. 36



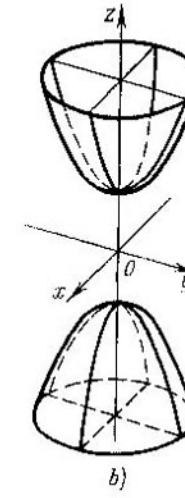


Fig. 37

una recta). Si, en cambio, la superficie es *regular*, entonces transformando el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas, su ecuación (6) puede ser reducida a una de las siguientes formas que se llaman *canónicas* y que determinan el tipo de superficie.

1. *Elipsoide*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (fig. 36).

2. *Hiperboloide*

a) *de una hoja*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (fig. 37, *a*);

b) *de dos hojas*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (fig. 37, *b*).

3. *Cono de segundo grado*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (fig. 38).

4. *Paraboloide*

a) *elíptico*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ (fig. 39, *a*);

b) *hiperbólico*: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ (fig. 39, *b*).

5. *Cilindro de segundo grado*

a) *elíptico*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (fig. 40, *a*);

b) *hiperbólico*: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (fig. 40, *b*);

c) *parabólico*: $y^2=2px, \quad p>0$ (fig. 40, *c*).

Los métodos generales de reducción de la ecuación (6) a una forma canónica se apoyan en la teoría de las formas cuadráticas y se

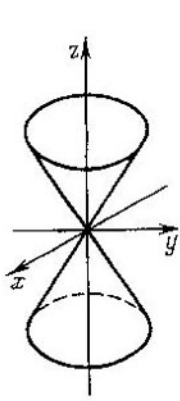
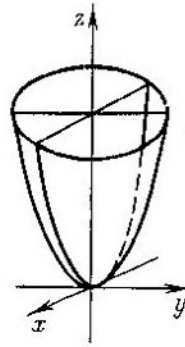
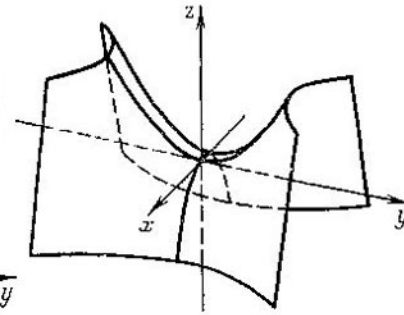


Fig. 38



a)



b)

Fig. 39

examinan en el p. 4, § 3, cap. 4. El objetivo del punto presente consiste en el estudio de las propiedades geométricas fundamentales de las superficies regulares de segundo grado sobre la base de sus ecuaciones canónicas.

El *método* principal para investigar las formas de las superficies según su ecuación es el *de secciones*.

EJEMPLO 3. Investíguese mediante el método de secciones la forma y constrúyase una superficie dada por la ecuación

$$z=2\left(1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}\right). \qquad (7)$$

◀ En la sección de la superficie por un plano horizontal $z = h$ tenemos una curva Γ_h cuya proyección sobre el plano Oxy se define por la ecuación

$$h = 2\left(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}\right),$$

o bien

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 2 - h. \tag{8}$$

La ecuación (8) no tiene, para $h > 2$, soluciones con relación a (x, y). Esto significa que la sección correspondiente está vacía, es decir, la

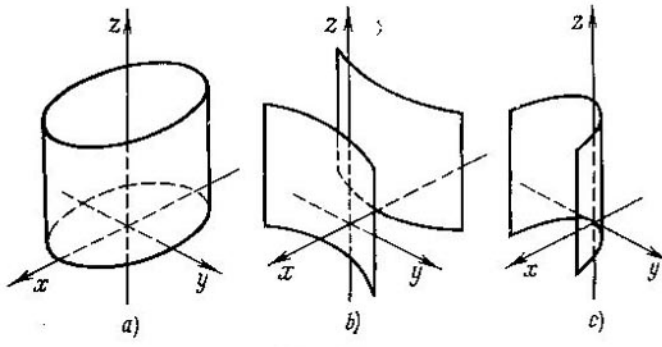


Fig. 40

superficie en consideración se dispone íntegramente por debajo del plano $z = 2$. Cuando $h \leqslant 2$, la ecuación (8) define una elipse cuyos semiejes son $a = 4\sqrt{2 - h}$ y $b = 5\sqrt{2 - h}$, que se degenera en el punto $x = y = 0$ para $h = 2$. Observemos que todas las elipses que se obtienen en las secciones de la superficie por los planos $x = h \leqslant 2$ son semejantes entre sí $\left(\frac{a}{b} = \text{const} = \frac{4}{5}\right)$, además si h va decreciendo, sus semiejes crecen de manera monótona e indefenida.

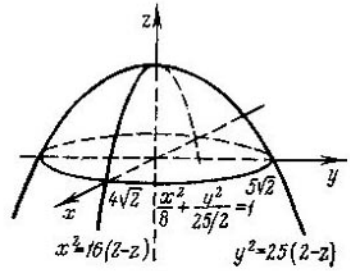


Fig. 41

La información obtenida es suficiente para que se pueda construir un croquis de la superficie. La precisión ulterior de su forma puede obtenerse al considerar las secciones mediante planos coordenados Oxz y Oyz. La sección del plano Oxz: $y = 0$ nos da una curva $x^2 = 16(2 - z)$, es decir, una parábola de parámetro $p = 8$, con el vértice en el punto $x = 0$, $z = 2$ y las ramas dirigidas al lado del decrecimiento de los valores z. Por fin, la sección del plano Oyz: $x = 0$ da la

parábola $y^2 = 25(2 - z)$ de parámetro $p = \frac{25}{2}$, con el vértice en el punto $y = 0$, $z = 2$ y las ramas de dirección análoga.

La investigación realizada permite, ahora, exponer detalladamente la superficie dada (fig. 41).

La superficie dada es un paraboloide elíptico. La transformación de las coordenadas

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = 2 - z$$

(que se reduce al desplazamiento del origen en el punto (0, 0, 2), que constituye el vértice del paraboloide, y a la inversión de la dirección del eje Oz) conduce su ecuación inicial (7) a la forma canónica

$$\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{25} = z'. \blacktriangleright \tag{9}$$

Establézcase el tipo de superficies dadas y constrúyanse éstas:

4.29. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$. **4.30.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$.

4.31. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. **4.32.** $x^2 - y^2 = z^2$.

4.33. $x^2 + y^2 = 2az$, $a \neq 0$. **4.34.** $x^2 - y^2 = 2az$, $a \neq 0$.

4.35. $2z = x^2 + \frac{y^2}{2}$. **4.36.** $x^2 = 2az$, $a \neq 0$.

4.37. $z = 2 + x^2 + y^2$. **4.38.** $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$.

4.39. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$. **4.40.** $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$.

4.41*. Demuéstrese que la ecuación $z^2 = xy$ define un cono con vértice en el origen de coordenadas.

4.42*. Demuéstrese que la ecuación $z = xy$ define un paraboloide hiperbólico.

4.43. Denomínense y constrúyanse las superficies:

a) $x^2 + 2yz$; b) $z - a = xy$.

4.44. Fórmense las ecuaciones de las proyecciones sobre los planos coordenados de la sección de un paraboloide elíptico $y^2 + z^2 = x$ obtenida al cortarlo por el plano $x + 2y - z = 0$.

4.45. Establézcase cuáles de las curvas se definen por las ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z, \\ 3x - y + 6z - 14 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 2z, \\ x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$

4.46. Hállense los puntos de intersección de la superficie con una recta:

a) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ y $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ y $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$;

c) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ y $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

● Pásese a las ecuaciones paramétricas de la recta.

4.47. Demuéstrese que en cada uno de los casos que vienen más abajo la superficie y el plano dados tienen un punto común; hállense las coordenadas de este punto:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2y$, $\quad 2x-2y-z-10=0$;

b) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$, $\quad 5x+2z+5=0$;

c) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{9}=1$, $\quad 4x-3y+12z-54=0$.

4.48. Demuéstrese que el plano $2x-12y-z+16=0$ corta el paraboloide hiperbólico $x^2-4y^2=2z$ a lo largo de las generatrices rectilíneas (es decir, de las rectas situadas íntegramente en dicha superficie). Fórmense las ecuaciones de las generatrices mencionadas.

4.49. Demuéstrese que el plano $4x-5y-10z-20=0$ corta el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ a lo largo de las generatrices rectilíneas. Fórmense las ecuaciones de estas generatrices.

3. Clasificación de las superficies según el tipo de transformaciones de la simetría. Según sea el tipo de simetría, se pueden distinguir tres clases de superficies: cilíndricas, cónicas y superficies de revolución.

Se denomina *superficie cilíndrica* (*cilindro*) la superficie invariante respecto a las transformaciones del traslado paralelo $T(tq)$, determinadas por cualquier vector colineal a cierto vector $q(l, m, n)$. De esta definición proviene que si el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pertenece al cilindro S, entonces toda la recta $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, también pertenece a este cilindro.

Se ha adoptado la siguiente terminología: toda recta colineal respecto del vector $q(l, m, n)$ se denomina *eje* del cilindro S; las rectas $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)\in S$, pertenecientes ínte-

gramente al cilindro, se llaman *generatrices* del cilindro; toda curva Γ que se dispone en el cilindro y corta todas sus generatrices se llama *directriz* de este cilindro.

Sea $q\ (l, m, n)$ un vector cualquiera colineal respecto del eje del cilindro S, mientras que la directriz Γ está dada por las ecuaciones

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

El punto $M\ (x, y, z)$ pertenece al cilindro S cuando, y sólo cuando, existe tal número t que el punto de coordenadas $x + tl$, $y + tm$, $z + tn$ se sitúa en la generatriz Γ, es decir,

$$\begin{cases} F_1(x + tl, y + tm, z + tn) = 0, \\ F_2(x + tl, y + tm, z + tn) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Eliminando el parámetro t del sistema (10), obtendremos la relación del tipo $F(x, y, z) = 0$, la cual será precisamente la ecuación del cilindro dado.

EJEMPLO 4. Escríbase la ecuación de un cilindro cuyo eje coincide con el eje coordinado Oz y la directriz viene dada por las ecuaciones

$$F(x, y) = 0, \quad z - h = 0.$$

◀ Suponiendo $q = k\ (0, 0, 1)$, obtendremos el sistema (10) en la forma $F(x, y) = 0$, $z + t - h = 0$. Este resultado implica que el punto $M\ (x, y, z)$ pertenece al cilindro cuando, y sólo cuando, sus coordenadas x e y satisfacen la ecuación $F(x, y) = 0$ para un valor arbitrario de la coordenada z. Por consiguiente, la ecuación $F(x, y) = 0$, que describe la proyección de la directriz sobre el plano Oxy es precisamente la ecuación del cilindro dado. ▶

Constrúyanse las superficies cilíndricas dadas:

4.50. $y^2 + z^2 = 4$. 4.51. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4.52. $x^2 + y^2 = ax$. 4.53. $x^2 = 6z$. 4.54. $z = 4 - x^2$.

4.55. $x^2 - xy = 0$. 4.56. $x^2 - z^2 = 0$.

4.57. $y^2 + 2z^2 = 0$. 4.58. $xz = 4$. 4.59. $y^2 + z^2 = -z$.

4.60. Fórmense las ecuaciones de tres superficies cilíndricas descritas alrededor de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$ con los ejes paralelos a) al eje Ox; b) al eje Oy; c) al eje Oz, respectivamente.

4.61. Hállese la ecuación de un cilindro que proyecta la circunferencia

$$\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

sobre los planos: a) Oxy; b) Oxz; c) Oyz.

4.62. Hállese la ecuación de la proyección de la circunferencia

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=36, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25 \end{cases}$$

sobre los planos: a) Oxy; b) Oxz; c) Oyz.

4.63. Fórmese la ecuación de una superficie cada punto de la cual es equidistante de la recta $x = a$, $y = 0$ y el plano Oyz. Constrúyase esta superficie.

4.64. Fórmese la ecuación de un cilindro, si:

a) el eje es colineal al vector q (1, 2, 3) y la directriz viene definida por las ecuaciones $y^2 = 4x$, $z = 0$;

b) el eje es colineal al vector q (1, 1, 1) y la directriz viene definida por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$.

4.65. Una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ está iluminada por unos rayos paralelos a la recta $x = 0$, $y = z$. Hállese la forma de la sombra de la esfera sobre el plano Oxy.

4.66. Constrúyase un cuerpo limitado por las superficies $y^2 = x$, $z = 0$, $z = 4$, $x = 4$, y escríbase la ecuación de la diagonal de la cara situada en el plano $x = 4$.

Se denomina *superficie cónica* (*cono*) la superficie invariante respecto a las transformaciones de la homotecia $H(k, M_0)$ con un coeficiente arbitrario k y el centro en cierto punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ llamado *vértice* del cono. De esta definición proviene que si el punto $M_1(x_1, y_1, z_1)$ pertenece al cono, entonces toda recta $\frac{x-x_1}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_1}{z_1-z_0}$ que pasa por este punto y el vértice M_0 y que se llama *generatriz* del cono, se sitúa íntegramente en el cono. Toda recta Γ, que se dispone en el cono y que corta todas las generatrices de éste se llama *directriz* de este cono.

Sea dado un cono S cuyo vértice es $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y la directriz se expresa por las ecuaciones

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

El punto $M(x, y, z)$ pertenece al cono S cuando, y sólo cuando, existe un número t tal que un punto con las coordenadas $x + t(x - x_0)$, $y + t(y - y_0)$, $z + t(z - z_0)$ se sitúa en la generatriz Γ, es decir,

$$\begin{cases} F_1(x+t(x-x_0),\ y+t(y-y_0),\ z+t(z-z_0))=0, \\ F_2(x+t(x-x_0),\ y+t(y-y_0),\ z+t(z-z_0))=0. \end{cases} \quad (11)$$

Eliminando el parámetro t del sistema (11), obtendremos la ecuación del cono en la forma $F(x, y, z) = 0$.

EJEMPLO 5. Escríbase la ecuación de un cono cuyo vértice se encuentra en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y la directriz viene dada por las ecuaciones $F(x, y) = 0$, $z - h = 0$.

◀ El sistema (11) toma en estas condiciones la forma siguiente

$$\begin{cases} F(x+t(x-x_0),\quad y+t(y-y_0))=0, \\ z+t(z-z_0)-h=0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos $t=\dfrac{h-z}{z-z_0}=\dfrac{(h-z_0)-(z-z_0)}{z-z_0}=$

$=\dfrac{h-z_0}{z-z_0}-1$, lo que, al realizar la sustitución en la primera ecuación, nos da

$$F\left(x_0+(h-z_0)\frac{x-x_0}{z-z_0},\quad y_0+(h-z_0)\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0. \tag{12}$$

La ecuación (12) es precisamente la ecuación del cono dado. En un caso particular, cuando $x_0=y_0=z_0=0$ (el vértice del cono se encuentra en el origen de coordenadas), la ecuación del cono adquiere la forma

$$F\left(h\frac{x}{z},\ h\frac{y}{z}\right)=0. \tag{13}$$

Observemos que la ecuación (13) es *homogénea* respecto de x, y y z (es decir, no varía cuando x, y y z se sustituyen por tx, ty y tz para $t\neq 0$ arbitrario), mientras que la ecuación (12) es homogénea respecto de $x-x_0$, $y-y_0$ y $z-z_0$. ▶

4.67. Supongamos que la función de tres variables $F(x, y, z)$ es homogénea respecto de x, y y z, es decir,

$$\forall\, t\neq 0\ \exists s\in\mathbb{R}\ (F(tx,\ ty,\ tz)=t^sF(x,\ y,\ z)).$$

Muéstrese que la ecuación $F(x, y, z)=0$ define un cono con vértice en el origen de coordenadas, con la particularidad de que la curva

$$F\left(\frac{x}{h},\ \frac{y}{h},\ 1\right)=0,\quad z-h=0$$

es su directriz, cualquiera que sea h.

4.68. Fórmese la ecuación de un cono cuyo vértice se ubica en el origen de coordenadas y la directriz viene dada por las ecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=h; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+(y-6)^2+z^2=25, \\ y=3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=a; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-2z+1=0, \\ y-z+1=0. \end{cases}$

Constrúyanse los conos correspondientes.

4.69. Fórmese la ecuación de un cono, si están dadas las coordenadas del vértice M_0 y las ecuaciones de la directriz:

a) $M_0\,(0,\ -a,\ 0)$, $x^2 = 2py$, $z = h$;

b) $M_0\,(0,\ 0,\ c)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$;

c) $M_0\,(0,\ -a,\ 0)$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y + z = a$;

d) $M_0\,(3,\ -1,\ -2)$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x - y + z = 0$.

Constrúyanse los conos correspondientes.

4.70. Constrúyase un cono, determínense su vértice y la directriz en el plano $z = h$, si el cono está dado por la ecuación

a) $x^2 + (y - h)^2 - z^2 = 0$; b) $x^2 = 2yz$.

4.71. Fórmese la ecuación de un cono circular, para el cual los ejes coordenados sirven de generatrices.

4.72. Fórmense las ecuaciones de las proyecciones de una línea de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ sobre los ejes coordenados:

a) Oxy; b) Oxz; c) Oyz.

4.73. Una fuente de luz que se encuentra en el punto $M_0\,(5,\ 0,\ 0)$ ilumina la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Hállese la forma de la sombra en el plano Oyz.

Se denomina *superficie de revolución* una superficie invariante respecto de los giros $R\,(\varphi,\ n)$ en cualquier ángulo φ en torno a cierto eje fijo u. Esta superficie puede obtenerse por revolución en torno al eje u de una curva que se consigue en la sección de la superficie por cualquier plano que pasa por el eje de simetría.

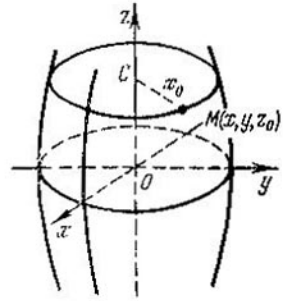


Fig. 42

EJEMPLO 6. Dedúzcase la ecuación de una superficie obtenida como resultado de la revolución de la curva $F\,(x,\ y) = 0$, $y = 0$ en torno al eje Oz (fig. 42).

◀ La sección de una superficie por un plano arbitrario $z = z_0$ es una circunferencia de radio x_0, con el centro en el punto $C\,(0,\ 0,\ z_0)$, siendo $F\,(x_0,\ z_0) = 0$. Por ello, para un punto arbitrario $M\,(x,\ y,\ z)$ de esta circunferencia tenemos: $z = z_0$ y $\rho\,(M,\ Oz) = \sqrt{x^2 + y^2} = x_0$. Sustituyendo estas ecuaciones en la relación $F\,(x_0,\ y_0) = 0$, obtenemos

$$F\left(\sqrt{x^2 + y^2},\ z\right) = 0. \qquad (14)$$

La ecuación (14) es precisamente la ecuación buscada de la superficie de revolución dada. ▶

4.74. Escríbase la ecuación de una superficie formada por la revolución de la curva $z = x^2$, $y = 0$:

a) en torno al eje Oz; b) en torno al eje Ox.

Constrúyanse dichas superficies.

4.75. Escríbase la ecuación de una superficie formada por la revolución de la recta $z = y$, $x = 0$:

a) en torno al eje Oy; b) en torno al eje Oz.

Constrúyanse ambas superficies.

4.76. Escríbase la ecuación de una superficie formada por la revolución en torno al eje Oz:

a) de la curva $z = e^{-x^2}$, $y = 0$;

b) de la curva $z = \frac{4}{x^2}$, $y = 0$.

Constrúyanse ambas superficies en el sistema inverso de coordenadas.

4.77. Muéstrese que la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$ es una superficie de revolución en torno al eje Ox. Escríbase la ecuación de la curva en el plano $z = 0$ que en su revolución forma la superficie mencionada.

4.78. Muéstrese que la superficie $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ es una superficie de revolución. Hállese su eje de simetría y las ecuaciones de una curva cualquiera por cuya revolución está formada dicha superficie.

RESPUESTAS

1.8. $\overline{MA} = -\frac{1}{2}(a+b)$, $\overline{MB} = \frac{1}{2}(a-b)$, $\overline{MC} = -\overline{MA}$, $\overline{MD} = -\overline{MB}$. **1.9.** $\overline{CD} = q-p$, $\overline{DE} = -p$, $\overline{EF} = -q$, $\overline{EA} = p-q$, $\overline{AC} = p+q$, $\overline{AD} = 2q$, $\overline{AE} = 2q-p$. **1.11.** $\overline{MM'} = \frac{1}{3}(\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'})$. **1.13.** $\overline{AB} = \frac{\lambda a - b}{1+\lambda}$, $\overline{BC} = \frac{a+b}{1+\lambda}$, $\overline{CD} = \frac{\lambda b - a}{1+\lambda}$, $\overline{DA} = -\frac{\lambda}{1+\lambda} \times (a+b)$. **1.15.** $\lambda = 5$. **1.18.** 0, 1, 2. **1.19.** $\lambda = \mu = 1$. **1.20.** a) $(-1/2, 1/2, 1/2)$; b) $(1/3, 1/3, 1/3)$. **1.21.** $(7/10, 3/20, 3/20)$. **1.22.** a) $(1/2, 0, 1/2)$; b) $(1, -1/2, 1/2)$. **1.23.** $\left(1 - \frac{1}{\lambda}, -1\right)$. **1.24.** a) $|a_1| = \sqrt{5}$, $a_{1,0}(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0)$; b) $\cos(\widehat{a_1, j}) = 2/\sqrt{5}$; c) $X(a) = -19/3$; d) $\mathrm{pr}_j a = Y(a) = 0$. **1.25.** $a = -2e$. **1.26.** $a = -\frac{4}{5}e_1 - \frac{2}{5}e_2$. **1.27.** $a = -2e_1 + e_2 - e_3$. **1.28.** a) $a_0(2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}, 0)$; b) $a - \frac{1}{2}b +$

$+c=d$ (3, 11/2, 0); c) $a+b-2c=-2j$; d) $\mathrm{pr}_j(a-b)=6$. **1.29.** $x=-5i+10j+10k$. **1.30.** $x=2i+2j+2k$. **1.31.** $x=\pm 5i+\frac{5}{\sqrt{2}}j-\frac{5}{\sqrt{2}}k$. **1.32.** $\alpha=-1$, $\beta=4$. **1.33.** $x=\frac{5}{3}(i+7j+2k)$. ● $x=\lambda(a_0+b_0)$, donde a_0 y b_0 son los versores de los vectores dados a y b. **1.34.** $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$. **1.35.** a) (3, −6, 6); b) (5, 5, 1); c) $(-5/\sqrt{2}, 7/\sqrt{2}, 5)$. **1.36.** D (9, −5, 6). **1.37.** C (6, −2), D (2, −4). **1.38.** M_1 (7, 0) y M_2 (−1, 0). **1.39.** M (0, 1, 0). **1.40.** 7. **1.41.** (4, 0) y (5, 2). **1.42.** (−1, 2, 4) y (8, −4, −2). **1.43.** (−10, 10, −17). ● Desarróllese el vector $\overline{OD}$ según una base formada de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$. **1.44.** (10, −5, 0). ● Desarróllese el vector $\overline{OB}$ según una base formada de los vectores i, j, $\overline{OA}$. **1.46.** $\sqrt{182}/3$. **1.47.** (11/7, 10/7, 18/7). **1.49.** a) 9; b) −61; c) 13. **1.50.** $\alpha=\pm 3/5$. **1.51.** $\widehat{(e_1, e_2)}=\pi/3$. **1.52.** $\alpha=\arccos\frac{4}{5}$. **1.53.** 5. **1.55.** $\overline{DC}=\frac{|a|-|b|}{|a|}a$, $\overline{CB}=\frac{|b|}{|a|}a-b$, $\overline{AC}=\frac{|a|-|b|}{|a|}a+b$, $\overline{DB}=a-b$. ● Hállese primero el vector $\overline{AK}$, donde K es tal punto de la base que $|\overline{AK}|=|\overline{AB}|$. **1.56.** −13. **1.57.** a) 22; b) −200; c) 41; d) $\sqrt{105}$; e) 11/3, f) 22/7; g) $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-1/3$, $\cos\gamma=-2/3$; h) $-84/\sqrt{129}$; i) 11/21. **1.58.** M_1 (1, 0) y M_2 (6, 0). **1.59.** $|AB|=5$, $|BC|=5\sqrt{2}$, $|AC|=5$; $\hat{A}=\pi/2$, $\hat{B}=\hat{C}=\pi/4$. **1.61.** $\frac{15}{7\sqrt{85}}$. **1.62.** 4. **1.63.** −4/5. **1.65.** $\pi/6$. **1.66.** (1, 1/2, −1/2). **1.67.** (−3, 3, 3). **1.68.** $a_j=2j$, $a_{i,k}=-i+k$. **1.69.** a) (2/3, 2/3, 2/3); b) (−5/3, 4/3, 1/3). **1.70.** (−2, 0, 2). **1.71.** $-i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$. ● El vector a_{e_1, e_2} tiene la forma $a_{e_1, e_2}=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2$, donde los coeficientes λ_1 y λ_2 pueden ser determinados de la condición de perpendicularidad del vector $a-a_{e_1, e_2}$ al plano de los vectores e_1 y e_2. **1.72.** $x'=(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\operatorname{sen}\varphi$, $y'=(x-x_0)\operatorname{sen}\varphi+(y-y_0)\cos\varphi$. **1.73.** $X'=X\cos\varphi+Y\operatorname{sen}\varphi$, $Y'=-X\operatorname{sen}\varphi+Y\cos\varphi$, $Z'=-Z$. **1.74.** $(-2, \sqrt{2}, 0)$. **1.75.** $a_1a_2=\sum_{i, k=1}^{3} X_i^{(1)}\times X_k^{(2)}e_ie_k=5X_1^{(1)}X_1^{(2)}+2X_2^{(1)}X_2^{(2)}+9X_3^{(1)}X_3^{(2)}-2(X_1^{(1)}X_2^{(2)}+X_2^{(1)}X_1^{(2)})-3(X_1^{(1)}X_3^{(2)}+X_3^{(1)}X_1^{(2)})+4(X_2^{(1)}X_3^{(2)}+X_3^{(1)}X_2^{(2)})$. **1.76.** a) $\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{3}$; c) $10\sqrt{3}$. **1.77.** $[a_1, a_2]=0$, es decir, $a_1\parallel a_2$. **1.78.** a) $2(k-i)$; b) $2[a, c]$; c) $[a, c]$; d) 3. **1.80.** $50\sqrt{2}$. **1.83.** a) $\frac{1}{3}[a, b]$; b) $-\frac{1}{3}[a, b]$. **1.84.** a) (−3, 5, 7); b) (−6, 10, 14); c) (−12, 20, 28). **1.85.** $2\sqrt{6}$. **1.86.** 5. **1.87.** $|a|=|b|=|c|=1$; los vectores son perpendiculares dos a dos. **1.88.** $-4i+3j+4k$. **1.89.** $\sqrt{66}$; $\cos\alpha=$

$=1/\sqrt{66}$; $\cos\beta=-4/\sqrt{66}$, $\cos\gamma=-7/\sqrt{66}$. **1.90.** $\frac{3}{2}\sqrt{2}$. **1.91.** $(-6, -24, 8)$. **1.92.** $(7, 5, 1)$. **1.93.** $a_2 \perp a_1$, una infinidad de soluciones. **1.94.** $(-1/2, 0, 1/2)$. **1.95.** Aparecerá el signo menos ante el determinante; en el caso de una base oblicuángula la fórmula no es verídica. **1.96.** ● Calcúlense las coordenadas de ambos miembros y convénzase que son iguales. El cálculo de las coordenadas resulta conveniente efectuar en la siguiente base especial: el versor i tiene igual dirección con el vector b, el versor j se dispone en el plano de los vectores b y c. **1.97.** 24. **1.98.** -7. a) Izquierda; b) derecha; c) derecha. **1.99.** a) No; b) Sí. **1.104.** 17/2. **1.105.** 6. **1.106.** $3\sqrt{2}$.

2.1. a) $2(x+1)+2(y-2)=0$. La ecuación general: $x+y-1=0$. La ecuación normal: $\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$. b) $2(x-2)=0$. La ecuación general: $x-2=0$, es una recta paralela al eje Oy. La ecuación normal: $x-2=0$; $p=2$. c) $2(x-1)-(y-1)=0$. La ecuación general: $2x-y-1=0$. La ecuación normal: $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **2.2.** a) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$. La ecuación general: $x+3y-5=0$. La ecuación normal: $\frac{1}{\sqrt{10}}x-\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=0$; $p=\frac{5}{\sqrt{10}}$. b) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}$. La ecuación general: $-x+1=0$, es una recta paralela al eje Oy. La ecuación normal: $x-1=0$; $p=1$. c) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{0}$. La ecuación general: $y-1=0$, es una recta paralela al eje Ox. La ecuación normal: $y-1=0$; $p=1$. **2.3.** c) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}$. La ecuación general $x-y+1=0$. La ecuación normal: $-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$. b) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-3}$. La ecuación general: $x-1=0$, la recta es paralela al eje Oy. La ecuación normal: $x-1=0$; $p=1$. c) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{0}$. La ecuación general: $y-2=0$, es una recta paralela al eje Ox. La ecuación normal: $y-2=0$, $p=2$. **2.4.** a) $\rho(M, L)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, $L': \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}$, $L'': -2(x+1)+(y-2)=0$; b) $\rho(M, L)=1/2$, $L': \frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}$, $L'': 2y=0$; c) $\rho(M, L)=0$, $L': \frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}$, $L'': x+y+1=0$. **2.5.** Se cortan en el punto $M_0(-3/4,$

$-1/2$); $\cos(\widehat{L_1, L_2}) = 1/\sqrt{5}$. **2.6.** Se cortan en el punto $M_0(1, 0)$; $\cos(\widehat{L_1, L_2}) = 2/\sqrt{5}$. **2.7.** Son paralelas: $\rho(L_1, L_2) = \sqrt{2}/4$. **2.8.** Son paralelas: $\rho(L_1, L_2) = \sqrt{2}$. **2.9.** Coinciden. **2.10.** a) (AB): $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4}$, (CD): $\frac{x-6}{-4} = \frac{y-1}{-1}$, $h = \frac{19}{\sqrt{17}}$, $\cos\varphi = \frac{19}{\sqrt{17 \cdot 58}}$, L_1: $\frac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}} = \frac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}}$, L_2: $(\sqrt{26}+5\sqrt{17})(x-1) + (-4\sqrt{26}-\sqrt{17})(y-2) = 0$; b) (AB): $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{3}$, (CD): $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-4}$, $h = 4$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$, L_1: $\frac{x-2}{4-2\sqrt{5}} = \frac{y+2}{3+\sqrt{5}}$, L_2: $(4-2\sqrt{5})(x-2) + (3+\sqrt{5})(y+2) = 0$. **2.11.** $t = -1/2$. **2.12.** $4/\sqrt{5}$. **2.14.** $y = 2x - 6$, $y = -2x + 6$. **2.15.** $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$. **2.16.** a) $3x - 2y - 7 = 0$; b) $x - 5y - 7/6 = 0$. **2.17.** $x - 5y + 3 = 0$, ó bien $5x + y - 11 = 0$. **2.18.** $x - 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$. **2.19.** ● Las desviaciones $\delta(M_1, L)$ y $\delta(M_2, L)$ son de signos contrarios. **2.20.** $4x + y + 5 = 0$ ó $y - 3 = 0$. **2.21.** a) En un mismo ángulo; b) en los ángulos opuestos por el vértice. **2.22.** Obtuso. **2.23.** $4x - 3y + 10 = 0$, $7x + y - 20 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$. **2.24.** $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$. **2.25.** $2x + 9y - 65 = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$. **2.26.** a) $2x - y + z - 2 = 0$; $1/\sqrt{6}$; b) $x - y = 0$, el plano es paralelo al eje Oz y pasa por el origen de coordenadas; $1/\sqrt{2}$. **2.27.** a) $x + y - 3 = 0$; b) $x + 2y - 2 = 0$. **2.28.** a) $x - 2y - z = 0$; b) $-x + y + 2z - 5 = 0$. **2.29.** a) $-x + 2y - 3z - 3 = 0$; b) $2x - 2y - z + 1 = 0$.
2.30. a) $x + y - 3 = 0$; b) $2x - y - 1 = 0$. **2.31.** Se intersecan, $\cos\times(\widehat{P_1, P_2}) = \frac{1}{2\sqrt{15}}$. **2.32.** Son paralelos, $\rho(P_1, P_2) = \frac{3}{2\sqrt{6}}$. **2.33.** Se intersecan, $\cos(\widehat{P_1, P_2}) = 1/2$. **2.34.** Coinciden. **2.35.** 8. **2.36.** a) $4x - 5y + z - 2 = 0$ y $2x + y - 3z + 8 = 0$; b) $3x - 6y + 7z - 4 = 0$ y $x + 4y + 3z + 4 = 0$. **2.37.** a) $4x - y - 2z - 4 = 0$; b) $20x - 12y + 4z + 13 = 0$. **2.38.** a) en los ángulos adyacentes; b) en un mismo ángulo. **2.39.** a) $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, las ecuaciones en proyecciones: $\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0, \\ 5x + 3z - 7 = 0, \\ 5y - 4z + 1 = 0; \end{cases}$ b) $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = -\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$, las ecuaciones en proyecciones: $\begin{cases} 7x - y + 1 = 0, \\ 5x - z - 1 = 0, \\ 5y - 7z - 12 = 0. \end{cases}$ **2.40.** a) $\frac{x-2}{2} =$

$= \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; b) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; c) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; d) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$; e) $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{8} = \frac{z+3}{10}$; f) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1/2}$. 2.41. a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; b) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$. 2.42. a) $x-2y+z=0$; b) $2x+y-1=0$; c) $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2x+y-1=0, \end{cases}$ o bien $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{5}$; d) $18/\sqrt{30}$; e) $M'(3/5, -1/5, -1)$. 2.43. a) $1/\sqrt{15}$, $M(1, -6, -4)$, b) $3x-y+2z-1=0$; c) $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 3x-y+2z-1=0. \end{cases}$ 2.45. a) $2x-16y-13z+31=0$; b) $6x-20y-11z+1=0$. 2.46. 25. 2.48. b) $4x+3y+12z-93=0$; c) 13; d) $\begin{cases} 54x-44y-7z+181=0, \\ -45x-76y+34z+497=0. \end{cases}$ 2.49. $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$.

3.1. Véase la fig. 43. 3.2. Véase la fig. 44. 3.3. Las rectas $x = 0$ y $x - y = 0$. 3.4. Las rectas $y = 0$ y $x + y = 0$. 3.5. Las rectas

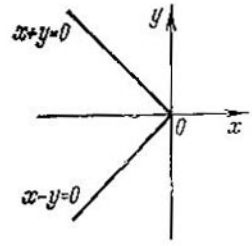


Fig. 43

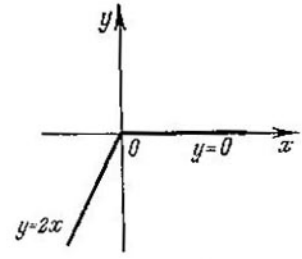


Fig. 44

$x - y = 0$ y $x + y = 0$. 3.6. Las rectas $x = 0$ e $y = 0$. 3.7. Las rectas $y = \pm 3$. 3.8. Las rectas $x = -2$ y $x = 3$. 3.9. Las rectas $y = 0$, $x = 2$ y $x = 5$. 3.10. Una circunferencia de radio $R = 2$, con el centro en el origen de coordenadas. 3.11. Una circunferencia de radio $R = 1$, con el centro en el punto $C(0, -3)$. 3.12. El origen de coordenadas. 3.13. Un conjunto vacío. 3.14. Los puntos $(0, \pm 1)$. 3.15. $x - y = 0$. 3.16. $4ax \pm c = 0$. 3.17. $y = \pm 2x$. 3.18. $x^2 + y^2 = 16$. 3.19. $x^2 + y^2 = 8$. 3.20. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. 3.21. $xy = 2$. 3.22. $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$. 3.23. a) $C(2, -3)$, $R = 4$; b) $C(4, 0)$, $R = 4$; c) $C(0, -2)$, $R = 2$. 3.24. a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$; b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$; c) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$; d) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; e) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, o bien $(x-5)^2 +$

$+(y-5)^2=25$; f) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$. g) $(x+4)^2+(y+1)^2=25$. ● Escríbase la ecuación de la circunferencia buscada en la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, sustitúyanse en esta ecuación las coordenadas de cada punto y hállense a continuación D, E y F. 3.25. $2x-5y+19=0$. 3.26. a) 7; b) 2. 3.27. a) Corta; b) es tangente; c) pasa fuera de la circunferencia. 3.28. a) $a=5$, $b=3$;

b) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$; c) $e=\frac{4}{5}$; d) $D_1: x=-\frac{25}{4}$, $D_2: x=\frac{25}{4}$.

3.29. a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; d) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; e) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$; f) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. 3.30. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. 3.31. a) $C(3, -1)$, $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $e=2/3$, $D_1: 2x+3=0$, $D_2: 2x-15=0$; b) $C(-1, 2)$, $a=5$, $b=4$, $e=3/5$, $D_1: 3x+28=0$, $D_2: 3x-22=0$; c) $C(1, -2)$, $a=4$, $b=2\sqrt{3}$, $e=1/2$, $D_1: y+10=0$, $D_2: y-6=0$. 3.34. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, $r_{1,2}=4\pm\sqrt{3}$, $\rho_{1,2}=\frac{2}{\sqrt{3}}(4\pm\sqrt{3})$. 3.35. $\left(-\frac{15}{4}, \pm\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$.

3.36. $2x^2-2xy+2y^2-3=0$. 3.37. $7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0$. 3.38. a) La recta corta la elipse; b) pasa fuera de la elipse; c) es tangente a la elipse. 3.40. $3x+2y-10=0$ y $3x+2y+10=0$. 3.41. $x+y-5=0$ y $x+y+5=0$. 3.43. $x+y-5=0$ y $x+4y-10=0$. 3.44. $M_0(-3, 2)$, $\sqrt{13}$. 3.46. $2x+11y-10=0$. ● Hágase uso del resultado del problema 3.45.

3.47. a) $a=3$, $b=4$; b) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; c) $e=\frac{5}{3}$; d) $y=\pm\frac{4}{3}x$; e) $x=\pm\frac{9}{5}$.

3.48. a) $a=4$, $b=3$; b) $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$; c) $e=\frac{5}{4}$; d) $y=\pm\frac{4}{3}x$; e) $y=\pm\frac{16}{5}$. 3.49. a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; c) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; d) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; e) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; f) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. 3.50. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. 3.51. a) $C(2, -3)$, $a=3$, $b=4$, $e=5/3$, las ecuaciones de las asíntotas: $4x-3y-17=0$ y $4x+3y+1=0$, las ecuaciones de las directrices: $5x-1=0$ y $5x-19=0$; b) $C(-5, 1)$, $a=8$, $b=6$, $e=5/4$, las ecuaciones de las asíntotas: $3x+4y+11=0$ y $3x-4y+19=0$, las ecuaciones de las directrices: $x=-11$, 4 y $x=1{,}4$; c) $C(2, -1)$, $a=4$, $b=3$, $e=5/4$, las ecuaciones de las asíntotas: $4x+3y-5=0$ y $4x-3y-11=0$, las ecuaciones de las directrices: $y=-4{,}2$ e $y=$

$= 2{,}2$. 3.54. $r_1 = 9/4$, $r_2 = 41/4$, $\rho(M, D_1) = 9/5$, $\rho(M, D_2) = 41/5$. 3.55. $(-6, \pm 4\sqrt{3})$. 3.56. $7y^2 + 24xy - 144 = 0$. 3.57. $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$. 3.58. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$, $e = \sqrt{2}$, $F_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $D_{1,2}$: $x + y \pm \sqrt{2} = 0$. 3.59. $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. ● Véase el problema 3.39. 3.60. $10x - 3y - 32 = 0$, $10x - 3y + 32 = 0$. 3.61. $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. 3.63. $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$. 3.64. $M_0(-6, 3)$, $\rho = 11/\sqrt{13}$. 3.66. $2x + 11y + 6 = 0$. ● Hágase uso del resultado del problema 3.65. 3.67. a) $p = 3$; b) $p = 5/2$; c) $p = 2$; d) $p = 1/2$. 3.68. a) $y^2 = -x$; b) $x^2 = -2y$; c) $x^2 = -12y$. 3.69. a) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$; b) $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$. 3.70. $A(2, 0)$, $p = 2$; b) $A(0, 2)$, $p = 1/2$; c) $A(1, 3)$, $p = 1/8$; d) $A(6, -1)$, $p = 3$; e) $A(1, 2)$, $p = 2$; f) $A(-4, 3)$, $p = 1/4$. 3.72. 6. 3.73. a) $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$; b) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. 3.74. $y_0 y = p(x + x_0)$. 3.75. $x + y + 2 = 0$. 3.76. $2x - y - 16 = 0$. 3.77. $3x - y + 3 = 0$ y $3x - 2y + 12 = 0$. 3.78. $M_0(9, -24)$, $\rho(M_0, L) = 10$. 3.80. $y - 18 = 0$. 3.81. $\operatorname{tg}\varphi = 1$. 3.82. $r \operatorname{sen}\varphi = 1$. 3.83. $r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 3.84. $r = a$. 3.85. $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$. 3.86. $r = a\cos\varphi$. 3.87. Una circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. 3.88. Una recta $y = -x$. 3.89. Una recta $x = 2$. 3.90. Una recta $y = 1$. 3.91. Una recta $x - y - 1 = 0$. 3.92. Una recta $x + y - 2 = 0$. 3.93. Una circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. 3.94. Una circunferencia $x^2 + (y - a)^2 = a^2$. 3.95. Un par de rayos $x = \pm 2y$, $y \geqslant 0$. 3.96. Una familia de circunferencias concéntricas de radios $r_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ 3.97. Una hipérbola $xy = a^2$. 3.98. Lemniscata de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. 3.99. a) $r\cos\varphi = 3$; b) $\varphi = \pi/3$; c) $\operatorname{tg}\varphi = 1$. 3.100. a) $r = 10\cos\varphi$; b) $r = \pm 6\operatorname{sen}\varphi$. 3.101. a) $C(2, 0)$, $R = 2$; b) $C(3/2, \pi/2)$, $R = 3/2$; c) $C(5/2, -\pi/2)$, $R = 5/2$; d) $C(3, \pi/3)$, $R = 3$; e) $C(4, 5\pi/6)$, $R = 4$; f) $C(4, -\pi/6)$, $R = 4$. 3.102. $r^2 - 2r_0 r \times \cos(\varphi - \varphi_0) = R^2 - r_0^2$.

3.103. a) $r = \frac{16}{5 - 3\cos\varphi}$; b) $r = \frac{16}{5 + 3\cos\varphi}$. 3.104. a) $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; b) $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$. 3.105. $r = \frac{3}{1 - \cos\varphi}$. 3.106. a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; c) $y^2 = 6x$. 3.107. $r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$. 3.108. $r^2 = \frac{b^2}{e^2\cos^2\varphi - 1}$. 3.109. $r = \frac{2p\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}$. 3.110. $x = t$, $y = t + 1$, $t \in [-1, +\infty)$; b) $x = t - 1$, $y = t$, $t \in [0, +\infty)$; c) $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $t \in [0, +\infty)$; d) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\cos t}{\cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)}$, $y =$

$= \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{2\cos\left(t-\dfrac{3\pi}{4}\right)}$, $t \in \left[-\pi, \dfrac{\pi}{4}\right)$. **3.111.** a) $x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}t$, $y =$

$= 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}t$, $t \in [0, \sqrt{5}]$; b) $x = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}t$, $y = 3 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}t$, $t \in [0,$

$\sqrt{5}]$. **3.112.** $x = x_0 + R\cos t$, $y = y_0 + R\operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi)$. **3.113.** a) $x = R(1+\cos 2t)$, $y = R\operatorname{sen} 2t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2)$; b) $x = R(1+\cos t)$, $y = R\operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi)$. **3.114.** Una recta $x + 2y - 3 = 0$. **3.115.** Una parábola $y^2 = x$. **3.116.** Una circunferencia $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$. **3.117.** Una elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. **3.118.** La rama derecha de la hipérbola $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{1} = 1$. **3.119.** La rama derecha de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. **3.120.** Una circunferencia $(x-R)^2 + y^2 =$

$= R^2$. **3.121.** Una circunferencia $x^2 + (y-R)^2 = R^2$. **3.122.** La rama superior de una parábola $y^2 = 2px$. **3.123.** $x = \dfrac{ab\cos t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}}$,

$y = \dfrac{ab\operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}}$, $t \in [0, 2\pi)$. **3.124.** $x = \dfrac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t - a^2\operatorname{sen}^2 t}}$,

$y = \dfrac{ab\operatorname{sen} t}{\sqrt{b^2\cos^2 t - a^2\operatorname{sen}^2 t}}$, donde $t \in \left(-\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}\right)$ para la rama derecha y $t \in \left(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}\right)$ para la rama izquierda. **3.125.** a) $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$, $t \in (-\infty, +\infty)$; b) $x = 2p\operatorname{ctg}^2 t$, $y = 2p\operatorname{ctg} t$, donde $t \in (0, \pi/2)$ para la rama derecha y $t \in (3\pi/2, 2\pi)$, para la rama izquierda; c) $x = \dfrac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{t}{2}$, $y = p\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$, $t \in (0, 2\pi)$.

4.1. Un plano $z = -5$ paralelo al plano Oxy. **4.2.** Un plano con el vector normal $\boldsymbol{n}$ $(1, -2, 1)$. **4.3.** Una esfera de radio $R = 2$, con el centro en el origen de coordenadas. **4.4.** Una esfera de radio $R = 4$ con el centro en el punto C $(2, 0, -1)$. **4.5.** El origen de coordenadas. **4.6.** El eje Oy. **4.7.** Un conjunto vacío. **4.8.** Un par de planos que se intersecan $x - 2z = 0$ y $x + 2z = 0$ paralelos al eje Oy. **4.9.** Un par de planos coordenados Oyz y Oxy. **4.10.** Una terna de planos coordenados. **4.11.** Un par de planos $x = 0$ y $x = 4$. **4.12.** Un par de planos $y = 0$ e $y = x$. **4.13.** $20y + 53 = 0$. **4.14.** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. **4.15.** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1$. **4.16.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = -1$. **4.17.** a) C $(0, 0, 3)$, $R = 3$; b) C $(2, 1, -1)$, $R = 5$. **4.18.** a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 =$ $= 4$; b) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 18$; c) $(x-3)^2 +$ $+ (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$; d) $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = 56$, e) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 49$. **4.19.** $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 =$ $= 1$. **4.20.** $\left(x - \dfrac{4}{9}\right)^2 + \left(y + \dfrac{4}{9}\right)^2 + \left(z - \dfrac{4}{9}\right)^2 = \dfrac{64}{729}$. **4.21.** $x =$

$= -1 + 5t$, $y = 3 - t$, $z = -\frac{1}{2} + 2t$. 4.22. $M_0(-2, -2, 7)$, $\rho = 3$.

4.23. a) Corta; b) es tangente; c) pasa fuera de la esfera. 4.24. a) una recta que pasa por el punto (5, 0, -2) paralelamente al eje Oy; b) una circunferencia en el plano Oxz de radio $R = 7$ y con el centro en el origen de coordenadas; c) una circunferencia situada en el plano $z = 2$ de radio $R = 4$ y con el centro en el punto C (0, 0, 2); d) una circunferencia en el plano $z = 6$ de radio $R = \sqrt{13}$ y centro en el punto C (0, 0, 6). 4.25. a) C (1, 7, 2), $R = 4$; b) C (-1, 2, 3), $R = 8$.

4.26. Una elipse $\frac{(x-2)^2}{30} + \frac{(y+4)^2}{18} = 1$.

4.27. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36, \\ 2x - z - 1 = 0. \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27; \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$ 4.29. Un elipsoide. 4.30. Un hiperboloide de una hoja. 4.31. Un hiperboloide de revolución de dos hojas. 4.32. Un cono. 4.33. Un paraboloide de revolución. 4.34. Un paraboloide hiperbólico. 4.35. Un paraboloide elíptico. 4.36. Un cilindro parabólico. 4.37. Un paraboloide de revolución con el vértice (0, 0, 2). 4.38. Un paraboloide hiperbólico. 4.39. Un hiperboloide de revolución de una hoja. 4.40. Un hiperboloide de revolución de dos hojas. 4.41. ◉ Hágase uso de la homogeneidad de la ecuación. 4.42. ◉ Pásese al nuevo sistema de coordenadas girando los ejes Ox y Oy alrededor del eje Oz en un ángulo $\pi/4$. 4.43. a) Un cono de segundo grado con vértice en el origen de coordenadas (véase el problema 4.41); b) un paraboloide hiperbólico (véase el problema 4.42). 4.44. Sobre el plano Oxy: $x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$; sobre el plano Oxz: $x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0$; sobre el plano Oyz: $y^2 + z^2 + 2y - z = 0$. 4.45. a) Una elipse; b) una parábola. 4.46. a) M_1 (3, 4, -2) y M_2 (6, -2, 2); b) M (4, -3, 2), la recta es tangente a la superficie; c) la recta y la superficie no tienen puntos comunes. 4.47. a) M (9, 5, -2); b) M (3, 0, -10); c) M (6, -2, 2).

4.48. $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0, \\ x - 2y + 4 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0, \\ x + 2y - 8 = 0. \end{cases}$

4.49. $\begin{cases} y + 2z = 0, \\ x - 5 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 5z = 0, \\ y + 4 = 0. \end{cases}$ 4.60. a) $y^2 + z^2 = a^2$; b) $x^2 + z^2 = 2ax$; c) $x^2 + y^2 = 2ax$. 4.61. $x^2 + 5y^2 - 8y - 12 = 0$; b) $4x^2 + 5z^2 + 4z - 60 = 0$; c) $2y - z - 2 = 0$. 4.62. a) $8x^2 + 4y^2 - 36x + 16y - 3 = 0$, $z = 0$; b) $2x - 2z - 7 = 0$, $y = 0$; c) $4y^2 + 8z^2 + 16y + 36z - 31 = 0$, $x = 0$. 4.63. $y^2 = 2ax - x^2$. 4.64. a) $(3y - 2z)^2 = 12(3x - z)$; b) $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 4(x - z)$. 4.65. La ecuación del cilindro de proyección: $2x^2 + (y - z + 2)^2 = 8$; el contorno de la sombra: una elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{8} = 1$. 4.66. $x = 4$, $z \pm y = 2$. 4.68. a) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{h^2}$; b) $9(x^2 + z^2) = 16y^2$; c) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$; d) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. 4.69. a) $h^2x^2 = 2pz(h(y +$

$+a)-az$); b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z-c)^2}{c^2}=0$; c) $x^2+z^2=z\,(y+a)$; d) $3x^2-$ $-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$. **4.70.** a) el vértice $(0, h, 0)$, la directriz es una circunferencia $x^2+(y-h)^2=$ $=h^2$, $z=h$; b) el vértice $(0, 0, 0)$, la directriz es una parábola $x^2=$ $=2hy$, $z=h$. **4.71.** $xy+xz+yz=0$, el eje del cono pasa en el primero y séptimo octantes; $xy+xz-yz=0$, el eje del cono pasa en el segundo y octavo octantes; $xy-xz-yz=0$, el eje del cono pasa en el tercero y quinto octantes; $xy-xz+yz=0$, el eje del cono pasa en los octantes 4 y 6. **4.72.** a) una circunferencia $x^2+y^2=$ $=(a/\sqrt{2})^2$; b) los segmentos $z=\pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2}\leqslant x\leqslant a/\sqrt{2}$; c) los segmentos $z=\pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2}\leqslant y\leqslant a/\sqrt{2}$. **4.73.** La ecuación del cilindro de proyección: $9x^2-16y^2-16z^2-90x+225=$ $=0$, el contorno de la sombra es una circunferencia $y^2+z^2=(15/4)^2$. **4.74.** a) $z=x^2+y^2$; b) $\sqrt{y^2+z^2}=x^2$. **4.75.** a) $x^2+z^2=y^2$; b) $z^2=x^2+y^2$. **4.76.** a) $z=e^{-(x^2+y^2)}$; b) $z=\frac{4}{x^2+y^2}$. **4.77.** $\frac{x^2}{a^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}=1$. **4.78.** La superficie se ha formado por revolución de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ en torno al eje Oz.

CAPÍTULO 3

DETERMINANTES Y MATRICES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

§ 1. Determinantes

1. Determinantes de segundo y tercer órdenes. Una tabla cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

compuesta de cuatro números reales (o complejos) lleva el nombre de *matriz cuadrada de segundo orden*. Se denomina *determinante de segundo*

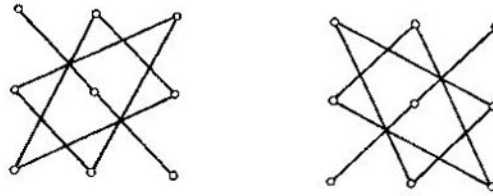


Fig. 45

orden correspondiente a la matriz A (o, simplemente, *determinante de la matriz A*) al número

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Análogamente, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de tercer orden, *el determinante de tercer orden* que le corresponde será el número

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1)$$

Los determinantes de tercer orden se calculan corrientemente según la siguiente *regla de Sarrus*: uno de los tres sumandos que figuran en el segundo miembro de (1) con el signo más es un producto de elementos de la diagonal *principal* de la matriz A; cada uno de los otros dos sumandos es un producto de elementos situados en la paralela a dicha diagonal y un elemento del rincón opuesto de la matriz (fig. 45, *a*); y los sumandos que figuran en (1) con el signo menos se construyen de un modo igual, pero esta vez respecto de la segunda (*colateral*) diagonal (fig. 45, *b*).

Calcúlense los determinantes de segundo orden:

1.1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$. 1.2. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

1.3. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$. 1.4. $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$.

1.5. $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}$.

Resuélvanse las ecuaciones:

1.6. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$. 1.7. $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\operatorname{sen} 5x \\ \operatorname{sen} 8x & -\cos 5x \end{vmatrix} = 0$.

1.8*. Demuéstrese que para a, b, c, d reales las raíces de la ecuación $\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix} = 0$ son reales.

1.9. Demuéstrese que para que un determinante de segundo orden sea nulo, es necesario y suficiente que sus filas sean proporcionales (es decir, que los elementos de una fila se obtengan de los elementos correspondientes de otra fila multiplicándolos por un mismo número). Lo mismo es cierto también para las columnas.

Calcúlense los determinantes de tercer orden

1.10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. 1.11. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

1.12. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

1.13. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$. 1.14. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & 1 \\ \operatorname{sen}\beta\cos\beta & 1 \\ \operatorname{sen}\gamma\cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

1.15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, **1.16.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$,

donde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$, donde $\varepsilon = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}$.

Resuélvanse las ecuaciones:

1.17. $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

1.18. $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$

Resuélvanse las desigualdades:

1.19. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0.$ **1.20.** $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

1.21. Demuéstrense las siguientes propiedades del determinante de tercer orden, haciendo uso de su definición:

a) si hacemos las filas de la matriz de un determinante en forma de columnas con los mismos números (es decir, si *se transpone* la matriz), el determinante no variará.

b) si todos los elementos de una fila (columna) se multiplican por un mismo número, el determinante quedará multiplicado por dicho número.

c) si se cambian entre sí dos filas (columnas) de un determinante, éste último cambiará de signo; en particular, si dos filas (columnas) del determinante son iguales, el determinante será nulo;

d) si cada elemento de cierta fila (columna) de un determinante se representa en forma de una suma de dos sumandos, el determinante será igual a la suma de dos determinantes en los que todas las filas (columnas), excepto la dada, son anteriores, pero en la fila (columna) dada en el primer determinante figuran los sumandos primeros y en el segundo, los segundos;

e) si una fila (columna) es una combinación lineal de las filas (columnas) restantes, el determinante es igual a cero.

Utilizando las propiedades del determinante de tercer orden enumerados en el problema 1.21, demuéstrense las siguientes identidades (sin desarrollar los determinantes):

1.22. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

1.23. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_3+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

1.24*. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

1.25. Compruébese que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

se divide por $x-y$, $y-z$, y $z-x$.

1.26. Compruébese que el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

se divide por $x+y$ y x^2-xy+y^2.

1.27. Constrúyase la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix} \quad (a \neq b).$$

2. Determinantes de *n*-ésimo orden. Toda aplicación biunívoca π del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de los primeros n números naturales sobre sí mismo lleva el nombre de *sustitución de n-ésimo orden*.

Cualquier sustitución puede ser escrita en la forma

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \ldots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

donde $\alpha_{i_k} = \pi(i_k)$ es la imagen del elemento $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ en la aplicación π. Para una sustitución fija π existen varios métodos de

notación del tipo (2) que se diferencian en la numeración de los elementos de la fila superior. En particular, la notación de la forma

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

se denomina *canónica*.

Se dice que un par de elementos (i, j) forma *una inversión* en la sustitución π, si $i < j$, pero $\alpha_i > \alpha_j$. El número $s(\pi)$ de todos los pares de inversión determina la paridad de la sustitución: una sustitución se llama *par*, si $s(\pi)$ es un número par, e *impar*, si $s(\pi)$ es un número impar.

EJEMPLO 1. Determínese la paridad de la sustitución

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

◀ Pasemos a la notación canónica (3)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

y calculemos el número de inversiones. Por cuanto las inversiones se forman por los pares (1, 4), (2, 3), (2,4), (3, 4), entonces $s(\pi) = 4$ y π es una sustitución par. ▶

Se denomina *determinante de n-ésimo orden* correspondiente a la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(o *determinante de la matriz A*) el número

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{s(\pi)} a_1, \pi(1) \dots a_n, \pi(n),$$

donde la suma se efectúa respecto de todas las sustituciones de n-ésimo orden.

Para el determinante de n-ésimo orden son válidas las propiedades principales análogas a las propiedades de a) a e) del problema 1.21.

1.28. Hállese en el conjunto $\{1, \dots, 6\}$ una sustitución π, si $\pi(k)$ es el resto que se obtiene al dividir el número $3k$ por 7. Determínese la paridad de la sustitución.

1.29. Hállese en el conjunto $\{1, \dots, 8\}$ una sustitución π, si $\pi(k)$ es el resto que se obtiene al dividir el número $5k$ por 9. Determínese la paridad de la sustitución.

Determínese la paridad de las sustituciones:

1.30. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. **1.31.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

1.32. $\begin{pmatrix} 2n & 2n-1 & \dots & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & 2n & \dots & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.33.

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & n-k+1 & n-k & n-k-1 & \dots & 2 & 1 \\ k & k-1 & \dots & 1 & n & n-1 & \dots & k+2 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Aclárese cuáles de los productos aducidos más abajo figuran en los determinantes de órdenes correspondientes y cuáles son sus signos:

1.34. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$. **1.35.** $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

1.36. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$. **1.37.** $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

1.38. Elíjanse los valores de i y k de tal modo que el producto $a_{62}a_{15}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ figure en cierto determinante con el signo menos.

1.39. Elíjanse los valores de i y k de tal modo que el producto $a_{47}a_{63}a_{11}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ figure en cierto determinante con el signo más.

1.40. Hállense los términos del determinante

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

que contengan x^4 y x^3.

Recurriendo sólo a la definición, calcúlense los siguientes determinantes:

1.41.
$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

1.42.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1.43. Cómo variará el determinante, si:

a) a cada fila, excepto la última, sumamos la última fila;

b) de cada fila, excepto la última, restamos todas las filas ulteriores;

c) de cada fila, excepto la última, restamos la fila siguiente, de la última fila restamos la primera fila precedente;

d) su matriz «la giramos en 90° en torno al centro»;

e) la primera columna la ponemos en el último lugar y las demás columnas las desplazamos a la izquierda conservando su disposición.

3. Métodos principales de cálculo de los determinantes de n-ésimo orden.

El *método de reducción del orden* de un determinante está basado en la siguiente relación (i es fijo):

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A^{(i,k)}, \tag{4}$$

donde

$$A^{(i,k)} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

lleva el nombre de *complemento algebraico* del elemento a_{ik} y representa un determinante de $(n-1)$-ésimo orden.

La relación (4) se denomina *desarrollo del determinante por la i-ésima fila*. Análogamente se determina *el desarrollo del determinante por una columna*. Antes de emplear el método de reducción del orden, resulta conveniente anular, haciendo uso de las principales propiedades del determinante, todos los elementos de su cierta fila (columna) de éste, a excepción de uno de ellos.

Ejemplo 2. Calcúlese el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

◀ Restemos de la primera fila y sumemos a la segunda la tercera fila duplicada. Desarrollemos el determinante obtenido por la primera columna. Tenemos

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Anulemos ahora todos los elementos de la primera columna, a excepción del elemento que ocupa el rincón superior izquierdo, y calculemos después el determinante de segundo orden:

$$D=4\begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & -45 & 20 \\ 0 & -27 & 2 \end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} -45 & 20 \\ -27 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=-4(-90+540)=-1800. \blacktriangleright$$

El *método de reducción a la forma triangular* consiste en tal transformación del determinante cuando todos los elementos situados por un lado de una de sus diagonales quedan iguales a cero.

EJEMPLO 3. Calcúlese el determinante

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

◀ Restando la primera fila de todas las demás, obtenemos

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-8. \blacktriangleright$$

El *método de las correlaciones recurrentes* permite expresar el determinante dado, transformándolo y desarrollándolo por una fila o una columna, mediante los determinantes del mismo tipo, pero de orden más inferior. La igualdad obtenida lleva el nombre de correlación recurrente.

EJEMPLO 4. Calcúlese *el determinante de Vandermonde*

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

◀ Mostremos que el determinante de Vandermonde es igual al producto de toda clase de diferencias $a_i - a_j$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$, cualquiera que sea n ($n \geqslant 2$). Realicemos la demostración por inducción, haciendo uso del método de correlaciones recurrentes.

En efecto, para $n = 2$ tenemos

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Supongamos que nuestra afirmación se ha demostrado para los determinantes de Vandermonde de orden $(n-1)$, es decir,

$$D_{n-1} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n-1} (a_i - a_j).$$

Transformemos el determinante D_n del modo siguiente: de la última n-ésima fila sustraemos la $(n-1)$-ésima, multiplicada por a_1, y, en general, sustraemos sucesivamente de la k-ésima fila la $(k-1)$-ésima multiplicada, por a_1. Obtenemos

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Desarrollemos el último determinante por la primera columna y saquemos de todas las columnas los factores comunes. El determinante adquiere la forma

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_n^2 \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) D_{n-1}.$$

Hemos obtenido una correlación recurrente. Utilizando la suposición de la inducción, obtenemos en definitiva:

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j) =$$

$$= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j). \blacktriangleright$$

1.44. Calcúlense los determinantes, desarrollándolos por la tercera fila y la segunda columna, respectivamente:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$.

Calcúlense los determinantes:

1.45. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

1.46. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

1.47. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$.

1.48. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

1.49. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.50. $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$.

Calcúlense los determinantes de n-ésimo orden por reducción a la forma trianglar:

1.51. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

1.52. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

1.53. Calcúlese un determinante cuyos elementos vienen dados por las condiciones $a_{ij} = \text{mín}\ (i, j)$.

1.54. Calcúlese un determinante cuyos elementos vienen dados por las condiciones $a_{ij} = \text{máx}\ (i, j)$.

Calcúlense los determinantes de orden n por el método de correlaciones recurrentes:

1.55. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

1.56. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

1.57. Calcúlese el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

1.58. Demuéstrese que para cualquier determinante se verifica la relación

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A^{(k,j)} = \begin{cases} \det A, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases}$$

donde $A^{(k,j)}$ es el complemento algebraico del elemento a_{kj} (véase (5)).

§ 2. Matrices

1. **Operaciones sobre las matrices.** Se llama *matriz de dimensión* $m \times n$ o bien $(m \times n)$-*matriz* la tabla rectangular de los números $a_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

compuesta de m filas y n columnas.

Se denomina *suma* $A + B$ *de las* $(m \times n)$-*matrices* $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ la matriz $C = (c_{ij})$ del mismo orden, todo elemento de la cual es igual a la suma de elementos correspondientes de las matrices A y B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se llama *producto* αA *de la matriz* $A = (a_{ij})$ *por un número* α (real o complejo) la matriz $B = (b_{ij})$ que se obtiene de la matriz A mediante la multiplicación de todos sus elementos por α:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se llama *producto* AB *de la* $(m \times n)$-*matriz* $A = (a_{ij})$ *por la* $(n \times k)$-*matriz* $B = (b_{ij})$ la $(m \times k)$-matriz $C = (c_{ij})$, cuyo elemento d_{ij} que figura en la i-ésima fila y j-ésima columna, es igual a la suma de productos de los elementos correspondientes de la i-ésima fila de la matriz A y la j-ésima columna de la matriz B:

$$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

2.1. Demuéstrense las siguientes propiedades de las operaciones algebraicas sobre las matrices:

a) $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$;

b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$, $(\alpha\beta)A = \alpha (\beta A)$;

c) $A (BC) = (AB)C$, $A (B + C) = AB + AC$.

Calcúlense las combinaciones lineales de las matrices A y B:

2.2. $3A + 2B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3. $(1+i)A + (1-i)B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Calcúlense:

2.4. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **2.5.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

2.6. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.7. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.8. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2.9. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2.10.

$$(4\ 0\ -2\ 3\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.11. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.12. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$. 2.13. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $a \in \mathbb{R}$.

2.14. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 2.15. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

Hállese el valor del polinomio $f(A)$ de la matriz A:

2.16. $f(x) = 3x^2 - 4$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.17. $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.18. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Las matrices A y B se denominan *conmutativas*, si $AB = BA$.

Hállense todas las matrices, conmutativas con la dada:

2.19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 2.20. $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. 2.21. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.22. Hállense todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz nula $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.23. Hállense todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz unidad $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.24. ¿Cómo variará el producto AB de las matrices A y y B, si:

a) cambiamos de lugar las filas i-ésima y j-ésima de la matriz A;

b) a la i-ésima fila de la matriz A sumamos la j-ésima fila multiplicada por el número α,

c) cambiamos de lugar las columnas i-ésima y j-ésima de la matriz B,

d) a la i-ésima columna de la matriz B le sumamos la j-ésima columna multiplicada por el número α?

Una matriz $A^{\top}$ se llama *transpuesta* respecto a la matriz A, si cumple la condición $a_{ij}^{\top} = a_{ij}$ para cualesquiera i, j, donde a_{ij} y $a_{ij}^{\top}$ son los elementos de las matrices A_{ij} y $A_{ij}^{\top}$, respectivamente.

2.25. Demuéstrense las relaciones siguientes:
a) $(A^{\top})^{\top} = A$; b) $(A + B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top}$;
b) $(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top}$.

Una matriz cuadrada B recibe el nombre de matriz *simétrica*, si $B^{\top} = B$. Una matriz cuadrada C se llama *antisimétrica*, si $C^{\top} = -C$.

2.26. Demuéstrese que cualquier matriz A puede ser representada y, además, unívocamente en la forma $A = B + C$ donde B es una matriz simétrica y C, antisimétrica.

2. Matriz inversa. Una matriz cuadrada A se denomina *degenerada (singular)*, si su determinante es igual a cero; en caso contrario, se llama *regular*. Si A es una matriz regular, existe una única matriz A^{-1} tal que se verifica

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

donde E es la matriz unidad (es decir, la diagonal principal de esta matriz está ocupada por las unidades, mientras que todos los demás elementos son nulos). La matriz A^{-1} se llama *inversa* de la matriz A.

Indiquemos los métodos principales de cálculo de la matriz inversa.

MÉTODO DE LA MATRIZ ADJUNTA. Una matriz $A^{\vee}$, cuyos elementos son complementos algebraicos de los elementos correspondientes de la matriz A (véase la fórmula (5) del § 1), recibe el nombre de matriz *adjunta* a la matriz A. Se verifica la igualdad

$$(A^{\vee})^{\top}A = A\,(A^{\vee})^{\top} = \det A \cdot E.$$

De aquí proviene que si A es una matriz regular, entonces se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^{\vee})^{\top}.$$

EJEMPLO 1. Hállese A^{-1} mediante el método de la matriz adjunta, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

◀ Tenemos $\det A = -4$. Hallemos los complementos algebraicos de los elementos correspondientes de la matriz A:

$$A^{(1,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4,\ A^{(2,1)} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8,\ A^{(3,1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A^{(1,2)} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7,\ A^{(2,2)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9,\ A^{(3,2)} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A^{(1,3)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6,\ A^{(2,3)} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10,\ A^{(3,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Por eso

$$(A^{\vee})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^{\vee})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

MÉTODO DE TRANSFORMACIONES ELEMENTALES. Se denominan transformaciones elementales de una matriz las siguientes:

1) permutación de las filas (columnas);

2) multiplicación de la fila (columna) por un número distinto de cero;

3) adición a los elementos de una fila (columna) de los elementos correspondientes de otra fila (columna), multiplicados previamente por cierto número.

Para la matriz dada A de n-ésimo orden construyamos una matriz rectangular $\Gamma_A = (A \mid E)$ de dimensión $n \times 2n$, añadiendo a la derecha de A una matriz unidad. Luego, haciendo uso de las transformaciones elementales sobre las filas, reducimos la matriz Γ_A a la forma $(E \mid B)$, lo que es siempre posible, si A es regular. En este caso $B = A^{-1}$.

EJEMPLO 2. Hállese A^{-1} para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

empleando el método de transformaciones elementales.

◀ Formemos la matriz Γ_A:

$$\Gamma_A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Al designar mediante γ_1, γ_2, γ_3 las filas de la matriz E_A, realicemos sobre ellas las siguientes transformaciones:

$$\gamma_1' = \frac{1}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_1'' = \gamma_1' - \frac{2}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_1''' = \gamma_1'' - \frac{1}{24}\gamma_3'',$$

$$\gamma_2' = \gamma_2 - \frac{4}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_2'' = \frac{3}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_2''' = \gamma_2'' - \frac{1}{12}\gamma_3'',$$

$$\gamma_3' = \gamma_3 - \frac{2}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_3'' = \gamma_3' - \frac{1}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_3''' = \frac{7}{24}\gamma_3''.$$

De resultas obtenemos sucesivamente

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & -6/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right).$$

Por consiguiente,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Hállense las inversas para las siguientes matrices, usando el método de la matriz adjunta:

2.27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **2.28.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **2.29.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

2.30. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **2.31.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

2.32. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Hállense las inversas de las siguientes matrices, empleando el método de las transformaciones elementales:

2.33. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. **2.34.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.35. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 2.36. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.37. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. 2.38. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Resuélvanse las ecuaciones matriciales:

2.39. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. 2.40. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

2.41. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

2.42. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2.43. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

2.44. Demuéstrense las siguientes igualdades:

a) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$; b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

c) $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

§ 3. Espacio de vectores aritméticos. Rango de una matriz

1. **Vectores aritméticos.** Se denomina *vector aritmético real (complejo)* toda totalidad ordenada de n números reales (complejos) y se designa por el símbolo

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ se llaman *componentes* del vector aritmético x.

Sobre los vectores aritméticos se introducen las siguientes operaciones.

Adición: si

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

entonces

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{1}$$

Multiplicación por un número: si λ es un número (real o complejo) y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un vector aritmético, entonces

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \tag{2}$$

Un conjunto de todos los vectores aritméticos reales (complejos) de n componentes con las operaciones de adición (1) y multiplicación por un número (2), introducidas más arriba, lleva el nombre de *espacio de vectores aritméticos* (real o complejo, respectivamente). En lo sucesivo se considerará, siempre que no se diga lo contrario, un espacio real de vectores aritméticos denotado por el símbolo $\mathbb{R}^n$.

Un sistema de vectores aritméticos $\{x_1, \ldots, x_s\}$ se denomina *linealmente dependiente*, si existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, que no son iguales a cero simultáneamente, de tal género que $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s = 0$ (donde $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ es el vector nulo). De lo contrario el sistema se llamará *linealmetnte independiente*.

Supongamos que Q es un conjunto arbitrario de vectores aritméticos. El sistema de vectores $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_s)$ se denomina *base* en Q, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $e_k \in Q$, $k = 1, 2, \ldots, s$;

b) el sistema $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_s)$ es linealmente independiente;

c) para cualquier vector $x \in Q$ se encontrarán unos números $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ tales, que

$$x = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k e_k. \tag{3}$$

La fórmula (3) se denomina *descomposición* del vector x según la base $\mathfrak{B}$. Los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ se definen unívocamente por el vector x y llevan el nombre de *coordenadas* de este vector en la base $\mathfrak{B}$.

Son verídicas las siguientes afirmaciones:

1) Todo sistema de vectores $Q \subset \mathbb{R}^n$ tiene por lo menos una base, con la particularidad de que resulta que todas las bases de dicho sistema se componen de un mismo número de vectores denominado *rango* del sistema Q y designado rang Q o bien $r(Q)$.

2) El rango de todo el espacio $\mathbb{R}^n$ es igual a n y se llama *dimensión* de este espacio; a título de base de $\mathbb{R}^n$ podemos tomar el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Esta base suele llamarse *canónica*.

Fijemos una base arbitraria $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ en el espacio $\mathbb{R}^n$. En este caso a todo vector x se le puede poner en correspondencia biunívoca una columna de sus coordenadas en dicha base, es decir,

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \Leftrightarrow X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

OBSERVACIÓN. Se deben distinguir los componentes de un vector y sus coordenadas en cierta base. Aunque se emplean para las dos nociones mencionadas iguales designaciones, hay que tener en cuenta que las coordenadas de un vector coinciden con los componentes de éste sólo en una base canónica.

Las operaciones lineales (1) y (2) sobre los vectores aritméticos en la forma coordenada tienen por expresión:

$$z = x + y \Leftrightarrow Z = X + Y \quad (\Leftrightarrow z_k = x_k + y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$y = \lambda x \Leftrightarrow Y = \lambda \cdot X \quad (\Leftrightarrow y_k = \lambda x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

3.1. Demuéstrese que las operaciones lineales (1) y (2) poseen las siguientes propiedades:

1a) $x + y = y + x$;

1b) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

1c) $x + 0 = x$;

1d) $\forall x, y \exists!\ z\ (x = y + z)$ (el vector z recibe el nombre de *diferencia* de los vectores x e y y se designa así: $z = x - y$);

2a) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ para cualesquiera números λ y μ.

2b) $1 \cdot x = x$;

3a) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

3b) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Se dan los vectores: $a_1 = (4, 1, 3, -2)$, $a_2 = (1, 2, -3, 2)$, $a_3 = (16, 9, 1, -3)$, $a_4 = (0, 1, 2, 3)$, $a_5 = (1, -1, 15, 0)$. Hállense las siguientes combinaciones lineales:

3.2. $3a_1 + 5a_2 - a_3$. **3.3.** $a_1 + 2a_2 - a_4 - 2a_5$.

3.4. $2a_1 + 4a_3 - 2a_5$. **3.5.** $1/2\, a_1 + 3a_3 - 1/2\, a_4 + a_5$.

Se dan los mismos vectores aritméticos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 que figuran más arriba. Hállese el vector x a partir de las siguientes ecuaciones:

3.6. $2x + a_1 - 2a_2 - a_5 = 0$. **3.7.** $a_1 - 3a_5 + x + a_3 = 0$.

3.8. $2(a_1 - x) + 5(a_4 + x) = 0$.

3.9. $3(a_3 + 2x) - 2(a_5 - x) = 0$.

3.10. Demuéstrese que todo sistema de vectores que:

a) contiene dos vectores iguales,

b) contiene dos vectores que se diferencian en un factor numérico,

c) contiene el vector nulo,

d) contiene un subsistema linealmente dependiente es linealmente dependiente.

Aclárese si son linealmente dependientes o linealmente independientes los siguientes sistemas de vectores aritméticos:

3.11. $x_1 = (-3, 1, 5)$, $x_2 = (6, -3, 15)$.

3.12. $x_1 = (1, 2, 3, 0)$, $x_2 = (2, 4, 6, 0)$.

3.13. $x_1 = (2, -3, 1)$, $x_2 = (3, -1, 5)$, $x_3 = (1, -4, 3)$.

3.14. $x_1 = (1, i, 2-i, 3+i)$, $x_2 = (1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)$.

3.15.* Muéstrese que el sistema de vectores aritméticos $e_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1, 1, 1)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ forma una base en $\mathbb{R}^5$. Hállense las coordenadas del vector dado x en la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ que figura en el problema 3.15.

3.16.** $x = (1, 0, 1, 0, 1)$. **3.17.** $x = (2, -1, 2, -1, 2)$.

3.18. $x = (5, 4, 3, 2, 1)$.

2. Rango de una matriz. Supongamos que en la matriz A de dimensión $m \times n$ se han elegido arbitrariamente k filas y k columnas ($k \leqslant$ mín (m, n)). Los elementos que se hallan en la intersección de las filas y columnas elegidas forman una matriz cuadrada de orden k cuyo determinante se denomina *menor de k-ésimo orden* de la matriz A.

El orden máximo r de los menores distintos de cero de la matriz A se llama *rango* de ésta, y cualquier menor de orden r, distinto de cero, *menor básico*.

Las filas (columnas) de la matriz A de dimensión $m \times n$ pueden considerarse como un sistema de vectores aritméticos de $\mathbb{K}^n$ (de $\mathbb{K}^m$, respectivamente).

TEOREMA DEL MENOR BÁSICO. *El rango de una matriz es igual al rango del sistema de sus filas (columnas); además el sistema de filas (columnas) de la matriz que contiene el menor básico forma una base en el sistema de todas las filas (columnas) de esta matriz.*

Demos a conocer los métodos principales de cálculo del rango de una matriz.

MÉTODO DE MENORES ORLADOS. Supongamos que en una matriz se fue hallado un menor de k-ésimo orden M, distinto de cero. Vamos a considerar sólo aquellos menores de $(k+1)$-ésimo orden que contienen en sí (orlan) el menor M: si todos los menores citados son nulos, el rango de la matriz es igual a k. De lo contrario entre los menores que orlan M se encontrará un menor no nulo de $(k+1)$-ésimo orden y todo el procedimiento se repite.

EJEMPLO 1. Hállese el rango de la matriz

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 3 \\ \hline 4 & -7 & 4 & -4 \end{array}\right.\left.\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ \\ 1 \\ \\ 5 \end{array}\right).$$

◀ Fijemos un menor de segundo orden distinto de cero:

$$M_2=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

El menor del tercer orden

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

que orla el menor M_2 es también distinto de cero. No obstante, ambos menores de cuarto orden que orlan M_3 son nulos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

Por ello el rango de A es igual a tres y M_3 es, por ejemplo, el menor básico. ▶

El método de transformaciones elementales está basado en el hecho de que las transformaciones elementales (véase el p. 2 del § 2) de una matriz no alteran su rango (véase el problema 3.24). Haciendo uso de estas transformaciones, podemos reducir la matriz a una forma tal que todos sus elementos, a excepción de $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ ($r \leqslant$ mín (m, n)), sean iguales a cero. Por consiguiente, el rango de la matriz es igual a r.

EJEMPLO 2. Hállese el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

◀ Realizando sucesivamete las transformaciones elementales, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la última matriz es igual a dos, por lo cual el de la matriz de partida también es igual a dos. ▶

Hállese el rango de la matriz, empleando el método de los menores orlados:

3.19. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

3.20. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

3.21. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

¿A qué es igual el rango de la matriz A para diferentes valores de λ?

3.22. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3.23. $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \lambda \end{pmatrix}$.

3.24. Muéstrese que las transformaciones elementales no cambian el rango de la matriz.

Calcúlese el rango de la matriz empleando el método de las transformaciones elementales:

3.25. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$.

3.26. $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

3.27. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

3.28. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

3.29. Demuéstrese que si el producto de las matrices AB está definido, entonces rang $(AB) \leqslant$ mín {rang A, rang B}.

3.30. Sea A una matriz regular y sean las matrices B y C de tal género que AB, CA quedan definidos. Demuéstrese que rang (AB) = rang B y rang (CA) = rang C.

3.31. Demuéstrese que si la suma $A + B$ de las matrices está definida, entonces

$$\text{rang } (A + B) \leqslant \text{rang } A + \text{rang } B.$$

El concepto de rango de una matriz se emplea para investigar la dependencia lineal del sistema de vectores aritméticos.

EJEMPLO 3. Aclárese si es linealmente dependiente o independiente el sistema de vectores aritméticos $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -5, -3)$. Hállese su rango y una base cualquiera.

◀ Escribamos la matriz A, cuyos vectores columna están representados por a_1, a_2, a_3:

$$A \quad (a_1, a_2, a_3) = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ \hline 1 & 5 & -3 \end{array}\right).$$

No es difícil ver que el rango de la matriz A es igual a 2. Por consiguiente, el sistema de partida de los vectores aritméticos es lineal-

mento dependiente y su rango es también igual a 2 (según el teorema del menor básico). El menor de segundo orden

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

es distinto de cero, razón por la cual puede ser tomado como básico. De aquí se deduce que los vectores aritméticos a_1 y a_2 forman la base del sistema de partida. ▶

Aclárese si son linealmente dependientes o independientes los sistemas de vectores siguientes:

3.32. $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, -1, 1)$, $x_3 = (1, -1, 1, -1)$, $x_4 = (1, 1, -1, -1)$.

3.33. $x_1 = (4, -5, 2, 6)$, $x_2 = (2, -2, 1, 3)$, $x_3 = (6, -3, 3, 9)$, $x_4 = (4, -1, 5, 6)$.

Hállese el rango del sistema de vectores:

3.34. $a_1 = (1, -1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, -1, 0)$, $a_3 = (1, 0, -1, 1)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$, $a_5 = (3, -5, 2, -3)$.

3.35. $a_1 = (1, i, -1, -i, 1)$, $a_2 = (1, -i, -1, i, 1)$, $a_3 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $a_4 = (3, -1, -1, -1, 3)$.

Hállense todos los valores de λ, para los cuales el vector x se expresa linealmente mediante los vectores a_1, a_2, a_3:

3.36. $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$, $x = (7, -2, \lambda)$.

3.37. $a_1 = (3, 2, 5)$, $a_2 = (2, 4, 7)$, $a_3 = (5, 6, \lambda)$, $x = (1, 3, 5)$.

3.38. $a_1 = (3, 2, 6)$, $a_2 = (7, 3, 9)$, $a_3 = (5, 1, 3)$, $x = (\lambda, 2, 5)$.

Hállense el rango y una base cualquiera del sistema de vectores dado:

3.39. $a_1 = (5, 2, -3, 1)$, $a_2 = (4, 1, -2, 3)$, $a_3 = (1, 1, -1, -2)$, $a_4 = (3, 4, -1, 2)$.

3.40. $a_1 = (2, -1, 3, 5)$, $a_2 = (4, -3, 1, 3)$, $a_3 = (3, -2, 3, 4)$, $a_4 = (4, -1, 15, 17)$, $a_5 = (7, -6, -7, 0)$.

3.41. $a_1 = (1, 2, 3, -4)$, $a_2 = (2, 3, -4, 1)$, $a_3 = (2, -5, 8, -3)$, $a_4 = (5, 26, -9, -12)$, $a_5 = (3, -4, 1, 2)$.

Hállense el rango y todas las bases del sistema de vectores:

3.42. $a_1 = (1, 2, 0, 0)$, $a_2 = (1, 2, 3, 4)$, $a_3 = (3, 6, 0, 0)$.

3.43. $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (2, 3, 4, 5)$, $a_3 = (3, 4, 5, 6)$, $a_4 = (4, 5, 6, 7)$.

3.44. $a_1 = (2, 1, -3, 1)$, $a_2 = (4, 2, -6, 2)$, $a_3 = (6, 3, -9, 3)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$.

§ 4. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Regla de Cramer. Sea dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas del tipo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \qquad (1)$$

o bien, en la forma matricial, $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

REGLA DE CRAMER. Si en el sistema (1) $\det A = \Delta \neq 0$, es decir, la matriz A tiene su inversa A^{-1}, entonces el sistema (1) tiene una, y sólo una, solución

$$X = A^{-1}B,$$

o bien, en la notación por componentes,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

donde Δ_i es un determinante que se obtiene del determinante Δ sustituyendo en este último la i-ésima columna por la de términos independientes.

EJEMPLO 1. Resuélvase el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 + 5x_2 &= -3. \end{aligned}$$

◀ La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ es regular, puesto que $\det A = -2 \neq 0$. La matriz adjunta $A^{\vee}$ tiene por expresión

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

y

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. ▶

Resuélvanse según la regla de Cramer los sistemas siguientes:

4.1. $3x - 5y = 13$,
$2x - 7y = 81$.

4.2. $3x - 4y = 1$,
$3x + 4y = 18$,

4.3. $2ax - 3by = 0$,
$3ax - 6by = ab$.

4.4. $7x + 2y + 3z = 15$,
$5x - 3y + 2z = 15$,
$10x - 11y + 5z = 36$.

4.5. $2x + y = 5$,
$x + 3z = 16$,
$5y - z = 10$.

4.6. $x + y - 2z = 6$,
$2x + 3y - 7z = 16$,
$5x + 2y + z = 16$.

4.7.
$4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0$.
$2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10$,
$x_1 + x_2 - 5x_3 = -10$,
$3x_2 + 2x_3 = 1$.

4.8.
$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4$,
$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6$,
$3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6$,
$3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6$.

4.9*. Demuéstrese que para cualesquiera distintos números x_1, x_2, x_3 y cualesquiera números y_1, y_2, y_3 existe un único polinomio $y = f(x)$ de grado $\leqslant 2$, para el cual

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

¿Cuándo el grado de este polinomio es <2 (igual a 1, igual a 0)?

Hállese el polinomio $f(x)$ a partir de las condiciones dadas:

4.10. $f(1) = -1$, $f(-1) = 9$, $f(2) = -3$.

4.11. $f_j(x_i) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Resuélvanse los sistemas de ecuaciones:

4.12.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -5. \end{aligned}$$

4.13.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -1, \\ x_1 - 4x_2 &= -5. \end{aligned}$$

4.14.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

4.15.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3. \end{aligned}$$

4.16.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 20 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 11 &= 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 - 40 &= 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 37 &= 0. \end{aligned}$$

4.17.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 &= 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 &= 0. \end{aligned}$$

2. Solución de los sistemas arbitrarios. Sea dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas del tipo general

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{2}$$

o bien, en la forma matricial,

$$AX = B,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Si $B = 0$, el sistema se llama *homogéneo*, en caso contrario es *no homogéneo*.

Se denomina *solución* del sistema (2) todo vector columna de n componentes X que convierte la ecuación matricial (3) en una igualdad (un vector aritmético $x \in R^n$, correspondiente a la solución X, también se llamará solución del sistema (2)). Un sistema se denomina *compatible*, si tiene por lo menos una solución, de lo contrario se deno-

mina *incompatible*. Dos sistemas se llaman *equivalentes*, siempre que coinciden los conjuntos de sus soluciones.

TEOREMA DE KRONECKER—CAPELLI. *Para que el sistema* (3) *sea compatible, es necesario y suficiente que se verifique*

$$\text{rang } A = \text{rang } \overline{A}, \tag{4}$$

donde $\overline{A} = (A \mid B)$ *es la matriz ampliada del sistema.*

Supongamos que rang A = rang $\overline{A} = r$, es decir, el sistema es compatible. Sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos, convengamos en considerar que el menor básico se halla en las primeras r ($1 \leqslant r \leqslant \min(m, n)$) filas y columnas de la matriz A. Desechando las últimas m-r ecuaciones del sistema (2), escribimos un sistema *reducido*:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{array} \tag{5}$$

el cual es equivalente al de partida. Llamaremos *básicas* a las incógnitas $x_1, \ldots, x_r$, y *libres*, a las incógnitas $x_{r+1}, \ldots, x_n$; los sumandos que contienen incógnitas libres los trasladamos al segundo miembro de las ecuaciones (5). Obtenemos un sistema respecto de las incógnitas básicas:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n, \end{array}$$

el cual para todo juego de valores de las incógnitas libres $x_{r+1} = c_1, \ldots, x_n = c_{n-r}$ tiene una única solución $x_1(c_1, \ldots, c_{n-r}), \ldots, x_r(c_1, \ldots, c_{n-r})$ que se halla según la regla de Cramer. La solución correspondiente del sistema reducido y, por ende, del de partida tiene por expresión

$$X(c_1, \ldots, c_{n-r}) = \begin{Vmatrix} x_1(c_1, \ldots, c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(c_1, \ldots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

La fórmula (6) que expresa la solución arbitraria del sistema en forma de la función vectorial de n-r incógnitas libres lleva el nombre de *solución general* del sistema (2).

EJEMPLO 2. Establézcase la compatibilidad y hállese la solución general del sistema

$$2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \quad 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3,$$
$$2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \quad 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3.$$

◀ Escribamos las matrices principal y ampliada del sistema:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ \hline 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right), \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Puesto que rang A = rang $\overline{A} = 2$ (compruébese), el sistema de partida es compatible.

Elijamos a título de menor básico el $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$. En este caso las incógnitas x_1, x_2 son básicas y x_3, x_4 son libres, mientras que el sistema reducido tiene por expresión

$$2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4, \quad 4x_1 = 3 - x_3 + 7x_4.$$

Suponiendo $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ y resolviendo el sistema reducido respecto de las incógnitas básicas, obtenemos

$$x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}c_1 + \frac{7}{4}c_2, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2,$$

Por consiguiente, la solución general del sistema de partida tiene por expresión

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}c_1 + \frac{7}{4}c_2 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Investíguese la compatibilidad y hállese la solución general de los siguientes sistemas:

4.18. $x - \sqrt{3}y = 1$, $\sqrt{3}x - 3y = \sqrt{3}$.

4.19. $\sqrt{5}x - 5y = \sqrt{5}$, $x - \sqrt{5}y = 5$.

4.20. $2x - y + z = -2$, $x + 2y + 3z = -1$, $x - 3y - 2z = 3$.

4.21. $x + 2y - 4z = 1$, $2x + y - 5z = -1$, $x - y - z = -2$.

4.22.

$$3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3,$$

4.23.

$$x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6,$$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3$, $3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2$,
$x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3$, $2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6$,
$x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22$. $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7$

4.24.

$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6$,
$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$,
$9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2$.

4.25.

$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2$,
$7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5$,
$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3$.

4.26.

$9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4$,
$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$,
$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8$.

4.27.

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$,
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3$,
$9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1$,
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$,
$7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7$.

4.28. $x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$,
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2$,
$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$,
$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2$.

4.29. $2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2$,
$6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3$,
$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9$,
$4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1$.

4.30. $12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 24x_4 + 27x_5 = 5$,
$16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8$,
$18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9$,
$10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4$.

4.31. $24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 = 28$,
$36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 = 43$,
$48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58$,
$60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 = 69$.

Investíguese la compatibilidad y hállese la solución general en función del valor del parámetro λ:

4.32.

$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3$,

4.33.

$\lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$,

$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \quad x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \quad x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1,$$
$$7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda \quad x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1.$$

4.34.
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$$
$$4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7,$$
$$6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9,$$
$$\lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11.$$

4.35.
$$(1 + \lambda) x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + (1 + \lambda) x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + (1 + \lambda) x_3 = 1.$$

3. Sistemas homogéneos. Un sistema homogéneo $AX = O$ es siempre compatible, puesto que tiene la solución *trivial* $X = O$. Para que exista una solución no trivial del sistema homogéneo, es necesario y suficiente que se cumpla la condición $r = \operatorname{rang} A < n$ (para $m = n$ esta condición implica que $\det A = 0$).

Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo. Cualquier base en el conjunto Q consiste de $n-r$ vectores $e_1, \ldots, e_{n-r}$. Un sistema de vectores columna $E_1, \ldots, E_{n-r}$, correspondiente al conjunto citado en la base canónica, se denomina *sistema fundamental de soluciones*. La solución general del sistema homogéneo tiene por expresión

$$X = c_1 E_1 + \ldots + c_{n-r} E_{n-r},$$

donde $c_1, \ldots, c_{n-r}$ son constantes arbitrarias.

Las soluciones básicas $E_1, \ldots, E_{n-r}$ pueden obtenerse por el método expuesto en el p. 2, si a las incógnitas libres se les asignan consecutivamente el valor 1, suponiendo que las demás incógnitas son nulas.

EJEMPLO 3. Hállense el sistema fundamental de soluciones y la solución general del siguiente sistema homogéneo de ecuaciones:

$$3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0,$$
$$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0,$$
$$x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0,$$
$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0.$$

◀ La matriz de los coeficientes

$$A = \left(\begin{array}{cc:ccc} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ \hdashline 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{array}\right)$$

tiene el rango $r = 2$ (¡compruébese!). Elijamos a título de menor básico el $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. En este caso el sistema reducido tendrá por expresión

$$3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 - x_5, \quad 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5,$$

de donde, al poner $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, hallamos

$$x_1 = -\frac{19}{8}c_1 - \frac{3}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3, \quad x = -\frac{7}{8}c_1 + \frac{25}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3.$$

La solución general del sistema es

$$X(c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} -\frac{19}{8}c_1 - \frac{3}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ -\frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

De la solución general hallamos el sistema fundamental de

$$E_1 = X(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{19}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = X(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$E_3 = X(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con la utilización del sistema fundamental, la solución general puede ser escrita en la forma

$$X(c_1, c_2, c_3) = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3. \blacktriangleright$$

4.36. Demuéstrese que toda combinación lineal de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones es también una solución de éste.

Hállense el sistema fundamental de soluciones y la solución general de los siguientes sistemas:

4.37. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$ **4.38.** $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0. \end{aligned}$

4.39. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$ **4.40.** $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$

4.41. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 + 19x_4 &= 0. \end{aligned}$

4.42. $\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_3 &= 0. \end{aligned}$

4.43. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 &= 0. \end{aligned}$

4.44. $\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_6 &= 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$

4.45. $\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0. \end{aligned}$

4.46. $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 0. \end{aligned}$

4.47.* Aclárese si las filas de cada una de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & 50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -30 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

forman un sistema fundamental de soluciones para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 &= 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Determínense los valores del parámetro a, para los cuales el sistema tiene soluciones no triviales y hállense estas soluciones:

4.48. $\begin{aligned} a^2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0, \\ ax_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0, \end{aligned}$ **4.49.** $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$

Dado un sistema no homogéneo $AX = B$, la solución general de este sistema puede obtenerse como una suma de la solución general del correspondiente sistema homogéneo $AX = 0$ y una solución particular arbitraria del sistema no homogéneo.

Hállense las soluciones generales de los sistemas no homogéneos, haciendo uso del sistema fundamental de soluciones de los sistemas homogéneos correspondientes:

4.50. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3. \end{aligned}$

4.51. $\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 &= 1. \end{aligned}$

4.52. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1. \end{aligned}$

4.53. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 &= 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= -1. \end{aligned}$

4. Método de Jordan—Gauss de eliminaciones sucesivas. Sirviéndonos de las transformaciones elementales sobre las filas e intercambio de las columnas, podemos reducir la matriz ampliada del sistema (2) a la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right). \qquad (7)$$

La matriz (7) es una matriz ampliada del sistema

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1, \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} \dots + a'_{rn}x_n &= b'_r, \\ 0 &= b'_{r+1} \\ 0 &= b'_m, \end{aligned} \qquad (8)$$

el cual es equivalente, salvo la designación de las incógnitas, al sistema de partida.

Si por lo menos uno de los números $b'_{r+1}, \dots, b'_m$ es diferente de cero, el sistema (8) y, por tanto, el sistema de partida (2) son incompatibles.

En cambio, si $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$, el sistema es compatible y las fórmulas (8) proporcionan, de hecho, la expresión explícita para las incógnitas básicas $x_1, \dots, x_r$ en términos de las incógnitas libres $x_{r+1}, \dots, x_n$.

EJEMPLO 4. Hállese la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 7, \end{aligned}$$

empleando el método de Jordan—Gauss.

◀ Al realizar las transformaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada, obtenemos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Las primeras dos filas de la última matriz constituyen la matriz ampliada del sistema

$$x_1-\frac{4}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4=1,$$

$$x_2-\frac{2}{5}x_3-\frac{3}{5}x_4=2,$$

que es equivalente al de partida. Considerando x_1, x_2, como incógnitas básicas y x_3, x_4, como incógnitas libres, obtenemos la solución general en la forma

$$X(c_1, c_2)=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\frac{4}{5}c_1+\frac{1}{5}c_2 \\ 2+\frac{2}{5}c_1+\frac{3}{5}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Empleando el método de Jordan — Gauss, investíguese la compatibilidad y hállese la solución general de los siguientes sistemas:

4.54.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0,\\ 7x_1+14x_2+20x_3+27x_4&=0,\\ 5x_1+10x_2+16x_3+19x_4&=-2,\\ 3x_1+5x_2+6x_3+13x_4&=5. \end{aligned}$$

4.55.

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=1,\\ x_1+x_2+x_3&=4,\\ x_2+x_3+x_4&=-3,\\ x_3+x_4+x_5&=2,\\ x_4+x_5&=-1. \end{aligned}$$

4.56.

$$\begin{aligned} 105x_1-175x_2-315x_3+245x_4&=84,\\ 90x_1-150x_2-270x_3+210x_4&=72,\\ 75x_1-125x_2-225x_3+175x_4&=59. \end{aligned}$$

4.57.

$$\begin{aligned} 8x_1 + 12x_2 &= 20, \\ 14x_1 + 21x_2 &= 35, \\ 9x_3 + 11x_4 &= 0, \\ 16x_3 + 20x_4 &= 0, \\ 10x_5 + 12x_6 &= 22, \\ 15x_5 + 18x_6 &= 33. \end{aligned}$$

4.58.

$$\begin{aligned} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1, \\ -x_1 + x_3 + 24x_4 &= 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3. \end{aligned}$$

§ 5. Algunos problemas de cálculo del álgebra lineal

1. Operaciones sobre las matrices

En los problemas 5.1—5.4 fórmense los subprogramas indicados, empleando el lenguaje de FORTRAN.

5.1. Subprograma de adición de dos matrices de dimensión $m \times n$. Los parámetros son: A, B, C, M, N, donde A y B son las tablas bidimensionales de dimensión M × N que contienen las matrices de partida y C, una tabla bidimensional de dimensión M × N para la matriz resultante.

5.2. Subprograma de multiplicación de la matriz de dimensión $m \times n$ por el número α. Los parámetros son: A, M, N, ALFA, donde A es una tabla bidimensional de dimensión M × N que contiene la matriz de partida antes del acceso al subprograma y el resultado obtenido después de los cálculos, ALFA = α.

5.3. Subprograma de transposición de la matriz cuadrada. Los parámetros son: A, M, donde A es una tabla bidimensional de dimensión M × N que contiene la matriz de partida al principio de dos cálculos y el resultado obtenido después de éstos.

5.4. Subprograma de multiplicación de dos matrices. Los parámetros son: A, B, C, L, M, N, donde A, B y C son las tablas bidimensionales de dimensiones L × M, M × N y L × N, respectivamente, que contienen las matrices de partida y los resultados.

5.5. Se dan las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 3{,}2 & 0 & 8 \\ -1{,}6 & 3{,}2 & 1{,}6 & 6{,}4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}625 & -3{,}125 \\ 1{,}25 & 0 \\ 0{,}625 & 1{,}25 \\ -0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 0{,}625 & -3{,}125 & 0{,}625 \\ 1{,}25 & 0 & -1{,}25 \\ 0{,}625 & 1{,}25 & 0 \\ -0{,}625 & 0{,}625 & 3{,}125 \end{pmatrix}.$$

Hállense AB, BA y AC.

5.6. Sean dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2{,}5 & -1{,}25 & 3{,}75 & -5 \\ 4{,}125 & -2{,}75 & 5{,}5 & -4{,}125 \\ 8{,}125 & -4{,}875 & -3{,}25 & 1{,}625 \\ 5{,}25 & -5{,}25 & -1{,}75 & 3{,}5 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 2{,}8 & 6{,}4 & 3{,}6 & 1{,}8 \\ 2 & 5{,}6 & 2{,}4 & 1 \\ 1{,}2 & 3{,}2 & 3 & 1{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Hállense las matrices AB, BA y $A^{\top}B^{\top}$.

5.7. Haciendo uso de los subprogramas obtenidos en los problemas 5.1—5.4, fórmese en FORTRAN el programa de la resolución de los problemas 5.5, 5.6, y también de uno de los problemas 2.4—2.12 y 2.16—2.18.

El método de conversión de una matriz con la ayuda de transformaciones elementales (analizado en el p. 2, § 2) puede ser descrito de la manera siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{11} & b_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{21} & b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{n1} & b_{n2} & \dots \end{array}\right) \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \dots \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & \dots & a_{1,k+1}^{(k)} & \dots & b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \dots \\ 0 & 1 & \dots & a_{2,k+1}^{(k)} & \dots & b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & b_{k1}^{(k)} & b_{k2}^{(k)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,k+1}^{(k)} & \dots & b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \dots \end{array}\right) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & & b_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & b_{21}^{(n)} & b_{22}^{(n)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & b_{n1}^{(n)} & b_{n2}^{(n)} & \dots \end{array}\right)$$

donde $(b_{ij}) = E$ es la matriz unidad, mientras que los elementos de la matriz $(a_{ij}^{(k)})$ y $(b_{ij}^{(k)})$ están asociados entre sí por las correlaciones

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad j = k+1, \ldots, n,$$

$$b_{kj}^{(k)} = \frac{b_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{ik}^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n,$$

$$j = k+1, \ldots, n, \quad a_{ik}^{(0)} = a_{ik},$$

$$b_{ij}^{(k)} = b_{ij}^{(k-1)} - \frac{b_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{ik}^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$\ldots, k-1, k+1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad b_{ij}^{(0)} = b_{ij}.$$

5.8. Fórmese en FORTRAN un subprograma de inversión de la matriz, empleando el método de transformaciones elementales. Los parámetros son: A, B, N, donde A y B son las tablas bidimensionales de dimensión N × N que contienen los elementos de las matrices de partida e invertida, respectivamente. La conservación de la tabla A después de los cálculos, no se prevé.

5.9. Hállese A^{-1}, si

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}84 & 0{,}68 & 0{,}88 \\ -0{,}84 & 0{,}24 & -0{,}88 & 0{,}68 \\ -0{,}68 & 0{,}88 & 0{,}24 & -0{,}84 \\ -0{,}88 & -0{,}68 & 0{,}84 & 0{,}24 \end{pmatrix}.$$

5.10. Hállese A^{-1}, si

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}96875 & 0{,}0625 & 0{,}125 & 0{,}35 & 0{,}5 \\ 0{,}0625 & -1{,}875 & 0{,}25 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & -3{,}5 & 1 & 2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & -6 & 4 \\ 0{,}5 & 1 & 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

5.11. Haciendo uso del subprograma obtenido en el problema 5.8, fórmese en FORTRAN un programa de resolu-

ción de los problemas 5.9, 5.10, y también de uno de los problemas 2.33—2.36 y 2.39—2.43. Al resolver las ecuaciones matriciales en los problemas 2.39—2.43, utilícese el subprograma del problema 5.4.

2. Cálculo de los determinantes. Representamos el determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{para } a_{11} \neq 0$$

en la forma

$$\Delta_n = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \quad \text{ó} \quad \Delta_n = a_{11} \cdot \Delta_{n-1}.$$

Los elementos de los determinantes Δ_n, Δ_{n-1}, ..., Δ_1, donde

$$\Delta_{n-k} = \begin{vmatrix} a_{k+1,\,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1,\,n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\,k+1}^{(k)} & \dots & a_{n,\,n}^{(k)} \end{vmatrix},$$

están ligados entre sí por las correlaciones

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, \dots, n,$$

$$j = k+1, \dots, n.$$

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad \Delta_1 = a_{nn}^{(n-1)},$$

y $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ para todo k con $\Delta_{n-k+1} \neq 0$. Por ello

$$\Delta_n = a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \dots a_{kk}^{(k-1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}.$$

Si $a_{kk}^{(k-1)} = 0$, entonces, al tomar en consideración la variación del signo, se deben cambiar de lugar la primera y alguna otra filas del determinante Δ_{n-k+1} de un modo tal que el elemento superior izquierdo, llamado *rector*, no sea nulo. Con el fin de aumentar la exactitud de los cálculos, a título de elemento rector hay que elegir el elemento máximo según el módulo de todos aquellos que constituyen la primera columna de cada uno de los determinantes Δ_{n-k}, $k = 0, 1, \dots, n-2$.

EJEMPLO 1. Calcúlese el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

◀ $$\Delta = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 2{,}8 & 1{,}4 & 3{,}8 \\ -0{,}4 & 6{,}4 & -0{,}8 & 5{,}4 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2{,}8 & 1{,}4 & 3{,}8 \\ 6{,}4 & -0{,}8 & 5{,}4 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot \begin{vmatrix} 6{,}4 & -0{,}8 & 5{,}4 \\ 2{,}8 & 1{,}4 & 3{,}8 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -5 \cdot 6{,}4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}4375 & 1{,}75 & 1{,}4375 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot 6{,}4 \cdot \begin{vmatrix} 1{,}75 & 1{,}4375 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6{,}4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1{,}75 & 1{,}4375 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 6{,}4 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}4375 & 1{,}875 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6{,}4 \cdot 4 \cdot 1{,}875 = 240. \blacktriangleright$$

5.12. Fórmese en FORTRAN una función-subprograma para el cálculo del determinante de n-ésimo orden. Los parámetros son: A, N, donde A es una tabla bidimensional de dimensión N × N.

Calcúlense los determinantes:

5.13.
1,6	8,1	1464,1	62,5	240,1
0,8	2,7	133,1	12,5	34,3
0,8	1,8	24,2	5	9,8.
1	1,5	5,5	2,5	3,5
1,3	2,3	24,7	5,5	10,3

5.14.
5	7,5	17,5	2,5	22,5	27,5
3,2	−3,3	10,7	1,1	5,9	12,1
17,5	10	22,5	−2,5	27,5	−12,5
8,7	4,4	8,9	−1,1	13,1	−5,5.
22,5	−10	27,5	2,5	32,5	5
6,9	−3,4	9,1	1,1	9,3	11,2

5.15. Haciendo uso de la función-subprograma obtenida en el problema 5.12, fórmese en FORTRAN el programa de resolución de los problemas 5.13, 5.14 y uno de los problemas 1.45—1.48.

3. **Sistemas de ecuaciones lineales.** *El método de Jordan—Gauss* (véase el p. 3, § 4) en el caso del sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

consiste en la eliminación sucesiva de las incógnitas, con la particularidad de que, eliminada la $(k-1)$-ésima incógnita, quedan las ecuaciones

$$\sum_{j=k}^{n} a_{ij}^{(k)}x_j = b_i^{(k)}, \quad i = k, k+1, \ldots, n, \tag{2}$$

donde

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad a_{ij}^{(0)} = a_{ij},$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad b_i^{(0)} = b_i.$$

La exactitud de los cálculos aumenta cuando los elementos rectores $a_{kk}^{(k)}$ tienen el módulo máximo en la primera columna del sistema (2).

Para $k = n$ en el sistema (2) queda una sola ecuación, de la cual se determina x_n. Con esto se da por terminado el procedimiento directo de los cálculos. El procedimiento inverso consiste en la búsqueda sucesiva de x_k a partir de $x_{k+1}, \ldots, x_n$, $k = n-1, n-2, \ldots, 1$, determinados anteriormente.

EJEMPLO 2. Resuélvase el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 9{,}13, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 &= 25, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 43, \end{aligned}$$

empleando el método de Jordan—Gauss.

◀ Eliminando sucesivamente x_1 y x_2 y eligiendo a título de elementos rectores los que son máximos según el módulo en las columnas correspondientes, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 &= 1{,}826 \qquad x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 = 1{,}826 \quad (*) \\ -0{,}6x_2 + 4{,}6x_3 &= 21{,}348 \qquad 3{,}8x_2 + 0{,}8x_3 = 44{,}826, \\ 3{,}8x_2 - 0{,}8x_3 &= 44{,}826, \qquad -0{,}6x_2 + 4{,}6x_3 = 21{,}348, \\ x_2 - 0{,}2105x_3 &= 11{,}7963, (*) \qquad x_3 = 6{,}3540. \\ 4{,}4737x_3 &= 28{,}4258, \end{aligned}$$

De las ecuaciones marcadas con asterisco encontramos al principio $x_2 = 13{,}1338$, y, a continuación, $x_1 = 3{,}1820$. ▶

5.16. Fórmese en FORTRAN el subprograma para resolver el sistema cuadrado de ecuaciones lineales por el

método de Jordan—Gauss. Los parámetros son: A, B, N, donde A es una tabla bidimensional de elementos de la matriz del sistema, B es una tabla unidimensional que contiene términos independientes antes del acceso al subprograma y la solución del sistema después de los cálculos, N es el orden del sistema.

5.17. Resuélvase el sistema

$$\begin{aligned} 3{,}2x_1 + 5{,}4x_2 + 4{,}2x_3 + 2{,}2x_4 &= 2{,}6, \\ 2{,}1x_1 + 3{,}2x_2 + 3{,}1x_3 + 1{,}1x_4 &= 4{,}8, \\ 1{,}2x_1 + 0{,}4x_2 - 0{,}8x_3 - 0{,}8x_4 &= 3{,}6, \\ 4{,}7x_1 + 10{,}4x_2 + 9{,}7x_3 + 9{,}7x_4 &= -8{,}4. \end{aligned}$$

5.18. Haciendo uso del subprograma obtenido en el problema 5.16, fórmese en FORTRAN un programa de resolución de uno de los problema 5.17, 4.4—4.8, 4.12—4.17, 4.22 y 4.23.

Método de iteraciones. Si para el sistema (1) se verifican las desigualdades

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

su solución $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ satisface la relación $X = \lim\limits_{k \to \infty} X^{(k)}$, es decir, $x_i = \lim\limits_{k \to \infty} x_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$, donde los componentes del vector columna $X^{(k)}$ se determinan por las igualdades $x_i^{(0)} = \beta_i$,

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \quad \alpha_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

en las cuales $\beta_i = b_i/a_{ii}$, $\alpha_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$.

EJEMPLO 3. Resuélvase por el método de iteraciones el sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}09x_3 &= 10, \\ 0{,}08x_1 + 4x_2 - 0{,}15x_3 &= 20, \\ 0{,}18x_1 - 0{,}06x_2 + 3x_3 &= -4{,}5. \end{aligned}$$

◀ El sistema satisface las condiciones (3) y en la diagonal principal de la matriz se disponen los elementos de la fila que son máximos según el módulo. Reduzcamos el sistema a la forma normal:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 0{,}024x_2 - 0{,}018x_3, \\ x_2 &= 5 - 0{,}02x_1 + 0{,}03x_2, \\ x_3 &= -1{,}5 - 0{,}06x_1 + 0{,}02x_2. \end{aligned}$$

Elijamos la aproximación nula $X^{(0)}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1,5\end{pmatrix}$ y hallemos $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= 2 - 0,024\cdot 5 - 0,018\cdot(-1,5) &&= 1,907,\\
x_2^{(1)} &= 5 - 0,02\cdot 2 + 0,03\cdot(-1,5) &&= 4,915,\\
x_3^{(1)} &= -1,5 - 0,06\cdot 2 + 0,02\cdot 5 &&= -1,52;\\
x_1^{(2)} &= 2 - 0,024\cdot 4,915 - 0,018\cdot(-1,52) &&= 1,90940,\\
x_2^{(2)} &= 5 - 0,02\cdot 1,907 + 0,03\cdot(-1,52) &&= 4,91626,\\
x_3^{(2)} &= -1,5 - 0,06\cdot 1,907 + 0,02\cdot 4,915 &&= -1,51612,\\
x_1^{(3)} &= 2 - 0,024\cdot 4,91626 - 0,018\cdot(-1,51612) &&= 1,9092999,\\
x_2^{(3)} &= 5 - 0,02\cdot 1,90940 + 0,03\cdot(-1,51612) &&= 4,9163284,\\
x_3^{(3)} &= -1,5 - 0,06\cdot 1,90940 + 0,02\cdot 4,91626 &&= -1,5162388.
\end{aligned}
$$

Los primeros tres signos que siguen la coma en $X^{(2)}$ y $X^{(3)}$ son iguales, por lo cual con la exactitud de hasta 0,001 la solución del sistema será el vector

$$X=\begin{pmatrix}1,909\\4,916\\-1,516\end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

5.19. Fórmese en FORTRAN un subprograma de la resolución del sistema de ecuaciones, empleando el método de iteraciones. Los parámetros son: A, B, X, N, EPS, donde A es la tabla bidimensional de elementos de la matriz del sistema, B es la tabla unidimensional que contiene los términos independientes, X es la tabla unidimensional con las soluciones del sistema, N es el orden del sistema, EPS es el error absoluto límite.

Resuélvanse por el método de iteraciones los sistemas:

5.20.
$$
\begin{aligned}
4,1x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 &= 21,14,\\
0,3x_1 + 5,3x_2 + 0,9x_3 - 0,1x_4 &= -17,82,\\
0,2x_1 + 0,3x_2 + 3,2x_3 + 0,2x_4 &= 9,02,\\
0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 - 9,1x_4 &= 17,08.
\end{aligned}
$$

5.21.
$$\begin{aligned} 2{,}4x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}3x_3 - 1{,}1x_4 + 5{,}8x_5 &= 23{,}84,\\ 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 + 1{,}1x_3 + 10{,}2x_4 + x_5 &= 38{,}85,\\ 0{,}5x_1 - 6{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 1{,}5x_4 - 1{,}2x_5 &= 17{,}23,\\ 0{,}1x_1 + 2{,}1x_2 + 5{,}1x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}3x_5 &= 6{,}56,\\ 2{,}5x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}4x_5 &= 6{,}63. \end{aligned}$$

5.22. Haciendo uso del subprograma obtenido en el problema 5.19, fórmese en FORTRAN un programa para la resolución de los problemas 5.20 y 5.21.

RESPUESTAS

1.1 18. **1.2.** $4ab$. **1.3.** 1. **1.4.** $(a-b)^2$.

1.5. 0. **1.6.** $x_1=-4$, $x_2=-1$, **1.7.** $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

1.8. ● Demuéstrese que el discriminante del trinomio cuadrado correspondiente es no negativo. **1.10.** 0. **1.11.** 0. **1.12.** $abc+x(ab+bc+ca)$. **1.13.** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$. **1.14.** $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\beta-\gamma)+\operatorname{sen}(\gamma-\alpha)$. **1.15.** -3. **1.16.** $3\sqrt{3}i$. **1.17.** $-4\pm\sqrt{22}$. **1.18.** $(-\infty,+\infty)$. **1.19.** $(4,+\infty)$. **1.20.** $(-6,-4)$. **1.24.** ● Muéstrese que la última columna del determinante de partida puede ser representada en la forma $\begin{pmatrix}a^3\\b^3\\c^3\end{pmatrix}=(a+b+c)\begin{pmatrix}a^2\\b^2\\c^2\end{pmatrix}-(ab+ac+bc)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+abc\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ y hágase uso de esta representación. **1.27.** Una parábola $y=(x-a)(x-b)$. **1.28.** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&2&5&1&4\end{pmatrix}$, impar, **1.29.** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&6&2&7&3&8&4\end{pmatrix}$, par. **1.30.** Impar. **1.31.** Impar. **1.32.** La paridad de la sustitución coincide con la de n. **1.33.** Si n es impar, la sustitución será par para cualquier k; si n es par, la paridad de la sustitución coincidirá con la paridad de k. **1.34.** Figura con el signo menos. **1.35.** Figura con el signo más. **1.36.** No figura. **1.37.** Figura con el signo más. **1.38.** $i=5$, $k=1$. **1.39.** $i=6$, $k=2$.

1.40. $10x^4-5x^3$. **1.41.** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_{1n}a_{2,\,n-1}\ldots a_{n1}$, **1.42.** 0. **1.43.** a) No variará; b) no variará; c) se anulará; d) se multiplicará por $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; e) se multiplicará por $(-1)^{n-1}$. **1.44.** a) $8a+15b+12c-19d$; b) $2a-8b+c+5d$. **1.45.** 0. **1.46.** 48. **1.47.** 223. **1.48.** $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **1.49.** $(bc-cd)^2$. **1.50.** $(b+c+d)(b+c-d)$. **1.51.** $n!$. **1.52.** $2n+1$. **1.53.** 1. **1.54.** $(-1)^{n-1}\cdot n$. **1.55.** $-a_1a_2\ldots a^n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$. **1.56.** $n+1$. **1.57.** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n}(a_i-a_k)$. **2.2.** $\begin{pmatrix}2&5&-3\\-6&7&-8\end{pmatrix}$. **2.3.** $\begin{pmatrix}2+2i&0\\0&2-4i\end{pmatrix}$.

2.4. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. 2.5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 2.6. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. 2.7. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$. 2.8. $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$. 2.9. $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$. 2.10. (31). 2.11. $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$. 2.12. $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$. 2.13. $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2.14. $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$. 2.15. $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\operatorname{sen} n\alpha \\ \operatorname{sen} n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$. 2.16. $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$. 2.17. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. 2.18. $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$. 2.19. $\begin{pmatrix} a & 2b \\ -3b & a+3b \end{pmatrix}$, donde a y b son cualesquiera números. 2.20. $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$, donde a y b son cualesquiera números. 2.21. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, donde a, b, c son cualesquiera números. 2.22. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, donde a, b, c son números arbitrarios que satisfacen la relación $a^2+bc=0$. 2.23. $\pm E$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, donde $a^2+bc=1$. 2.24. a) la i-ésima y j-ésima filas del producto se cambiarán de lugar; b) a la i-ésima fila del producto se añadirá la j-ésima fila multiplicada por α; c) se cambiarán de lugar la i-ésima y j-ésima columnas; d) a la i-ésima columna del producto se añadirá la j-ésima columna multiplicada por α.

2.27. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. 2.28. $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. 2.29. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. 2.30. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$. 2.31. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.32. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. 2.33. $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.34. $\begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$. 2.35. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.36. $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$.

2.37. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

2.38. $\begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & -7/6 & 10/3 \\ -7/6 & -1/2 & 5/6 & -5/3 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$. 2.39. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.40. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. 2.41. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 2.42. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. 2.43. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3.2. (1, 4, −7, 7). 3.3. (4, 6, −35, −1). 3.4. (70, 40, −20, −16). 3.5. (51, 26, $18\frac{1}{2}$, $-11\frac{1}{2}$). 3.6. (−1/2, 1, 3, 3). 3.7. (−17, −13, 41, 5). 3.8. (−8/5, −7/3, −16/3, −11/3). 3.9. (−23/4, −29/8, 27/8, 9/8). 3.11. Linealmente independiente. 3.12. Linealmente dependiente. 3.13. Linealmente independiente. 3.14. Linealmente dependiente. 3.15. ● Al escribir por componentes la igualdad vectorial $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0$, muéstrese que el sistema de cuatro ecuaciones (con relación a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$) que se obtiene tiene una solución única $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. 3.16. ◀ Pongamos $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 = x$ y escribamos esta igualdad por componentes: $x_1 = 1$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Resolviendo este sistema, encontramos $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $x_5 = 1$. Así pues, $x = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5$. ▶ 3.17. $2e_1 - 3e_2 + 3e_3 - 3e_4 + 3e_5$. 3.18. $5e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$. 3.19. 2. 3.20. 3. 3.21. 3. 3.22. $r = 2$, si $\lambda = 0$ y $r = 3$, si $\lambda \neq 0$. 3.23. $r = 3$ para cualquier λ. 3.25. 3. 3.26. 2. 3.27. 3. 3.28. 2. 3.32. Linealmente independiente. 3.33. Linealmente dependiente. 3.34. 3. 3.35. 3. 3.36. $\lambda = 15$. 3.37. $\lambda \neq 12$. 3.38. Ni para cualesquiera λ. 3.39. $r = 3$; $\mathfrak{B} = (a_2, a_3, a_4)$. 3.40. $r = 3$; $\mathfrak{B} = (a_1, a_2, a_5)$. 3.41. $r = 3$; $\mathfrak{B} = (a_1, a_2, a_4)$. 3.42. $r = 2$; $\mathfrak{B}_1 = (a_1, a_2)$, $\mathfrak{B}_2 = (a_2, a_3)$. 4.43. $r = 2$, $\mathfrak{B}_1 = (a_1, a_2)$, $\mathfrak{B}_2 = (a_1, a_3)$, $\mathfrak{B}_3 = (a_1, a_4)$. 3.44. $r = 2$, $\mathfrak{B}_1 = (a_1, a_4)$, $\mathfrak{B}_2 = (a_2, a_4)$, $\mathfrak{B}_3 = (a_3, a_4)$.

4.1. $x = 16$, $y = 7$. 4.1. $x = 2$, $y = 3$. 4.3. $x = -b$, $y = -\frac{2}{3}a$. 4.4. $x = 2$, $y = -4$, $z = 1$. 4.5. $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$. 4.6. $x = 3$, $y = 1$, $z = -1$. 4.7. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. 4.8. $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. 4.9. El grado del polinomio es inferior a dos, si se verifica la relación $k = (y_3 - y_2)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_2)$; si $k \neq 0$, el grado es igual a la unidad; si $k = 0$, el grado es nulo. ● Demuéstrese que el determinante del sistema de ecuaciones $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$, $i = 1, 2, 3$ (con las incógnitas a, b, c) es distinto de cero.

4.10. $f(x)=x^2-5x+3$. **4.11.** $f_1(x)=\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$;

$f_2(x)=\dfrac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$; $f_3(x)=\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$.

4.12. $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=1$. **4.13.** $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-2$. **4.14.** $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=-1$. **4.15.** $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=-1$. **4.16.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=2$, $x_4=0$. **4.17.** $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=1$, $x_4=-1$. **4.18.** $(1+\sqrt{3}\,c_1, c_1)^T$. **4.19.** El sistema incompatible. **4.20.** El sistema es incompatible.

4.21. $(-1+2c_1,\ 1+c_1,\ c_1)^T$. **4.22.** $(-1,\ 3,\ -2,\ 2)^T$. **4.23.** $(0,\ 2,\ 1/3,\ -3/2)^T$. **4.24.** $\left(-\dfrac{2}{11}+\dfrac{1}{11}c_1-\dfrac{9}{11}c_2,\ \dfrac{10}{11}-\right.$

$\left.-\dfrac{5}{11}c_1+\dfrac{1}{11}c_2,\ c_1,\ c_2\right)^T$. **4.25.** El sistema es incompatible.

4.26. $(c_1,\ -13+3c_1,\ -7,\ 0)^T$. **4.27.** $\left(-\dfrac{6}{7}+\dfrac{8}{7}c_1,\ \dfrac{1}{7}-\dfrac{13}{7}c_1,\ \dfrac{15}{7}-\right.$

$\left.-\dfrac{6}{7}c_1,\ c_1\right)^T$. **4.28.** El sistema es incompatible. **4.29.** $(c_1, c_2, 5-8c_1+$

$+4c_2,\ -3,\ 1+2c_1-c_2)^T$. **4.30.** $\left(\dfrac{20}{9}+c_1-\dfrac{53}{9}c_2,\ -\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{2}c_1+\dfrac{5}{6}c_2,\right.$

$\left.-\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{9}c_2,\ c_1,\ c_2\right)^T$. **4.31.** $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{12}c_1-\dfrac{5}{4}c_2-\dfrac{7}{8}c_3,\ c_1,\right.$

$\left.c_2,\ 1-\dfrac{1}{2}c_3,\ c_3\right)^T$. **4.32.** Si $\lambda\neq 0$, el sistema es incompatible: si $\lambda=0$, entonces $X=\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}c_1-\dfrac{13}{2}c_2,\ -\dfrac{7}{2}-\dfrac{7}{2}c_1-\right.$

$\left.-\dfrac{19}{2}c_2,\ c_1,\ c_2\right)^T$. **4.33.** Si $(\lambda-1)(\lambda+3)=0$ entonces $X=$

$=\dfrac{1}{\lambda+3}(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$; si $\lambda=-3$, el sistema es incompatible; si $\lambda=1$, entonces $X=(1-c_1-c_2-c_3, c_1, c_2, c_3)^T$. **4.34.** Si $\lambda=8$, entonces $X=(c_1,\ 4+2c_1-2c_2,\ 3-2c_2,\ c_2)^T$; si $\lambda\neq 8$, entonces $X=(0,\ 4-2c_1),\ 3-2c_1,\ c_1)^T$. **4.35.** Si $\lambda(\lambda+3)\neq 0$, entonces $X=$

$=\dfrac{1}{\lambda+3}(1,\ 1,\ 1)^T$; si $\lambda=-3$, entonces el sistema es incompatible; si $\lambda=0$, entonces $X=(1-c_1-c_2, c_1, c_2)^T$. **4.37.** c_1E_1, $E_1=(3,\ 1,\ 5)^T$ **4.38.** $c_1E_1+c_2E_2$, $E_1=(2,\ 1,\ 0)^T$, $E_2=(3,0,\ 1)^T$. **4.39.** El sistema sólo tiene una solución trivial. **4.40.** c_1E_1, $E_1=(4,\ 1,\ -5)^T$. **4.41.** $c_1E_1+c_2E_2$, $E_1=(8,\ -6,\ 1,\ 0)^T$, $E_2=(-7,\ 5,\ 0,\ 1)^T$. **4.42.** c_1E_1+

$+c_2E_2$, $E_1=(1,\ 0,\ -5/2,\ 7/2)^T$, $E_2=(0,\ 1,\ 5,\ -7)^T$. **4.43.** c_1E_1+

$+c_2E_2+c_3E_3$, $E_1=(1,\ 0,\ 0,\ -9/4,\ 3/4)^T$, $E_2=(0,\ 1,\ 0,\ -3/2,\ 1/2)^T$, $E_3=(0,\ 0,\ 1,\ -2,\ 1)^T$. **4.44.** $c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3$, $E_1=(1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$, $E_2=(-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)^T$, $E_3=(0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)^T$. **4.45.** $c_1E_1+c_2E_2$, $E_1=(0,\ 1/3,\ 1,\ 0,\ 0)^T$, $E_2=(0,\ -2/3,\ 0,\ 0,\ 1)^T$.

4.46. $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (-3, 2, 1, 0, 0)^T$, $E_2 = (-5, 3, 0, 0, 1)^T$. 4.47. Las filas de la matriz A no lo forman, mientras que las filas de la matriz B sí. ● Si el rango de la matriz de coeficientes de las incógnitas es igual a r, se debe averiguar que a) el rango de A (de B, respectivamente) es igual a $5-r$; b) las filas de la matriz A (de B, respectivamente) constituyen las soluciones del sistema de partida. 4.48. $a_1 = 2$, $X = c_1E_1$, $E_1 = (1, 0, -2)^T$; $a_2 = -4$, $X = c_1E_1$, $E_1 = (1, -24/5, -4,5)^T$. 4.49. $a_1 = -1$, $X = c_1E_1$, $E_1 = (-5,3\ 1/3,\ 1)^T$. 4.50. $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (1/3, 1/3, 0, 0, 0)^T$, $E_1 = (0, 1, 1, 0,0)^T$, $E_2 = (0, 1, 0, 1, 0)^T$, $E_3 = (1/3, -5/3, 0, 0, 1)^T$. 4.51. $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (2/3, 1/6, 0, 0, 0)^T$, $E_1 = (0, 1/2, 1, 0, 0)^T$, $E_2 = (0, -1/2, 0, 1, 0)^T$, $E_3 = (1/3, 5/6, 0, 0, 1)^T$. 4.52. $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4$, $X_0 = (1/3, -1/3, 0, 0, 0, 0)^T$, $E_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)^T$, $E_2 = (-1, 0, 1, 0, 0, 0,)^T$, $E_3 = (0, 0, 0, 1, 1, 0)^T$, $E_4 = (0, 0, 0, -1, 0, 1)^T$. 4.53. $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (1, -1/2, 0, 0, 0)$, $E_1 = (0, -3/2, 1, 0, 0)^T$, $E_2 = (0, -2, 0, 1, 0)^T$, $E_3 = (0, -5/2, 0, 0, 1)^T$. 4.54. $(1, -1, -1, 1)^T$. 4.55. $(6-c, -5 + c, 3, -1, -c, c)^T$.

4.56. El sistema es incompatible. 4.57. $\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}c_1, c_1, 0, 0, \frac{11}{5} - \frac{6}{5}c_2, c_2\right)^T$. 4.58. $(-1+c_1+2c_2, -3+c_1+2c_2, c_1, c_2)^T$.

```
5.1. SUBROUTINE SUM (A, B, C, M, N)
     DIMENSIÓN A (M, N), B (M, N), C (M, N)
     DO 1 I = 1, M
     DO 1 J = 1, N
   1 C (I, J) = A (I, J) + B (I, J)
     RETURN
     END

5.2. SUBROUTINE MUL (A, M, N, ALFA)
     DIMENSIÓN A (M, N)
     DO 1 I = 1, M
     DO 1 J = 1, N
   1 A (I, J) = ALFA*  A (I, J)
     RETURN
     END

5.3. SUBROUTINE MULM (A, B, C, L, M, N)
     DIMENSIÓN A (L, M), B (M, N), C (L, N)
     DO 2 I = 1, L
     DO 2 K = 1, N
     C = 0
     DO 1 J = 1, M
```

```
      1 C = C + A (I, J)*B (J, K)
      2 C (I, J) = C
        RETURN
        END
```

5.4.

```
      SUBROUTINE TRANS (A, N)
      DIMENSIÓN A (N)
      N1 = N — 1
      Do 1 I = 1, N1
      I1 = I + 1
      Do 1J = I1, N
      B = A (I, J)
      A (I, J) = A (J, I)
    1 A (J, I) = B
      RETURN
      END
```

5.5.

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 11\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}6 & -8 & -5 & -15\\ 2 & 4 & 0 & 10\\ -1 & 6 & 2 & 13\\ -2 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad AC=\begin{pmatrix}0 & 0 & 22\\ 0 & 11 & 15\end{pmatrix}.$$

5.6.

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 17 & 14{,}25 & 5{,}75\\ 9{,}35 & 25{,}3 & 22{,}275 & 9{,}625\\ 10{,}4 & 15{,}6 & 8{,}775 & 6{,}5\\ 4{,}9 & 1{,}4 & 3{,}15 & 3{,}5\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}72{,}1 & -48{,}1 & 30{,}85 & -28{,}25\\ 52{,}85 & -34{,}85 & 28{,}75 & -25{,}7\\ 46{,}875 & -31{,}225 & 10{,}25 & -10{,}125\\ 12{,}275 & -8{,}225 & 4{,}75 & -4{,}925\end{pmatrix},\quad A^{T}B^{T}=(BA)^{T}.$$

5.7. La tarea para una computadora electrónica se compone del programa principal y todos los subprogramas, para los cuales se tienen accesos provenientes del programa principal. Más abajo se citan los programas principales para los problemas 5.5, 5.6 y 2.18.

Programa para el problema 5.5:

```
      DIMENSIÓN A (2,4), B (4,2), C (4,3), AB (2,2), BA (4,4), AC (2,3)
      DATAA /1.6,—1.6, 3.2, 3.2, 0., 1.6, 8,6.4/, C/0. 625, 1.25, 0.625,
     —0,625, *—3.125, 0., 1.25, 0.625, 0.625, —1.25, 0., 3.125/
      EQUIVALENCE (B (1,1), C (1,1))
      CALL MULM (B, A, BA, 4, 2, 4)
      CALL MULM (A, B, AB, 2, 4, 2)
      CALL MULM (A, C, AC, 2, 4, 3)
      WRITE (3, 1) ((AB (I, J), J = 1, 2), I = 1, 2)
    1 FORMAT (5H AB, 2 (1H, 2F8.2))
      WRITE (3, 2) ((BA (I, J), J = 1,4), I = 1,4).
```

```
2 FORMAT (5H BA, 4 (1H, 4F8.2))
  WRITE (3, 3) ((AC (I, J), J = 1,3), I = 1,2)
  FORMAT (5H AC, 2 (1H, 3F8.2))
  STOP
  END
```

Programa para el problema 5.6:

```
  DIMENSIÓN A (4, 4), B (4, 4), AB (4, 4), BA (4,4), ATBT (4,4)
  READ (1, 1) ((A (I, J), J = 1,4), I = 1,4), ((B (I, J), J = 1,4),
  1 = 1 4)
1 format (4F8.3)
  CALL MULM (A, B, AB, 4, 4, 4)
  CALL MULM (B, A, BA, 4, 4, 4)
  CALL TRANS (A, 4)
  CALL TRANS (B, 4)
  CALL MULM (A, B, ATBT, 4, 4, 4)
  WRITE (3, 2) ((AB (I, J), J = 1,4), I = 1,4), ((BA (I, J), J = 1,4),
  1 = 1,4), *((ATBT (I, J), J = 1,4), I = 1,4)
  FORMAT (1H, 4F10.3)
  STOP
  END
```

En el programa se prevé la introducción de las matrices de partida desde el equipo periférico. Cuando la introducción se realiza a partir de las tarjetas perforadas una de ellas ha de contener una fila de la matriz. La introducción puede realizarse también mediante los operadores siguientes:

```
READ (1, 1) A, B
1 FORMAT (4F8.3)
```

En este caso la tarjeta perforada debe contener una columna de la matriz.

Programa para el problema 2.18:

```
  DIMENSIÓN A (3,3), ASQ (3,3), B (3,3)
  DATA A/1.,2., 3., —2., —4., —5., 3., 1., 2./, B/5., 0., 0., 0., 5., 0.,
  0., 0., 5./
  CALL MULM (A, A, ASQ, 3, 3, 3)
  CALL MUL (A, 3, 3, —2.)
  CALL SUM (ASQ, A, A, 3, 3)
  CALL SUM (A, B, A, 3,3)
  WRITE (3, 1) ((A (I, J), J = 1, 3), I = 1,3)
1 FORMAT (1H, 3F6.1)
  Stop
  END
```

5.8.

```
  SUBROUTINE INVMAT (A, B, N)
  DIMENSIÓN A (N, N), B (N, N)
```

```
      DO 11 I = 1, N
      DO 11 J = 1, N
      B (I, J) = 0
      IF (I.EQ.J) B(I, J) = 1
   11 CONTINUE
      K = 1
  100 L = K
      AMA = ABS (A (L, K))
      LROW = K
    1 L = L + 1
      AMB = ABS (A (L, K))
      IF (AMA.GE.AMB) GO TO 2
      LROW = L
      AMA = AMB
    2 IF(L.LT.N) GO TO 1
      IF (AMA.NE.0) GO TO 12
      WRITE (3.13)
   13 FORMAT (' DET = 0')
   12 IF (LROW.NE.K) GO TO 3
      GO TO 6
    3 DO 5J = 1, N
      IF (J.LT.K) GO TO 4
      S = A (K,J)
      A (K, J) = A (LROW), J)
      A (LROW, J) = S
    4 S = B (K, J)
      B (K, J) = B (LROW, J)
      B (LROW, J) = S
    5 CONTINUE
    6 DO 10 J = 1, N
      IF (J.LE.K) GO TO 7
      AKJ = A (K, J)/A (K, K)
    7 BKJ = B (K, J)/A (K, K)
      DO 9 I = 1, N
      IF (I.EQ.K) GO TO 9
      IF (I.LE.K) GO TO 8
      A (I, J)=A(I,J)—AKJ*A (I, K)
    8 B(I, J)=B(I, J)—BKJ*A(I, K)
    9 CONTINUE
      IF (J.LE.K) GO TO 99
      A (K, J) = AKJ
   99 B (K, J) = EKJ

   10 CONTINUE
      K = K + 1
      IF (K.LE.N) GO TO 100
      RETURN
      END
```

5.9.
$$\begin{pmatrix} 0{,}12 & -0{,}42 & -0{,}34 & -0{,}44 \\ 0{,}42 & 0{,}12 & 0{,}44 & -0{,}34 \\ 0{,}34 & -0{,}44 & 0{,}12 & 0{,}42 \\ 0{,}44 & 0{,}34 & -0{,}42 & 0{,}12 \end{pmatrix}.$$

5.10
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1{,}25 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1{,}125 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1{,}0625 \end{pmatrix}.$$

5.11. Programa para el problema 5.10:

```
DIMENSIÓN A (5, 5), (B (5,5)
```

```
      READ (1, 1) A
    1 FORMAT (5F10.5)
      CALL INVMAT (A, B, 5)
      WRITE (3, 2) ((B (I, J), J = 1,5), I = 1,5)
    2 FORMAT (1H1 5F8.4)
      STOP
      END
```

5.12.

```
      FUNCIÓN DET (A, N)
      DIMENSIÓN A (N, N)
      K = 1
      DET = 1
    8 L = K
      AMA = ABS (A (L, K))
      LROW = K
    1 L = L + 1
      AMB = ABS (A (L, K))
      IF (AMA.GE.AMB) GO TO 2
      LROW = L
      AMA = AMB
    2 IF (L.LT.N) GO TO 1
      IF (LROW.NE.K) GO TO 3
      SIGN = 1
      GO TO 6
    3 SIGN = — 1
      DO 5 J = K, N
      S = A (K, J)
      A (K, J) = A (LROW, J)
    5 A (LROW, J)=S
      IF (A (K, K). NE.0) GO TO 6
      DET = 0
      RETURN
    6 DET = SIGN*A (K, K)* DET
      K1 = K + 1
      DO 7 I = K1, N
      DO 7 J = K1, N
    7 A (I, J) = A (I, J) — A (I, K)* A (K, J)/A (K, K)
      K = K1
      IF (K.LT.N) GO TO 8
      DET=DET * A (N, N)
      RETURN
      END
```

5.13. 207,36. **5.14.** 234,375

5.15. Programa para el problema 5.14:

```
      DIMENSIÓN A (6, 6)
      READ (1, 1) A
    1 FORMAT (12F5.1)
      DELTA = DET (A, 6)
      WRITE (3,2) DELTA
      FORMAT (6H DET = , F10.4)
      STOP
      END
```

5.16.

```
      SUBROUTINE EXCLUS (A, B, N)
      DIMENSIÓN A (N, N), B (N)
      K = 1
    1 L = K
      AMA = ABS (A (L, K))
      LROW = L
    2 L = L + 1
      AMB = ABS (A (L, K))
      IF (AMA.GE.AMB) GO TO 3
      LROW = L
      AMA = AMB
    3 IF (L.LT.N) GO TO 2
      IF (LROW.NE.K) GO TO 4
      GO TO 6
    4 DO 5 J = K, N
      S = A (K, J)
      A (K, J) = A (LROW, J)
    5 A (LROW, J) = S
    6 IF (A (K, K).NE.0) GO TO 7
      WRITE (3,60)
   60 FORMAT (' DET = 0')
      RETURN
    7 K1 = K + 1
      DO 8 I = K1, N
      C = A (I, K)/A (K, K)
      B (I) = B (I) — B (K)*C
      DO 8 J = K1, N
    8 A (I,J) = A(I,J) — A (K,J)*C
      K = K1
      IF (K.LT.N) GO TO 1
      B (N) = B (N)/A (N, N)
      N1 = N — 1
      DO 10 I = 1, N1
      S = 0
      N1 = N — I + 1
      DO 9 J = N1, N
    9 S = A (N—I, J)*B (J) + S
   10 B (N—I) = B (N—I)—S
      RETURN
      END
```

5.17. $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

5.18. Programa para el problema 5.17:

```
DIMENSIÓN A (4, 4), B (4)
```

```
      READ (1, 1) A, B
    1 FORMAT (16F4.1/4F4.1)
      CALL EXCLUS (A, B, 4)
      WRITE (3, 2) B
    2 FORMAT (1H, 4F6.1)
      STOP
      END
```

5.19.

```
      SUBROUTINE ITER (A, B, X, N, EPS)
      DIMENSION A (N, N), B (N), X (N)
      DO 7 I = 1, N
      B (I) = B (I)/A (I, 1)
    7 X (I) = B (I)
      DO 1 J = 1, N
    1 A (I, J) = — A (I, J)/A (I, 1)
    5 DO 3 I = 1, N
      S = 0
      Do 2 J = 1, N
      IF (J.EQ.I) GO TO 2
      S = S + A (I, J)* X (J)
    2 CONTINUE
    3 A (I, I) = B (I) + S
      KIND = 0
      DO 4 I = 1, N
      S = X (I)
      X (I) = A (I, I)
      A (I, I) = S
      S = ABS (A (I, I) — X (I))
      IF (S.GT.EPS) KIND = 1
    4 CONTINUE
      IF (KIND.EQ.1) GO TO 5
      RETURN
      END
```

5.20. $X = \begin{pmatrix} 5{,}2 \\ -4{,}2 \\ 3 \\ -1{,}8 \end{pmatrix}$

5.21. $X = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2{,}7 \\ 2{,}5 \\ 3{,}1 \\ 4{,}3 \end{pmatrix}$

5.22. Programa para el problema 5.21:

```
      DIMENSION A (5, 5), B (5), X (5)
      READ (1, 1) A, B
    1 FORMAT (10F7.2/)
      CALL ITER (A, B, X, 5, 0.0001)
      WRITE (3, 2) X
    2 FORMAT (1H, 5F8.2)
      STOP
      END
```

CAPITULO 4

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

§ 1. Espacios vectoriales lineales y espacios provistos de producto escalar

1. Espacio vectorial lineal. El conjunto $\mathcal{L}$ se denomina *espacio vectorial lineal*, si se cumplen las siguientes condiciones.

1) En $\mathcal{L}$ se introduce la operación de adición de elementos, es decir, $\forall x, y \in \mathcal{L}$ queda definida la aplicación

$$(x, y) \to z \in \mathcal{L}$$

(la designación es: $z = x + y$) que posee las siguientes propiedades:

1a) $x + y = y + x$;

1b) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

1c) $\exists 0 \in \mathcal{L} \forall x \in \mathcal{L}\ (x + 0 = x)$ (el elemento 0 se llama *nulo*);

1d) $\forall x \in \mathcal{L} \exists (-x) \in \mathcal{L}\ (x + (-x) = 0)$ (el elemento $-x$ se llama *opuesto* al elemento x)

2) En $\mathcal{L}$ se introduce la operación de multiplicación de los elementos por números reales (complejos) es decir, $\forall \lambda \in \mathfrak{P}\ (\lambda \in \mathfrak{C}), \forall x \in \mathcal{L}$ queda definida la aplicación

$$(\lambda, x) \to y \in \mathcal{L}$$

(la designación es: $y = \lambda x$) que posee las propiedades siguientes:

2a) $1 \cdot x = x$;

2b) $\lambda (\mu x) = (\lambda\mu)x$.

3) Las operaciones de adición de elementos y multiplicación de los mismos por números satisfacen las leyes distributivas:

3a) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$;

3b) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Los elementos de un espacio vectorial lineal llevan el nombre de *vectores*. El espacio $\mathcal{L}$ se denomina *real*, si en $\mathcal{L}$ la operación de multiplicación de los vectores por un número viene definida sólo para los números reales, y *complejo*, si dicha operación está definida para los números complejos.

Compruébese si los conjuntos siguientes son espacios vectoriales lineales:

1.1. El conjunto $\mathcal{V}_3$ de todos los vectores geométricos (las operaciones sobre los vectores geométricos están definidas en el § 1, cap. 2).

1.2. El conjunto $\mathbb{R}^n$ de todos los vectores aritméticos de n componentes $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (las operaciones sobre los vectores aritméticos están definidas en el § 3, cap. 3).

1.3. El conjunto $\mathcal{P}_n$ de todos los polinomios

$$p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

de grado $\leq n-1$ con las operaciones de adición de polinomios y multiplicación de los mismos por los números, introducidas de un modo natural.

1.4. El conjunto $C_{[a,b]}$ de todas las funciones $f(t)$, continuas en el segmento $[a, b]$, con las operaciones de adición de las funciones y multiplicación de éstas por los números, introducidas de un modo natural.

1.5. El conjunto $\mathcal{M}_{m,n}$ de todas las matrices de dimensión $m \times n$ (las operaciones sobre las matrices están definidas en el § 2, cap. 3).

Aclárese si los conjuntos siguientes son espacios vectoriales lineales:

1.6. El conjunto $\mathcal{V}_1$ de todos los vectores geométricos que son colineales a una recta fija.

1.7. El conjunto de todos los vectores geométricos que parten del origen de coordenadas y cuyos extremos se ubican en una recta fija.

1.8. El conjunto de todos los vectores geométricos que satisfacen la condición $|x| > a$, donde $a > 0$ es un número fijo.

1.9. El conjunto de todas las sucesiones convergentes.

1.10. El conjunto de todas las sucesiones divergentes.

1.11. El conjunto de todas las funciones integrables en el segmento $[a, b]$.

1.12. El conjunto de todas las transformaciones del giro de un espacio geométrico tridimensional en torno a un eje fijo.

Un sistema de vectores $\{x_1, \ldots, x\} \subset \mathcal{X}$ se llama *linealmente dependiente*, si existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ que no son nulos simultáneamente y tales que $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s = 0$; en caso contrario este sistema se denomina *linealmente independiente*.

Sea $Q \subset \mathcal{X}$ un conjunto arbitrario de vectores de un espacio vectorial lineal. Un sistema ordenado de vectores $\mathfrak{R} = (e_1, \ldots, e_s)$ recibe el nombre de *base* en Q, si:

a) $e_k \in Q$, $k = 1, 2, \ldots, s$;

b) el sistema $\mathfrak{R} = (e_1, \ldots, e_s)$ es linealmente independiente;

c) para cualquier $x \in Q$ existen tales números $x_1, \ldots, x_s$ que

$$x = \sum_{k=1}^{s} x_k e_k. \tag{4}$$

La fórmula (1) se denomina *descomposición del vector x según la base* $\mathfrak{B}$.

Los coeficientes $x_1, \ldots, x_s$ se definen unívocamente por el vector x y se llaman *coordenadas* de este vector en la base $\mathfrak{B}$.

Si el conjunto $Q \subset \mathcal{L}$ posee unas cuantas bases, todas ellas se componen de un mismo número de vectores que se llama *rango* de Q (y se designa rang Q). En particular, si todo el espacio $\mathcal{L}$ dispone de una base, éste se denomina de *dimensión finita* y se designa $\mathcal{L}_n$, donde $n = \dim \mathcal{L}$ es el número de vectores en cualquier base, llamado *dimensión* del espacio. En caso contrario el espacio $\mathcal{L}$ se denomina de *dimensión infinita*.

Sea $\mathcal{L}_n$ un espacio n-dimensional arbitrario y sea $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base en dicho espacio. En este caso a todo vector $x \in \mathcal{L}$ corresponde biunívocamente la columna de sus coordenadas en esta base:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

En este caso las operaciones lineales con los vectores en la forma coordenada tienen por expresión:

$$z = x + y \iff Z = X + Y.$$
$$y = \lambda x \iff Y = \lambda X.$$

Sean $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ y $\mathfrak{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ dos bases diferentes en $\mathcal{L}_n$. Descompongamos cada uno de los vectores de la base $\mathfrak{B}'$ según la base $\mathfrak{B}$:

$$e_k' = t_{1k} e_1 + \ldots + t_{nk} e_n \iff E_k' = \begin{pmatrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Se denomina *matriz del cambio* $T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$, de la base $\mathfrak{B}$ a la $\mathfrak{B}'$ la matriz

$$T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

cuya k-ésima columna es la columna E_k' de las coordenadas del vector e_k' en la base $\mathfrak{B}$. Si x es un vector arbitrario de $\mathcal{L}_n$ y X y X' son las columnas de sus coordenadas en las bases $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$, respectivamente, entonces se verifica la igualdad

$$X' = (T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'})^{-1} X \tag{2}$$

(ésta es la *fórmula de transformación de las coordenadas* al transformar la base).

EJEMPLO 1. Hállense las coordenadas del vector geométrico $x = -i + 2j + k$ en la base $\mathfrak{B}'$ compuesta de los vectores $e_1' = i + j$, $e_2' = j + k$, $e_3' = i + k$.

◀ Escribamos las coordenadas de los vectores e_1', e_2', e_3' en la base de partida $\mathfrak{B} = (i, j, k)$:

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí la matriz del cambio $T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$ tiene por expresión

$$T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al invertir la matriz $T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$ y hacer uso de la fórmula (2), hallamos

$$X' = (T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'})^{-1} X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

es decir, $x = 2e_2' - e_3'$. ▶

1.13. Sea Q un sistema arbitrario de vectores de $\mathcal{L}$. Un subsistema $\{e_1, \ldots, e_s\} \subset Q$ se llama *independiente lineal máximal* en Q, si $\{e_1, \ldots, e_s\}$ es un sistema independiente lineal y todo sistema ampliado $e_1, \ldots, e_s, x$, donde x es un vector arbitrario de Q, es linealmente dependiente. Demuéstrese que toda base en Q es un subsistema independiente lineal máximal en Q, y viceversa.

1.14. Si están dados k vectores arbitrarios $x_1, \ldots, x_k$, de ellos se pueden construir no más de k combinaciones linealmente independientes. Haciendo uso de este resultado, demuéstrese: si $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ son dos bases diferentes en el sistema Q, entonces éstas se componen de un mismo número de vectores (es decir, tiene sentido el concepto de rango del sistema Q).

1.15. En el espacio $\mathcal{V}_3$ están dados los vectores

$$e_1' = i + j, \quad e_2' = i - j, \quad e_3' = -i + 2j - k.$$

Demuéstrese que el sistema $\mathfrak{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ es una base en $\mathcal{V}_3$ y escríbase la matriz del cambio $T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$, donde $\mathfrak{B} = (e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k)$. Hállense las coordenadas del vector $x = i - 2j + 2k$ en la base $\mathfrak{B}'$.

Sean $\mathfrak{B} = (i, j, k)$ y $\mathfrak{B}' = (i', j', k')$ las bases rectangulares en $\mathcal{V}_3$. Hállese en los problemas 1.16—1.18 la matriz del cambio $T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$ y escríbase la columna de coordenadas del vector $x = i - 2j + k$ en la base $\mathfrak{B}'$.

1.16. La base $\mathfrak{B}'$ se ha obtenido cambiando la dirección de todos los tres versores básicos $\mathfrak{B}$ por la contraria.

1.17. La base $\mathfrak{B}'$ se ha obtenido mediante una permutación $i' = j$, $j' = k$, $k' = i$.

1.18. La base $\mathfrak{B}'$ se ha obtenido mediante un giro de la base $\mathfrak{B}$ en un ángulo φ en torno al versor i en el sentido antihorario.

1.19. Hállense el rango y alguna base del sistema de vectores geométricos $x_1 = -i + 2j$, $x_2 = 2i - j + k$, $x_3 = -4i + 5j - k$, $x_4 = 3i - 3j + k$.

1.20. En el espacio $\mathbb{R}^4$ se dan los vectores $e_1' = (1, 2, -1, -2)$, $e_2' = (2, 3, 0, -1)$, $e_3' = (1, 2, 1, 4)$, $e_4' = (1, 3, -1, 0)$. Demuéstrese que el sistema $\mathfrak{B}' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ es una base en $\mathbb{R}^4$ y escríbase la matriz del cambio $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$, donde $\mathfrak{B}$ es una base canónica en $\mathbb{R}^4$ (véase el § 3, cap. 3). Hállense las coordenadas del vector $x = (7, 14, -1, 2)$ en la base $\mathfrak{B}'$.

1.21. Demuéstrese que el sistema de vectores aritméticos $x_1 = (1, 2, 0, 4)$, $x_2 = (-1, 0, 5, 1)$, $x_3 = (1, 6, 10, 14)$ es linealmente dependiente y escríbase alguna relación no trivial del tipo $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$. Hállense el rango y todas las bases de este sistema.

1.22. Demuéstrese que el sistema de las matrices del tipo

$$A_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \alpha \\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} \alpha = 1, \dots, m, \\ \beta = 1, \dots, n \end{matrix}$$

$$\beta$$

forma una base en el espacio $\mathscr{M}_{m,n}$ de todas las matrices de dimensión $m \times n$, y, por tanto, $\dim \mathscr{M}_{m,n} = mn$. ¿A qué equivalen las coordenadas de una matriz arbitraria $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{m,n}$ en dicha base?

1.23. Demuéstrese que el sistema de polinomios, 1, t, t^2, $\dots$, t^{n-1} forma una base en el espacio $\mathscr{P}_n$ de todos los polinomios de grado $\leqslant n - 1$, y, por tanto, $\dim \mathscr{P}_n = n$ (esta base se denomina *canónica*). Hállense las coordenadas:

a) del polinomio $-3t^2 + 1$ en la base canónica del espacio $\mathcal{P}_3$;

b) del polinomio $t^2 - 2t$ en la base canónica del espacio $\mathcal{P}_4$.

1.24. Demuéstrese que el sistema de polinomios $t^3 + t^2 + t + 1$, $t^2 + t + 1$, $t + 1$, 1 es linealmente independiente.

1.25. Demuéstrese que el sistema de polinomios $t^2 + 1$, $-t^2 + 2t$, $t^2 - t$ forma una base en el espacio $\mathcal{P}_3$. Escríbase en esta base la columna de coordenadas del polinomio $-2t^2 + t - 1$.

1.26. Demuéstrese que para t_0 arbitrario el sistema de polinomios 1, $t - t_0$, $(t - t_0)^2$, . . ., $(t - t_0)^{n-1}$ forma una base en $\mathcal{P}_n$.

1.27. Hállese la matriz del cambio de la base canónica 1, t, t^2, . . ., t^{n-1} a la base 1, $t - t_0$, $(t - t_0)^2$, ..., $(t - t_0)^{n-1}$ en $\mathcal{P}_n$.

1.28. Hállense las coordenadas del polinomio $t^2 - t + 2$ en la base 1, $t - 1$, $(t - 1)^2$.

1.29. Demuéstrese que el espacio $\mathcal{P}$ de todos los polinomios es de dimensión infinita. Dedúzcase de aquí que el espacio $C_{[a, b]}$ de las funciones $f(t)$, continuas en el segmento $[a, b]$, es también de dimensión infinita.

En los problemas 1.30—1.34 los vectores e'_1, e'_2, ..., e'_n y x en el espacio arbitrario $\mathcal{L}_n$ vienen dados por sus coordenadas en cierta base $\mathfrak{B}$. Demuéstrese que el sistema $\mathfrak{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ es una base en $\mathcal{L}_n$ y hállese la columna X' de coordenadas del vector x en dicha base.

1.30. $E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$.

1.31. $E'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$,

1.32. $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$E_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.33. $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} i \\ -2i \end{pmatrix}$.

1.34. $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.35. Demuéstrese las siguientes afirmaciones:

a) la matriz del cambio $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ es siempre regular y $T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} = (T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'})^{-1}$;

b) si

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz regular y $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ es cierta base en el espacio $\mathcal{L}_n$, entonces el sistema de vectores

$$e_i' = t_{1i}e_i + \dots + t_{ni}e_n, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

también forma una base en $\mathcal{L}_n$.

1.36. Demuéstrese que si $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ y $\mathfrak{B}''$ son bases en $\mathcal{L}_n$, entonces se verifica la igualdad matricial

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}''} = T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} \cdot T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}''}.$$

En los problemas 1.37, 1.38 los vectores $e_1, e_2, \dots, e_n$ y $e_1', e_2', \dots, e_n'$ en un espacio arbitrario $\mathcal{L}_n$ están dados por sus coordenadas en cierta base. Se requiere demostrar que los sistemas $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ y $\mathfrak{B}' = (e_1', \dots, e_n')$

son bases en $\mathcal{L}_n$ y, utilizando los resultados de los problemas 1.35 y 1.36, escríbase la matriz del cambio $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$.

1.37. $E_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$;

$E_1'=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_2'=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$, $E_3'=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$.

1.38. $E_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$,

$E_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\3\end{pmatrix}$;

$E_1'=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\3\end{pmatrix}$, $E_2'=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\\-4\end{pmatrix}$, $E_3'=\begin{pmatrix}2\\2\\5\\4\end{pmatrix}$,

$E_4'=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\\-4\end{pmatrix}$.

Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos espacios lineales reales (o complejos). Una aplicación $\varphi:\mathcal{L}\to\mathcal{L}'$ del espacio $\mathcal{L}$ sobre el espacio $\mathcal{L}'$ se llama *isomorfismo*, si:

a) φ es biunívoca;

b) $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$ y $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ para cualesquiera $x, y\in\mathcal{L}$ y para todo número λ. Si existe un isomorfismo de $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{L}'$, los espacios $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ se denominan *isomorfos*: $\mathcal{L}\simeq\mathcal{L}'$.

Establézcase en los problemas 1.39—1.41[1]) si es un isomorfismo la aplicación dada de $\mathscr{V}_3$ sobre $\mathbb{R}^3$.

1.39. $\varphi(xi + yj + zk) = (2x - y, z, x + y + z)$.

1.40. $\varphi(xi + yj + zk) = (x + y - 1, 2z, 3y)$.

1.41. $\varphi(xi + yj + zk) = (x + y, -y + 2z, x + 2y - 2z)$.

1.42. La aplicación φ: $\mathscr{L}_n \to \mathbb{R}^n$ de un espacio arbitrario $\mathscr{L}_n$ sobre el espacio $\mathbb{R}^n$ de los vectores aritméticos tiene por expresión

$$\varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ es cierta base en $\mathscr{L}_n$ y $A = (a_{ij})$ es una matriz regular de orden n. Demuéstrese que esta aplicación es un isomorfismo y que, por consiguiente, $\mathscr{L}_n \simeq \mathfrak{B}^n$.

1.43. Demuéstrese que un conjunto de todos los números complejos con una adición corriente y una multiplicación por los números reales forma un espacio real isomorfo al espacio $\mathbb{R}^2$. Escríbase la matriz del cambio de la base $\mathfrak{B} = (1 + i)$ por la $\mathfrak{B}' = (1 + i, -i)$ en dicho espacio y escríbase la descomposición según la base $\mathfrak{B}'$ para el número $-2 + 3i$.

2. Subespacios y variedades lineales. Se denomina *subespacio* de un espacio vectorial lineal $\mathscr{L}$ tal subconjunto $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}$ que posea las siguientes propiedades:

a) $x, y \in \mathscr{L}' \Rightarrow x + y \in \mathscr{L}'$;

b) $x \in \mathscr{L}' \Rightarrow \lambda x \in \mathscr{L}'$ para cualquier número λ.

Si $\mathscr{L}'$ es un subespacio en $\mathscr{L}$, entonces el conjunto de vectores $\mathscr{L}' + x_0 = \{x \in \mathscr{L} \mid x = x' + x_0, x' \in \mathscr{L}'$ para cierto $x_0 \in \mathscr{L}\}$ recibe el nombre de *variedad lineal* obtenida mediante un desplazamiento del subespcio $\mathscr{L}'$ sobre el vector x_0.

1.44. Demuéstrese que todo subespacio $\mathscr{L}'$ de un espacio vectorial lineal $\mathscr{L}$ es también un espacio vectorial lineal (en este caso $\dim \mathscr{L}' \leqslant \dim \mathscr{L}$).

---

[1]) Para designar las coordenadas de los vectores geométricos en la base rectangular (i, j, k) convengamos (en este capítulo) en emplear las letras minúsculas x, y, z, a diferencia de las letras mayúsculas utilizadas en el cap. 2, puesto que las últimas se usan aquí para denotar los vectores columna.

En los problemas 1.45—1.49 se necesita establecer si son subespacios en los espacios correspondientes, los conjuntos dados. Si lo son, hállese la dimensión de cada uno de ellos.

1.45. El conjunto de todos los vectores geométricos pertenecientes a V_3:

a) coplanares con un plano fijo;

b) que satisfacen la condición $(x, a) = 0$, donde a es un vector fijo;

c) que satisfacen la condición $|x| = 1$.

1.46. El conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$, del tipo:

a) $x = (0, x_2, 0, x_4, x_5, \ldots, x_n)$;

b) $x = (1, x_2, 1, x_4, x_5, \ldots, x_n)$.

1.47.* El conjunto de todos los vectores de un espacio arbitrario $\mathscr{L}_n$, cuyas coordenadas en una base fija satisfacen las condiciones:

a) $x_1 = x_n$; b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;

c) $x_1 - x_2 = 1$;

d)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

o bien, en la forma matricial, $AX = 0$, donde A es una matriz dada de dimensión $m \times n$.

1.48. El conjunto de todas las matrices A de orden n que satisfacen las condiciones:

a) $A^T = A$ (matrices simétricas); b) $\det A = 0$.

1.49. El conjunto de todas las funciones $f(t)$, continuas en el segmento $[a, b]$, que satisfacen las condiciones:

a) $f(t_0) = 0$ para cierto $t_0 \in [a, b]$;

b) $f(t_0) = 1$ para cierto $t_0 \in [a, b]$;

c) $f(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, es decir, $f(t)$ es un polinomio de grado no superior a $n - 1$.

Sea Q un sistema arbitrario de vectores del espacio vectorial lineal $\mathscr{L}$.

Se llama *cápsula lineal* del sistema Q un conjunto de vectores

$$\mathscr{L}(Q) = \{x \mid x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s, \quad x_1, \ldots, x_s \in Q\}.$$

1.50. Demuéstrese que:

a) $\mathscr{L}(Q)$ es un subespacio en $\mathscr{L}$;

b) $\dim \mathscr{L}(Q) = \operatorname{rang} Q$, con la particularidad de que a título de base en $\mathscr{L}(Q)$ puede elegirse cualquier base del sistema Q.

1.51. Hállese la dimensión de una cápsula lineal $\mathcal{L}(x_1, x_2)$ de los vectores aritméticos $x_1 = (1, 0, 2, -1)$, $x_2 = (0, -1, 2, 0)$. Pruébese que el vector $x = (1, -1, 4, -1)$ pertenece a $\mathcal{L}(x_1, x_2)$.

Hállense la dimensión y una base cualquiera de la cápsula lineal del sistema dado de vectores aritméticos:

1.52. $x_1 = (1, 0, 0, -1)$, $x_2 = (2, 1, 1, 0)$, $x_3 = (1, 1, 1, 1)$, $x_4 = (1, 2, 3, 4)$, $x_5 = (0, 1, 2, 3)$.

1.53. $x_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $x_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $x_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $x_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $x_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

1.54*. Pruébese que la cápsula lineal del sistema de polinomios $-3t^2 - 1$, $2t^2 + t$, $-t$ coincide con el espacio $\mathcal{P}_3$ de todos los polinomios de grado $\leqslant 2$.

Sea V un sistema arbitrario de los vectores geométricos. Se denomina *imagen geométrica* del sistema V un conjunto de puntos que representan los extremos de los vectores de V, a condición de que todos los vectores parten del origen de coordenadas.

1.55. Escríbase la ecuación de una imagen geométrica de la cápsula lineal $\mathcal{L}(a)$ y de la variedad $\mathcal{L}(a) + b$, si $a = -2i + j - k$ y $b = 2i - j$.

1.56. Escríbase la ecuación de una imagen geométrica de la cápsula lineal $\mathcal{L}(a_1, a_2)$ y de la variedad $\mathcal{L}(a_1, a_2) + b$, si $a_1 = -i + j + k$, $a_2 = 2j - k$ y $b = i + k$.

1.57. Sea dado un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 4, \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

a) Domuéstrese que el conjunto de soluciones de este sistema es una variedad lineal en el espacio $\mathbb{R}^5$.

b) ¿Por desplazamiento de qué sistema se obtiene esta variedad lineal? Hállese el rango y una base cualquiera de este subespacio.

c) Hállese un vector cualquiera de desplazamiento.

3. Espacios provistos de un producto escalar. Un espacio lineal real $\mathfrak{E}$ se llamará *euclídeo*, si a todo par de vectores x e y de $\mathfrak{E}$ se le ha puesto en correspondencia un número real que se designa mediante el símbolo (x, y) y se denomina *producto escalar* de los vectores x e y teniendo además cumplidas las siguientes condiciones:

1) $(x, y) = (y, x)$;

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
4) $(x, x) \geqslant 0$, siendo $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
Se denomina *longitud* de un vector el número

$$| x | = \sqrt{(x, x)}.$$

Un vector x cuya longitud es igual a la unidad se llama *normalizado*.

Para cualesquiera vectores x, y de un espacio euclídeo es válida la *desigualdad de Cauchy — Buniakovski*

$$| (x, y) |^2 \leqslant (x, x) (y, y),$$

la cual permite determinar el ángulo entre los vectores no nulos de la manera siguiente:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{| x | \cdot | y |}$$

Los vectores no nulos x, $y \in \mathcal{E}$ se llaman *ortogonales*, si $(x, y) = 0$.

La base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de un espacio euclídeo n-dimensional $\mathcal{E}_n$ se denomina *ortonormalizada*, si

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Si en el espacio $\mathcal{E}_n$ viene dada una base arbitraria $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, los vectores

$$e_1 = f_1, \quad e_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i e_i, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

donde $c_i = \frac{(f_k, e_i)}{(e_i, e_i)}$, forman en dicho espacio una base ortogonal (*proceso de ortogonalización de Schmidt*).
ortogonal (*proceso de ortogonalización de Sbhmidt*).

Un espacio lineal complejo $\mathcal{U}$ se denomina *unitario*, si a cada par de vectores x, y de $\mathcal{U}$ se le ha puesto en correspondencia un número complejo, denotado mediante el símbolo (x, y) y llamado *producto escalar* de los vectores x e y, con la particularidad de que quedan cumplidas las siguientes condiciones:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$, $\lambda \in \mathbb{C}$
4) $(x, x) \geqslant 0$, con la particularidad de que $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

En el espacio unitario no se define el ángulo entre los vectores. No obstante, todas las demás definiciones, como también los resultados enunciados más arriba para el espacio euclídeo, quedan vigentes también para el espacio unitario.

En adelante los espacios euclídeos y unitarios se denominan *espacios provistos de un producto escalar*.

1.58. Demuéstrense las siguientes propiedades del producto escalar de un espacio unitario:

a) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$;
b) $(x, \lambda y) = \lambda (x, y)$;
c) $(x_1 - x_2, y) = (x_1 y) - (x_2, y)$;
d) $(x, 0) = 0$.

1.59. Demuéstrese que la base $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ en un espacio unitario $\mathcal{U}_n$ es ortonormalizada cuando, y sólo cuando, queda cumplida cualquiera de las siguientes condiciones:

a) si $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, e $y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$ entonces $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.

b) si $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, entonces $x_k = (x, e_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

1.60. Demuéstrese que cualquier sistema de los vectores ortogonales dos a dos es linealmente independiente.

1.61. Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, demuéstrese las siguientes *desigualdades triangulares*:

a) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
b) $||x| - |y|| \leqslant |x + y|$.

1.62. a) Demuéstrese que en el espacio $\mathbb{R}^n$ la fórmula

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, define un producto escalar (el espacio euclídeo de vectores aritméticos que se obtiene, se designará en adelante también mediante el símbolo $\mathbb{R}^n$).

b) Pruébese que en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ la base canónica (véase § 3, cap. 3) es ortonormalizada.

c) Escríbase la desigualdad de Cauchy—Buniakovski para el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

d) Escríbanse las desigualdades triangulares en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

1.63. Sean $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ los vectores arbitrarios del espacio aritmético $\mathbb{R}^2$. Muéstrese que un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ puede definirse mediante los siguientes procedimientos:

a) $(x, y) = 2x_1 y_1 + 5x_2 y_2$;
b) $(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$.

Calcúlese el producto escalar de los vectores $x = (1, -2)$ e $y = (5, 1)$, empleando cada uno de los procedimientos citados.

1.64. Demuéstrese que en el espacio $\mathcal{P}_n$ de polinomios de grado $\leqslant n - 1$ el producto escalar de los polinomios

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}$$

y

$$q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_{n-1} t^{n-1}$$

puede ser determinado por uno de los siguientes métodos:

a) $(p, q) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1}$;

b) $(p, q) = \sum_{k=1}^{n} p(t_k)\, q(t_k)$, $t_1, \ldots, t_n$ son números reales arbitrarios distintos dos a dos.

Calcúlese el producto escalar de los polinomios $p(t) = 1 + t + t^2$ y $q(t) = t - 2t^2 + 3t^3$ empleando cada uno de los métodos indicados ($n = 4$), si en el caso b) $t_1 = -2$, $t_2 = -1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$.

1.65. a) Demuéstrese que en el espacio $C_{[a,b]}$ la relación

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

define un producto escalar.

b) Escríbase la desigualdad de Cauchy—Buniakovski para dicho espacio.

c) Escríbanse las desigualdades triangulares para el mismo espacio.

Aplíquese el proceso de ortogonalización a los siguientes sistemas de vectores del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ (véase el problema 1.62):

1.66. $f_1 = (1, -2, 2)$, $f_2 = (-1, 0, -1)$, $f_3 = (5, -3, -7)$.

1.67. $f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (3, 3, -1, -1)$, $f_3 = (-2, 0, 6, 8)$.

Empleando el proceso de ortogonalización, constrúyase la base ortogonal de un subespacio tendido sobre el sistema dado de vectores en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$:

1.68. $f_1 = (1, 2, 2, -1)$, $f_2 = (1, 1, -5, 3)$, $f_3 = (3, 2, 8, -7)$.

1.69. $f_1 = (2, 1, 3, -1)$, $f_2 = (7, 4, 3, -3)$, $f_3 = (1, 1, -6, 0)$, $f_4 = (5, 7, 7, 8)$.

Compruébese la ortogonalidad de los siguientes sistemas de vectores en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y complétense los mismos hasta obtener las bases ortogonales:

1.70*. $e_1 = (1, -2, 1, 3)$, $e_2 = (2, 1, -3, 1)$.

1.71. $e_1 = (2/3, 1/3, 2/3)$, $e_2 = (1/3, 2/3, -2/3)$.

1.72. $e_1 = (1, 1, 1, 2)$, $e_2 = (1, 2, 3, -3)$.

1.73. Sea L un subespacio lineal en $\mathbb{R}_n$. Demuéstrese que:

a) todo vector $x \in \mathscr{E}_n$ puede representarse unívocamente en la forma $x = y + z$, donde $y \in L$ y z es ortogonal a L (y se denomina *proyección ortogonal* del vector x sobre L, y z es *componente ortogonal* de x respecto de L);

b) si $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_k)$ es una base de L, entonces $y = \sum_{i=1}^{k} c_i e_i$, donde los coeficientes c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ se determinan unívocamente del sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{k} (e_j, e_i) c_i = (e_j, x), \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

mientras que $z = x - y$.

Haciendo uso de los resultados del problema 1.73, hállense la proyección ortogonal de y, y el componente ortogonal z del vector x sobre el subespacio lineal L del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

1.74. $x = (4, -1, -3, 4)$, L está tendido sobre los vectores:

$$e_1 = (1, 1, 1, 1), \quad e_2 = (1, 2, 2, -1), \quad e_3 = (1, 0, 0, 3).$$

1.75. $x = (5, 2, -2, 2)$, L está tendido sobre los vectores:

$$e_1 = (2, 1, 1, -1), \quad e_2 = (1, 1, 3, 0), \quad e_3 = (1, 2, 8, 1).$$

1.76. Demuéstrese que en un espacio euclídeo real es lícito el teorema de Pitágoras, como también el teorema inverso: dos vectores x e y son ortogonales cuando, y sólo cuando, $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

1.77*. Demuéstrese que el teorema de Pitágoras queda válido también en un espacio unitario: si los vectores x e y son ortogonales, entonces $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2$. Muéstrese, además, que la afirmación inversa al teorema de Pitágoras no es en este caso verídica.

§ 2. Operadores lineales

1. Álgebra de los operadores lineales. Se denomina *operador lineal* en un espacio vectorial lineal $\mathscr{L}$ toda aplicación $A : \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ del espacio $\mathscr{L}$ en sí que posee las siguientes propiedades

$$A(\lambda x) = \lambda A x \quad \text{y} \quad A(x + y) = Ax + Ay.$$

Sea A un operador lineal en un espacio de dimensión finita $\mathscr{L}_n$ y sea $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ cierta base fija. Descompongamos los vectores Ae_k, $k = 1, \ldots, n$, según la base $\mathfrak{B}$:

$$Ae_k = a_{1k}e_1 + \ldots + a_{nk}e_n, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

En este caso la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz del operador A en la base $\mathfrak{B}$*. La matriz del operador A se designará a veces, también por el símbolo $[A]$ ó $[A]_{\mathfrak{B}}$, si resulta esencial de qué base se trata.

Un operador se define unívocamente por la definición de su matriz, a saber: si $y = Ax$, entonces $Y = AX$, donde X, Y son columnas de las coordenadas de los vectores x, y, mientras que A es la matriz del operador A en la base $\mathfrak{B}$.

Sean A y A' las matrices del operador A en las bases $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ y sea $T = T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ la matriz del cambio de la base $\mathfrak{B}$ a la $\mathfrak{B}'$. Entonces la fórmula de transformación de la matriz de un operador para el caso de transformación de la base tiene por expresión

$$A' = T^{-1}AT. \tag{1}$$

EJEMPLO 1. Escríbase en la base $\mathfrak{B} = (i, j, k)$ la matriz del operador de proyección P_α sobre el plano α: $x + y + z = 0$.

◀ El operador de proyección sobre el plano α se determina por la igualdad $P_\alpha x = x_\alpha$, donde x_α es la proyección ortogonal del vector x sobre el plano α. Se tiene

$$P_\alpha x = x - x_n = x - \mathrm{pr}_n x \cdot \frac{n}{|n|} = x - \frac{(n, x)}{|n|^2}\, n,$$

donde n es el vector normal del plano α. En el caso que se considera $n = i + j + k$, y, por consiguiente,

$$P_\alpha i = i - \frac{1}{3}\, n = \frac{2}{3}\, i - \frac{1}{3}\, j - \frac{1}{3}\, k,$$

$$P_\alpha j = j - \frac{1}{3}\, n = -\frac{1}{3}\, i + \frac{2}{3}\, j - \frac{1}{3}\, k,$$

$$P_\alpha k = k - \frac{1}{3}\, n = -\frac{1}{3}\, i - \frac{1}{3}\, j + \frac{2}{3}\, k,$$

de donde

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Sobre los operadores lineales que actúan en un espacio fijo $\mathscr{L}$ se introducen las siguientes operaciones:

a) adición de los operadores: $(A + B)x = Ax + Bx$; en este caso $[A + B] = A + B$;

b) multiplicación de los operadores por los números: $(\lambda A)x = \lambda (Ax)$; en este caso $[\lambda A] = \lambda A$;

c) multiplicación de los operadores: $(AB)x = A\ (Bx)$; en este caso $[AB] = AB$.

Se denomina *inverso* del operador A un operador A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, donde E es el operador *unidad* que realiza una aplicación idéntica. El operador A cuenta con un inverso (y se llama, en este caso, *regular*), si y sólo si, su matriz A es regular (en cualquier base); en este caso $[A^{-1}] = A^{-1}$.

Establézcase en los problemas 2.1—2.7 cuáles de las aplicaciones dadas del espacio $\mathcal{V}_3$ en sí son operadores lineales; escríbanse sus matrices en la base rectangular $\mathfrak{B} = (i, j, k)$.

2.1. $Ax = \lambda x$, λ es un número fijo.

2.2. $Ax = \lambda x + a$, λ y a son fijos.

2.3. $Ax = (x, e)\, e$, donde e es el vector unidad dado. Aclárese el significado geométrico de esta aplicación.

2.4. $Ax = [a, x]$, a es un vector fijo.

2.5. $Ax = (a, x)\, x$, a es un vector fijo.

2.6**. $U(e, \varphi)$ es una aplicación consistente en girar en un ángulo φ en torno al eje prefijado por el vector unidad e.

2.7. Si $x = xi + yj + zk$, entonces

$$Ax = (y + z)i + (2x + z)j + (3x - y + z)k.$$

Establézcase en los problemas 2.8—2.10 cuáles de las aplicaciones dadas del espacio de vectores aritméticos $\mathbb{R}^3$ en sí son operadores lineales; escríbanse las matrices de éstos en una base canónica.

2.8. $Ax = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$.

2.9. $Ax = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2)$.

2.10. $Ax = (0,\ x_2 - x_3,\ 0)$.

2.11. En $\mathcal{L}_4$ viene dado un operador lineal A cuya matriz en cierta base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ es igual a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hállese la matriz de este operador en las bases:

a) $\mathfrak{B}' = (e_1, e_3, e_2, e_4)$;

b) $\mathfrak{B}' = (e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.

2.12. En $\mathcal{L}_3$ vienen dadas dos bases:

$$\mathfrak{B}'\colon\ e_1' = 8e_1 - 6e_2 + 7e_3, \qquad e_2' = -16e_1 + 7e_2 - 13e_3,$$
$$e_3' = 9e_1 - 3e_2 + 7e_3,$$
$$\mathfrak{B}''\colon e_1'' = e_1 - 2e_2 + e_3, \qquad e_2'' = 3e_1 - e_2 + 2e_3,$$
$$e_3'' = 2e_1 + e_2 + 2e_3.$$

Hállese la matriz del operador A en la base $\mathfrak{B}''$, si su matriz en la base $\mathfrak{B}'$ tiene la forma

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

2.13. En el espacio $\mathcal{L}_2$ el operador A en la base $\mathfrak{B}'$: $e_1' = e_1 + 2e_2$, $e_2' = 2e_1 + 3e_2$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. El operador B en la base $\mathfrak{B}''$: $e_1' = 3e_1 + e_2$, $e_2'' = 4e_1 + 2e_2$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Hállese la matriz del operador $A + B$ en la base $\mathfrak{B}''$.

2.14. Sean $p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ un polinomio y A, un operador lineal. Examinemos el operador $p(A)$ definido por la igualdad

$$p(A) = a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Hállese la matriz del operador $p(A)$, si $p(t) = 3t^2 - 2t + 5$, y el operador A viene definido por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2.15. En el espacio $\mathcal{P}_n$ viene dado un operador de diferenciación $D = \frac{d}{dt}$. Hállese la matriz de este operador en la base:

a) $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$;

b) $1, (t-t_0), \frac{(t-t_0)^2}{2!}, \ldots, \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demuéstrese la igualdad operacional $D^n = O$ (O es el operador nulo: $Ox = 0$).

2.16. En el espacio $\mathcal{P}_4$ viene dada la aplicación

$$Ap(t) = \int_0^t K(t, \tau)\, p(\tau)\, d\tau,$$

donde $K(t, \tau)$ es un polinomio de dos variables cuyo grado respecto de t no es superior a 3. Demuéstrese que A es un operador lineal en $\mathcal{P}_4$; hállese la matriz de este operador en la base $1, t, t^2, t^3$ para el caso en que $K(t, \tau) = t + \tau$.

2.17. En el espacio $\mathcal{P}_4$ viene dada una aplicación

$$A_h p(t) = p(t + h),$$

donde h es cierto número fijo. Demuéstrese que A_h es un operador lineal y hállese su matriz en la base $1, t, t^2, t^3$.

2.18. En un espacio de funciones derivables en todo el eje se dan el operador de diferenciación $D = \frac{d}{dt}$ y el operador $A = e^{\lambda t}$ de multiplicación por la función $e^{\lambda t}$. Verifíquese la igualdad $DA - AD = \lambda A$.

En los problemas 2.19-2.26 se pide establecer cuáles de los operadores lineales dados en $\mathcal{V}_3$ son regulares y hallar para éstos la forma explícita de los operadores inversos (e es un vector fijo de longitud unidad y $x = xi + yj + zk$).

2.19. $Ax = \lambda x$, λ es un número fijo.

2.20. $Ax = (x, e)e$. **2.21.** $Ax = [e, x]$.

2.22. $Ax = x - (x, e)e$. **2.23.*** $Ax = x - 2(x, e)e$.

2.24. $Ax = (y + z)i + (2x + z)j + (3x - y + z)k$.

2.25. $Ax = 2zi + (x - z)j + (2x + 3z)k$.

2.26. $A = U(e, \varphi)$ es un operador del giro en un ángulo φ en torno al eje definido por el vector e.

Establézcase cuáles de los operadores lineales dados en $\mathbb{R}^3$ son regulares y hállese la forma explícita de los operadores inversos:

2.27. $Ax = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_3,\ x_2)$.

2.28. $Ax = (x_2 + 2x_3,\ -x_2,\ 2x_2 - x_3)$.

2.29. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - -2x_2 + x_3)$.

El conjunto T_A de todos los vectores $Ax, x \in \mathcal{L}$, lleva el nombre de *imagen* del operador A. El conjunto N_A de todos los vectores $x \in \mathcal{L}$, para los cuales $Ax = 0$, se denomina *núcleo* del operador A. La imagen y el núcleo de un operador lineal son subespacios en $\mathcal{L}$. En este caso la dimensión de la imagen $r_A = \dim T_A$ recibe el nombre de *rango* y la dimensión del núcleo $n_A = \dim N_A$ se llama *defecto* del operador A. Se verifica la igualdad $r_A + n_A = n$, donde n es la dimensión del espacio $\mathcal{L}$.

2.30. Descríbanse la imagen y el núcleo de los siguientes operadores lineales que actúan en el espacio $\mathcal{V}_3$:

a) $Ax = (x, e)e$, $|e| = 1$;

b) $Ax = [x, a]$, $a \neq 0$.

2.31. Descríbase la imagen y el núcleo del operador de diferenciación D que actúa en el espacio $\mathcal{P}_n$.

Para los operadores lineales mencionados que actúan en el espacio $\mathbb{R}^3$ determínense en los problemas 2.32—2.34 el rango y el defecto y hállense las bases de la imagen y del núcleo.

2.32. $Ax = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 - x_3,\ x_1 + x_2)$.

◀ Con el fin de representar los vectores aritméticos y el operador lineal dado utilicemos la base canónica en $\mathbb{R}^3$. En dicha base la matriz del operador tiene por expresión

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Según la definición, $y \in T_A$ si, y sólo si, existe un vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $y = Ax$, o bien, en la notación coordenada,

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

La igualdad (2) deja constancia de que la imagen T_A coincide con la cápsula lineal del sistema de columnas de la matriz A. Por consiguiente, el rango del operador A coincide con el de su matriz, es decir, es igual a dos, y a título de base de T_A puede elegirse cualquiera de las bases del sistema de columnas de la matriz A, por ejemplo

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, $x \in N_A$ cuando, y sólo cuando, $Ax = 0$, o bien, en la notación coordenada,

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

De aquí proviene que el núcleo N_A coincide con el subespacio de soluciones del sistema homogéneo (3), es decir, el defecto del operador A es $n_A = n - r_A = 3 - 2 = 1$, y a título de base en N_A puede ser elegido el sistema fundamental de soluciones del sistema (3), por ejemplo, $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ▶

2.33. $Ax = (2x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$.

2.34. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

2.35. Demuéstrese que el operador A es regular cuando, y sólo cuando, su defecto es nulo y, por tanto, el rango coincide con la dimensión del espacio.

2. Números propios y vectores propios de un operador lineal. Supongamos que λ y el vector $x \in \mathscr{L}$, $x \neq 0$, son de tal género que

$$Ax = \lambda x. \tag{4}$$

El número λ en este caso se llama *número propio* del operador lineal A y el vector x, *vector propio* del mismo operador correspondiente al número propio λ.

En un espacio de dimensión finita $\mathscr{L}_n$ la igualdad vectorial (4) es equivalente a la igualdad matricial

$$(A - \lambda E)\, X = 0, \qquad X \neq 0. \tag{5}$$

De aquí se deduce que λ es el número propio del operador A cuando, y sólo cuando, $\det (A - \lambda E) = 0$, es decir, λ es una raíz del polinomio $p(\lambda) = \det (A - \lambda E)$, llamado *polinomio característico* del operador A. La columna de las coordenadas X de cualquier vector propio, correspondiente al número propio λ, es cierta solución no trivial del sistema homogéneo (5).

EJEMPLO 2. Hállense los números propios y los vectores propios del operador P_{Oxy} de proyección sobre el plano Oxy en el espacio $\mathscr{V}_3$.

◀ 1) Resolución geométrica. La igualdad $P_{Oxy}\, x = \lambda x$, $x \neq 0$, significa que la proyección ortogonal del vector x sobre el plano Oxy es colineal con el mismo vector x. Mas, esto es posible sólo en dos casos.

a) El vector $x \neq 0$ es coplanar al plano Oxy. Para todos los vectores de esta índole $P_{Oxy}\, x = x$, es decir, todos ellos son vectores propios del operador P_{Oxy} correspondientes al número propio $\lambda_1 = 1$.

b) El vector $x \neq 0$ es ortogonal al plano Oxy. Para todos los vectores de esta índole $P_{Oxy}\, x = 0 = 0 \cdot x$, es decir, todos ellos son vectores propios de operador P_{Oxy} correspondientes al número propio $\lambda_2 = 0$.

De resultas llegamos a la conclusión de que el operador P_{Oxy} tiene dos números propios: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. Los vectores propios que corresponden a estos números son:

$$\lambda_1 = 1 : x^{(\lambda_1)} = xi + yj, \qquad x^{(\lambda_1)} \neq 0,$$

$$\lambda_2 = 0 : x^{(\lambda_2)} = zk, \qquad x^{(\lambda_2)} \neq 0.$$

2) Resolución analítica. La matriz del operador P_{Oxy} en la base rectangular $\mathscr{B} = (i, j, k)$ tiene la forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica es:

$$\det(P-\lambda E)=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2=0$$

de donde $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$ son números propios del operador.

Hallemos los vectores propios correspondientes al número propio $\lambda_1 = 1$. Para $\lambda = 1$ el sistema (5) toma la forma

$$(P-E)X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

El sistema fundamental de soluciones es:

$$E_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$

y la solución general:

$$xE_1+yE_2=\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix}.$$

De aquí concluimos que los vectores propios correspondientes al número propio $\lambda_1 = 1$ tiene por expresión

$$x^{(\lambda_1)} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j},$$

donde x e y son números arbitrarios no simultáneamente nulos.

Por analogía se examina el caso de $\lambda_2 = 0$. Obtendremos en este último caso

$$x^{(\lambda_2)} = z\boldsymbol{k},$$

donde z es un número arbitrario distinto de cero. ▶

Hállense en los problemas 2.36—2.40 los números propios y vectores propios de los operadores en $\mathcal{V}_3$. Resuélvanse dichos problemas geométricamente, es decir, en la forma invariante sin relación alguna con la elección de cierta base en $\mathcal{V}_3$ (véase el ejemplo 2, la resolución geométrica). Resuélvanse a continuación, los problemas 2.36—2.38 con ayuda del método analítico.

2.36. $\boldsymbol{Ax} = a\boldsymbol{x}$, a es un número fijo.

2.37. $\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{i})\boldsymbol{i}$ es el operador de proyección sobre el eje Ox.

2.38. $Ax = [i, x]$.

2.39. $A = U(e, \varphi)$ es el operador de giro en un ángulo φ alrededor de un eje definido por el vector e.

2.40. $Ax = x - 2(x, e)e$ es un operador de imagen especular en el plano con un vector normal e.

En los problemas 2.41—2.46 hállense los números propios y vectores propios de los operadores lineales dados por sus matrices.

2.41. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 2.42. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.43. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. 2.44. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

2.45. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. 2.46. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

2.47. En el espacio $\mathcal{V}_2$ de vectores geométricos viene dado en el plano el operador de giro $U(\varphi)$ en un ángulo $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ alrededor del origen de coordenadas. Compruébese (geométrica y analíticamente) que para $\varphi \neq 0, \pi$ dicho operador no tiene números propios. Este ejemplo muestra que el operador lineal en un espacio real puede ser privado de números propios (y también de vectores propios).

2.48. En el espacio complejo $\mathcal{L}_2$ el operador A viene dado por la matriz

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Hállense sus números propios y los vectores propios. Compárense los resultados obtenidos con los del problema 2.47.

2.49.* Supongamos que el operador A que actúa en un espacio complejo $\mathcal{L}_n$ viene dado en cierta base por una matriz de elementos reales. Demuéstrese que:

a) si λ es un número propio, entonces $\bar{\lambda}$ será también un número propio;

b) si $X^{(\lambda)}$ es una columna de coordenadas de un vector propio correspondiente al número propio λ, entonces $\overline{X^{(\lambda)}}$ será la columna de coordenadas del vector propio correspondiente al número propio $\bar{\lambda}$.

2.50*. Hállense en un espacio complejo $\mathcal{L}_3$ los números propios y vectores propios del operador lineal dado mediante una matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.51. Muéstrese que si x es un vector propio del operador A, correspondiente al número propio λ, entonces será un vector propio del operador $p(A) = a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E$, correspondiente al número propio $p(\lambda)$.

2.52. Demuéstrese que:

a) el operador A tiene operador inverso cuando, y sólo cuando, está privado de números propios nulos;

b) si el operador A tiene un operador inverso, entonces A y A^{-1} tienen los mismos vectores propios. ¿Cómo están ligados entre sí los números propios de estos operadores?

3. Operadores lineales en los espacios provistos de un producto escalar. Sea A un operador lineal que actúa en un espacio provisto de producto escalar (x, y). Un operador lineal A^* se llama *conjugado del operador* A, si para cualesquiera vectores x, y se verifica la igualdad

$$(Ax, y) = (x, A^* y).$$

Para todo operador A el operador conjugado A^* existe y es único.

Si el operador A en una base ortonormalizada tiene la matriz $A = (a_{ij})$, el operador conjugado A^* en la misma base tiene la matriz $A^* = (a_{ij}^*)$, donde $a_{ij}^* = \bar{a}_{ij}$ (la matriz A^* se denomina conjugada de la matriz A). En el caso particular de un espacio euclídeo $A^* = A^{\perp}$.

EJEMPLO 3. El operador lineal $A: \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ en la base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ tiene la matriz

$$[A]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se sabe que $e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3$, $e_2' = e_1 + e_2 + 2e_3$, $e_3' = e_1 + e_2$, y la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ es ortonormalizada. Hállese la matriz del operador conjugado A^* en la base $\mathcal{B}'$.

◀ Dando que la base $\mathcal{B}'$ no está ortonormalizada (¡compruébese!), entonces para aprovechar la afirmación acerca de la conexión

de las matrices de los operadores A y A^*, hace falta hallar la matriz $[A]_{\mathfrak{B}}$ (la base $\mathfrak{B}$ es por hipótesis, ortonormalizada). Tenemos

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}}=T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&2&0\\1&-1&1\\3&-1&-1\end{pmatrix},$$

por consiguiente,

$$[A]_{\mathfrak{B}}=T^{-1}_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}}\cdot[A]_{\mathfrak{B}'}\cdot T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&-3&7\\6&-4&6\\6&-5&5\end{pmatrix},\quad [A^*]_{\mathfrak{B}}=\begin{pmatrix}2&6&6\\-3&-4&-5\\7&6&5\end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos en definitiva:

$$[A^*]_{\mathfrak{B}'}=T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}\cdot[A^*]_{\mathfrak{B}}\cdot T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}-36&-37&-15\\30&30&14\\26&27&9\end{pmatrix}.\ \blacktriangleright$$

2.53. Demuéstrese que la operación* de paso del operador A al operador conjugado A^* posee las siguientes propiedades:

a) $(A^*)^*=A$.

◀ Escribamos una cadena de igualdades que son verídicas para cualesquiera vectores x e y:

$$(Ax,\ y)=(x,\ A^*y)=\overline{(A^*y,\ x)}=\overline{(y,\ (A^*)^*x)}=\overline{\overline{((A^*)x,\ y)}}=$$
$$=((A^*)^*x,\ y),$$

es decir,

$$(Ax,\ y)=((A^*)^*x,\ y).$$

De aquí, en virtud de que los vectores x, y son arbitrarios, obtenemos $A=(A^*)^*$ (muéstrese más detalladamente). ▶

b) $(A+B)^*=A^*+B^*$; c) $(AB)^*=B^*A^*$; d) $(\alpha A)^*=\overline{\alpha}A^*$; e) $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$, si A es regular.

El operador lineal A en la base $\mathfrak{B}'=(e'_1,\ \ldots,\ e'_n)$ cuenta con la matriz A. Hállese la matriz del operador conjugado A^* en la misma base $\mathfrak{B}'$, si los vectores $e'_1,\ \ldots,\ e'_n$ se dan por las columnas de sus coordenadas en cierta base ortonormalizada $\mathfrak{B}=(e_1,\ \ldots,\ e_n)$:

2.54. $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$, $E'_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $E'_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

2.55. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -1\\ 2 & 7 & -3\end{pmatrix}$, $E_1'=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $E_2'=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,

$$E_3'=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

2.56. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon\end{pmatrix}$, $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $E_1'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

$$E_2'=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad E_3'=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

En el espacio de polinomios $\mathcal{P}_3$ viene dado un producto escalar

$$(f,\ g)=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2, \tag{6}$$

donde $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, $g(t)=b_0+b_1t+b_2t^2$. Hállense las matrices del operador de diferenciación $D=\frac{dt}{t}$ y del operador conjugado D* en la base $\mathfrak{B}$:

2.57. $\mathfrak{B}=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t,\ t^2-1,\ \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t\right)$.

2.58. $\mathfrak{B}=\left(1,\ t,\ \frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)$.

2.59. Hállese el operador conjugado para el giro de un plano euclídeo en un ángulo α en torno al origen de coordenadas en el sentido antihorario.

2.60. Sea *Oxy* un sistema rectangular de coordenadas cartesianas en un plano y sea A el operador de proyección sobre el eje *Ox* paralelamente a la recta l: $ax+by=0$ ($a\neq 0$). Hállese la matriz del operador conjugado A^*.

2.61. Sea *Oxy* un sistema rectangular de coordenadas cartesianas en un plano y sea A el operador de reflexión de los puntos del plano respecto de la recta l: $ax+by=0$. Hállese la matriz del operador coonjugado A^*.

El concepto de operador conjugado puede emplearse al investigar la compatibilidad de un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales. Sea $AX=B$ la notación matricial de tal sistema, con la particulari-

dad de que $m = n$. En este caso X y B son columnas de las coordenadas de los correspondientes vectores aritméticos en una base canónica del espacio euclídeo $\mathbb{R}_n$, mientras a la matriz cuadrada A en esta misma base le corresponde un cierto operador lineal A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. El sistema $A^*X = 0$, donde A^* es la matriz del operador conjugado A^* en la base canónica, lleva el nombre de sistema homogéneo *conjugado*. Resulta válido el siguiente *teorema de Fredholm: para que un sistema $AX = B$ sea compatible, es necesario y suficiente que el vector columna B sea compatible, es necesario y suficiente que el vector columna B sea ortogonal a todas las soluciones del sistema homogéneo conjugado.*

2.62.** Demuéstrese el teorema de Fredholm.

Haciendo uso del teorema de Fredholm, investíguese la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

2.63. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1, \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 5, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2. \end{aligned}$ **2.64.** $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$

2.65. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$ **2.66.** $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$

2.67.* *Demuéstrese la alternativa de Fredholm*: o bien el sistema $AX = B$ es compatible, cualquiera que sea el segundo miembro de B, o bien el sistema homogéneo conjugado $A^*X = 0$ tiene soluciones no nulas.

2.68. ¿Cuáles de los sistemas de ecuaciones lineales citados en los problemas 2.63—2.66 son compatibles para cualquier segundo miembro?

El operador lineal H en un espacio provisto de producto escalar se denomina *autoconjugado*, si $H = H^*$. El operador autoconjugado en un espacio unitario (euclídeo) se llama, además, *hermitiano* (*simétrico*). Para que un operador A sea hermitiano (simétrico), es necesario y suficiente que en una base ortonormalizada cualquiera su matriz $A = (a_{ij})$ satisfaga la relación $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ($a_{ij} = a_{ji}$). Tales matrices se denominan *hermitianas* (*simétricas*).

Un operador lineal U en un espacio unitario (euclídeo) se denomina *unitario* (*ortogonal*), si

$$UU^* = U^*U = E, \quad \text{es decir,} \quad U^* = U^{-1}.$$

Para que el operador A sea unitario (ortogonal), es necesario y suficiente que en cualquier base ortonormalizada su matriz $A = (a_{ij})$ satisfaga la relación $A^{-1} = A^*$ ($A^{-1} = A^T$). Las matrices de tal índole se llaman *unitarias* (*ortogonales*).

2.69. Demuéstrense las siguientes propiedades del operador autoconjugado:

a) los números propios son reales;

b) los vectores propios, correspondientes a los distintos números propios, son ortogonales.

2.70. Demuéstrese las siguientes propiedades del espacio unitario:

a) los números propios son iguales en módulo a la unidad;

b) para que un operador lineal sea unitario, es necesario y suficiente que una base ortonormalizada sea pasada por él, de nuevo a una base ortonormalizada;

c) un operador unitario conserva el producto escalar;

d) un operador unitario conserva las longitudes de los vectores.

2.71. Muéstrese que en el espacio $\mathscr{V}_3$ los siguientes operadores son simétricos:

a) $Ax = \lambda x$, λ es un número fijo;

b) $Ax = (x, e)e$, $|e| = 1$;

c) $Ax = x - 2(x, e)e$, $|e| = 1$.

2.72. Pruébese que en el espacio de polinomios $\mathscr{P}_3$ provisto de un producto escalar (6) los operadores siguientes son simétricos:

a) $f(t) \to f(-t)$; b) $f(t) = t^n f\left(\frac{1}{t}\right)$.

2.73. Muéstrese que en el espacio $\mathscr{V}_2$ el operador $U(e, \varphi)$ de giro en un ángulo φ en torno al eje dado por el vector unidad e (véase el problema 2.6) es ortogonal.

2.74. Muéstrese que los operadores del problema 2.71 son ortogonales.

4. Reducción de la matriz de un operador lineal a la forma diagonal. Si el operador A que actúa en el espacio $\mathscr{L}_n$ tiene n vectores propios linealmente independientes $e_1, e_2, \ldots, e_n$, correspondientes a los números propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces en la base formada por dichos vectores la matriz del operador A tiene forma diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Aclárese en los problemas 2.75—2.80, cuáles de las matrices dadas de los operadores lineales pueden diagonalizarse pasando a una base nueva. Hállense esta base y la forma diagonal de la matriz que le corresponda.

2.75. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.76.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2.77. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. **2.78.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.79. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.80.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.81*. Calcúlese A^m, si:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Calcúlese:

2.82. $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$. **2.83.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$.

La matriz A de un operador autoconjugado siempre se reduce a una forma diagonal. Además, haciendo uso del concepto de operador unitario, se la puede representar así:

$$A = UDU^{-1},$$

donde U es la matriz del operador unitario que realiza el paso de la base de partida a una formada por los vectores propios del operador A, y D es la matriz diagonal de la forma (7).

Hállense la base ortonormalizada formada por los vectores propios y la matriz en dicha base para un operador lineal, dado en cierta base ortonormalizada por la matriz A (la base buscada está definida de modo no unívoco):

2.84. $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$. **2.85.** $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

2.86. $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Para la matriz dada A hállense la matriz diagonal D y la matriz unitaria (ortogonal) U tales que sea $A = UDU^{-1}$:

2.87. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$. **2.88.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$.

2.89. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4i & 0 \\ -4i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.90. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **2.91.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

§ 3. Formas bilineales y cuadráticas

1. **Formas lineales.** Se dice que en un espacio vectorial lineal real $\mathcal{L}$ viene dada una *forma lineal*, si a cada vector $x \in \mathcal{L}$ se le ha puesto en correspondencia un número $f(x)$, además quedan cumplidas las siguientes condiciones:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in \mathcal{L},$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \qquad x \in \mathcal{L}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.1. Demuéstreso que en el espacio $\mathcal{L}$ la función $f(x)$, $x \in \mathcal{L}$, es una forma lineal:

a) $f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$, $\mathcal{L} = C_{[a,b]}$ $x = x(t)$;

b) $f(x) = x(t_0)$, $\mathcal{L} = C_{[a,b]}$, $x = x(t)$, $t_0 \in [a, b]$:

c) $f(x) = (x, a)$, $\mathcal{L} = \mathcal{V}_3$, $a \in \mathcal{V}_3$ es un vector fijo.

3.2. Sea fijada en el espacio $\mathcal{L}$ una base $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, \ldots, e_n)$. Supongamos además que $f(e_i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, \ldots, n$, donde $f(x)$ es una forma lineal en $\mathcal{L}$.

a) Demuéstrese que $f(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, donde $x_1, \ldots, x_n$ son las coordenadas del vector x en la base $\mathfrak{B}$.

b) Denotemos mediante $\mathcal{L}^*$ un conjunto de formas lineales $f(x)$ en el cual están introducidas las operaciones de adición y multiplicación por un número de la manera siguiente:

$$g = f_1 + f_2, \quad \text{si} \quad \forall x \in \mathcal{L}\ (g(x) = f_1(x) + f_2(x));$$
$$h = \lambda f, \quad \text{si} \quad \forall x \in \mathcal{L}\ (h(x) = \lambda f(x)).$$

Demuéstrese que $\mathcal{L}^*$ es un espacio vectorial lineal.

c) Demuéstrese que dim $\mathcal{L}^* = n$ (el espacio $\mathcal{L}^*$ se llama *conjugado* del espacio $\mathcal{L}$).

3.3. Demuéstrese que:

a) *si* $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces la fórmula $f(x) = x_1$ define una forma lineal;

b) toda forma lineal $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, que no es igual idénticamente a cero, puede ser reducida, mediante la elección adecuada de la base, a la forma $f(x) = x_1$, donde x_1 es la primera coordenada del vector x en dicha base.

2. Formas bilineales. Una función numérica $A(x, y)$: $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, definida sobre el espacio vectorial lineal real $\mathcal{L}$, recibe el nombre de *forma bilineal*, si para y fijo ella es una forma lineal respecto de x, y para x fijo, una forma lineal respecto de y. Una forma bilineal se llama simétrica, si $A(x, y) = A(y, x)$, $x, y \in \mathcal{L}$. Si en el espacio $\mathcal{L}_n$ está fijada cierta base $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, la matriz $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = A(e_i, e_j)$ se denomina *matriz de la forma bilineal* $A(x, y)$ en la base $\mathfrak{B}$.

3.4. Demuéstrese que en el espacio $\mathcal{L}$ la función $A(x, y)$ es una forma bilineal:

a) $A(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, donde f_1, f_2 son las formas lineales en $\mathcal{L}$;

b) $A(x, y) = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt$, donde $\mathcal{L} = C_{[a, b]}$, $x = x(t) \in C_{[a, b]}$, $y = y(t) \in C_{[a, b]}$, $K(s, t)$ es una función continua de dos variables;

b) $A(x, y) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, donde $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})$ es cierta matriz.

3.5. Sea fijada en el espacio $\mathcal{L}_n$ una base $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $A(x, y)$ es una forma bilineal en $\mathcal{L}_n$ y $A(e_i, e_j) = a_{ij}$. Demuéstrese que:

a) $A(x, y) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, donde x_i, y_j, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, son las coordenadas de los vectores x e y en la base $\mathfrak{B}$;

b) si $A' = (a'_{ij})$ es una matriz de la forma bilineal $A(x, y)$ en la base $\mathfrak{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, entonces $A' = T^{\mathrm{T}} A T$, donde $T = T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$ es la matriz del cambio de la base $\mathfrak{B}$ a la $\mathfrak{B}'$.

3.6. Sea dada en el espacio $\mathbb{R}^3$ la forma bilineal $A(x, y)$. Hállese su matriz en la base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$, si:

a) $A(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$, $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, -1)$, $e_3 = (1, -1, -1)$;

b) $A(x, y) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$.

3.7. En el espacio $\mathbb{R}^n$ viene dada una forma bilineal $A(x, y)$ en la base $\mathfrak{B}$. Hállese su matriz en la base $\mathfrak{B}'$, si:

a) $n = 4$, $A(x, y) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4$,

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

b) $n = 2$, $A(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$,

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.8. Demuéstrese que el producto escalar (x, y) en un espacio euclídeo $\mathcal{E}$ es una forma bilineal.

3. Formas cuadráticas. Sea $A(x, y)$ una forma bilineal simétrica. La forma $A(x, x)$ que se obtiene de $A(x, y)$ al poner en ésta $y = x$, se denomina *cuadrática*. En este caso $A(x, y)$ lleva el nombre de forma bilineal *polar* con relación a la forma cuadrática $A(x, x)$.

Si en el espacio lineal real $\mathcal{L}_n$ está fijada cierta base $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, \ldots, e_n)$, la forma cuadrática $A(x, x)$ en dicha base tiene por expresión

$$A(x, x) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{1}$$

donde $A(a_{ij})$ es la matriz de la forma cuadrática y $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.

Supongamos que en cierta base la expresión (1) de la forma cuadrática no contiene productos x_ix_j $(i \neq j)$, es decir,

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2. \tag{2}$$

Entonces, la expresión (2) se denomina *forma canónica* de la forma cuadrática. En particular, si $\lambda_i = \pm 1, 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos la forma normal de la *forma cuadrática* $A(x, x)$.

Para toda forma cuadrática existe tal base $\mathfrak{B}'$, en la que ella tiene forma canónica (e incluso normal).

Métodos de reducción de la forma cuadrática a una forma canónica.

MÉTODO DE LAGRANGE DE FORMACIÓN DE CUADRADOS PERFECTOS. Supongamos que la forma cuadrática $A(x, y)$ en la base $\mathfrak{B}$ se expre-

sa como en (1). Si todos los coeficientes de a_{ii} (de los cuadrados x_i^2), $i = 1, 2, \ldots, n$, son nulos y al mismo tiempo la forma no es igual idénticamente a cero, entonces será distinto de cero por lo menos un producto, por ejemplo, $2a_{12}x_1x_2$. Realicemos una transformación de la base durante la cual las coordenadas de los vectores en las bases antigua y nueva están ligadas mediante las fórmulas

$$x_1 = x_1' + x_2',$$
$$x_2 = x_1' - x_2',$$
$$x_i = x_i', \quad i = 3, \ldots, n.$$

En este caso $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(x_1'^2 - x_2'^2) = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$, y, como, por hipótesis, $a_{11} = a_{22} = 0$, entonces el coeficiente de x_{12}' es diferente de cero.

De este modo, siempre existe una base $\mathcal{Y}$ en la cual en la notación (1) por lo menos un coeficiente del cuadrado será distinto de cero.

Ulteriormete consideramos que $a_{11} \neq 0$. (Si $a_{11} = 0$, será distinto de cero el coeficiente del cuadrado de alguna otra coordenada y podemos llegar al caso en consideración enumerando de otra manera los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$, lo que representa también cierta transformación de la base).

Examinemos una parte de la forma cuadrática que contiene x_1, es decir,

$$\sigma_1 = a_{11}x_1^2 + 2x_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_n.$$

Completemos esta suma hasta que se forme un cuadrado pertecto:

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \gamma,$$

donde γ es la suma algebraica de los términos que no dependen de x_1. Si, ahora, efectuamos una sustitución

$$x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$x_i' = x_i, \quad i = 2, \ldots, n,$$

la forma cuadrática en la base nueva toma la expresión

$$A(x, x) = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + \sum_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}'x_i'x_j' = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + A_1.$$

En la parte obtenida se ha separado el sumando $\frac{1}{a_{11}}x_1'^2$, y la parte restante A_1 es una forma cuadrática en $\mathcal{L}_{n-1}$. A continuación se repiten los razonamientos para la forma cuadrática $A_1(x, x)$, etc.[6]

EJEMPLO 1. Mediante el método de Lagrange redúzcase a la forma canónica la siguiente forma cuadrática

$$A(x, x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2.$$

◀ 1ra transformación: $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1'$, $x_3 = x_3'$. Obtendremos

$$A = -x_1'^2 + 2x_1'x_2' + 4x_2'x_3' - 8x_3'^2.$$

2da transformación: $x_1'' = -x_1' + x_2'$, $x_2'' = x_2'$, $x_3'' = x_3'$. Obtendremos una nueva expresión para la forma cuadrática:

$$A = -x_1''^2 + x_2''^2 + 4x_2''x_3'' - 8x_3''^2.$$

3ra transformación: $x_1''' = x_1''$, $x_2''' = x_2'' + 2x_3''$, $x_3''' = x_3''$ y se obtiene la expresión canónica para la forma:

$$A(x, x) = -x_1'''^2 + x_2'''^2 - 12x_3'''^2.$$

En este caso

$$x_1''' = x_1 - x_2,$$
$$x_2''' = x_1 + 2x_3,$$
$$x_3''' = x_3. \blacktriangleright$$

Método de los vectores propios. Consideraremos la forma cuadrática (1) en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Puesto que la matriz de dicha forma $A = (a_{ij})$ es simétrica, puede representarse en la forma $A = U^T D U$, donde D es la matriz diagonal, en cuya diagonal se disponen los números propios de la matriz A, y U es una matriz ortogonal (véanse los pp. 3 y 4, § 2). Las columnas de la matriz U constituyen las coordenadas de cierta base ortonormalizada $\mathfrak{B}' = (e_1, \ldots, e_n)$, en la cual la matriz A tiene la forma diagonal D, y, por consiguiente, la forma cuadrática representa la forma canónica buscada. La transformación correspondiente de las coordenadas se determina por la correlación

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2. Hállese la transformación ortogonal que reduce la forma cuadrática $A(x, x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$, dada en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, a la expresión canónica. Escríbase esta expresión canónica.

◀ La matriz de la forma cuadrática tiene por expresión

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(¡Fíjese la atención en cómo se obtienen los elementos a_{ij} $(i \neq j)$ a partir de la expresión explícita para la forma cuadrática!). Los números propios de esta matriz son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Los correspondientes vectores propios ortonormalizados son:

$$e_1' = (2/3,\ 2/3,\ -1/3),$$
$$e_2' = (-1/3,\ 2/3,\ 2/3),$$
$$e_3' = (2/3,\ -1/3,\ 2/3),$$

y, por consiguiente,

$$U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix},\quad U^{\top}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&2&2\\2&-1&2\end{pmatrix}.$$

En la base $\mathfrak{B}'=(e_1', e_2', e_3')$ la forma cuadrática dada tiene por expresión $A(x, x)=3x_1'^2+6x_2'^2+9x_3'^2$, y la transformación correspondiente de coordenadas:

$$x_1=\frac{1}{3}(2x_1'-x_2'+2x_3'),$$

$$x_2=\frac{1}{3}(2x_1'+2x_2'-x_3'),$$

$$x_3=\frac{1}{3}(-x_1'+2x_2'+2x_3'). \blacktriangleright$$

3.9. Demuéstrese que toda forma cuadrática $A(x, x)$ en un espacio euclídeo $\mathcal{E}_n$ puede ser notada como $A(x, x)=(Ax, x)$, donde (x, y) es un producto escalar en $\mathcal{E}_n$ y A, cierto operador lineal.

3.18. Demuéstrese que la forma bilineal polar $A(x, y)$ se define unívocamente por su forma cuadrática $A(x, x)$.

Utilizando el método de Lagrange, hállense la forma normal y la transformación lineal regular, que lleva a dicha forma, para las siguientes formas cuadráticas:

3.11. $x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

3.12. $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

3.31. $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.

Hállese la transformación ortogonal que reduce a la expresión canónica las siguientes formas y escríbase dicha expresión canónica:

3.14. $11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$.

3.15. $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$.

3.16. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

3.17. $17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

4. Curvas de segundo orden y superficies de segundo grado. Se denomina *hipersuperficie de segundo grado* en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$A(x, x)+2(b, x)+c=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{k=1}^{n}b_kx_k+c=0, \qquad (3)$$

donde en el primer miembro interviene un polinomio de segundo grado de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

El problema de clasificación de las hipersuperficies de segundo grado consiste en buscar tal base en $\mathbb{R}^n$ en la que el primer miembro de la ecuación en nuevas variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ tenga una forma más sencilla. Con este fin se busca primero tal transformación ortogonal que la forma cuadrática $A(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ tenga en las nuevas variables una expresión canónica. En la nueva base la ecuación (3) se notará de la manera siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x'^2_k + 2\sum_{k=1}^{n} b'_k x'_k + c = 0,$$

con la particularidad de que no todos los λ_k, $i = 1, 2, \ldots, n$, son nulos. Si $\lambda_k \neq 0$, podemos eliminar el término lineal trasladando el origen de coordenadas:

$$\lambda_k x'^2_k + 2b_k x'_k = \lambda_k \left(x'_k + \frac{b_k}{\lambda_k} \right)^2 - \frac{b_k^2}{\lambda_k} = \lambda_k x''_k - \frac{b_k^2}{\lambda_k}.$$

Realizadas estas transformaciones, obtenemos (cambiando la numeración de las variables, si es necesario)

$$\lambda_1 x''^2_1 + \ldots + \lambda_s x''^2_s + b''_{s+1} x''_{s+1} + c'' = 0. \qquad (4)$$

La ecuación (4) lleva el nombre de *ecuación canónica* de una hipersuperficie de segundo grado.

El conjunto de puntos del plano $\mathbb{R}_2$ que satisfacen la ecuación (3), se denomina *curva de segundo orden*. En este caso la ecuación canónica (4) puede adoptar una de las siguientes formas (en las variables x, y)

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0 \quad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;
2) $\lambda_1 x^2 + by = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0)$;
3) $\lambda_1 x^2 + c = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0)$.

EJEMPLO 3. Escríbase la ecuación canónica de una curva de segundo orden:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0,$$

determínese su tipo y hállese el sistema canónico de coordenadas.

◀ La matriz de la parte cuadrática del polinomio de segundo grado es igual a $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Sus números propios son: $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = -2$; los vectores propios: $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Realizando la transformación

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

obtenemos

$$8x'^2 - 2y'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' + \frac{12}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0.$$

Como λ_1 y λ_2 son distintos de cero, podemos formar un cuadrado perfecto respecto de cada una de las nuevas variables x' y y':

$$8x'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}\,x' = 8\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4,$$

$$-2y'^2 + \frac{12}{\sqrt{2}}\,y' = -2\left(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 9.$$

Sustituyendo las variables

$$x'' = x' - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{2}},$$

correspoondiente al desplazamiento respecto de cada uno de los ejes coordenados, obtenemos

$$8x''^2 - 2y''^2 - 8 = 0, \quad \text{o bien} \quad x''^2 - \frac{1}{4}\,y''^2 = 1.$$

La última ecuación es la ecuación canónica de la hipérbola. La transformación resultante de las coordenadas es:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') + 2,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') - 1,$$

mientras que el sistema canónico de coordenadas es (O', e_1, e_2), donde $O'(2, -1)$, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,i + \frac{1}{\sqrt{2}}\,j$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,i - \frac{1}{\sqrt{2}}\,j$. ▶

En los problemas 3.18—3.24 escríbase la ecuación canónica de la curva de segundo orden, determínese su tipo y hállese el sistema canónico de coordenadas.

3.18. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.

3.19. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

3.20. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

3.21. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

3.22. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$.

3.23. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$.

3.24. Una curva de segundo orden se define por la ecuación:

a) $x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0$; b) $x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 1 = 0$. Determínese su tipo, cuando el parámetro λ varía de $-\infty$ hasta $+\infty$.

Un conjunto de puntos del espacio euclídeo $\mathbb{E}^3$ que satisfacen la ecuación (3) se denomina *superficie de segundo grado*. La ecuación canó-

nica (4) en este caso toma una de las siguientes formas (en las variables x, y, z):

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$ $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0)$,
2) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + bz = 0$ $(\lambda_1 \lambda_2 \neq 0)$,
3) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ $(\lambda_1 \lambda_2 \neq 0)$,
4) $\lambda_1 x^2 + by = 0$ $(\lambda_1 \neq 0)$,
5) $\lambda_1 x^2 + c = 0$ $(\lambda_1 \neq 0)$.

Las superficies de los tipos 3)—5) son cilindros (elíptico, hiperbólico, etc., según sea el tipo de la curva en la sección hecha por el plano $z = 0$).

Ejemplo 4. Escríbase la ecuación canónica de la superficie de segundo grado

$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$,

determínese su tipo y hállese el sistema canónico de coordenadas.

◀ La matriz de la parte cuadrática del polinomio de segundo grado es igual $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$. Sus números propios son: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 0$, y los vectores propios:

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad e_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right),$$

$$e_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Al realizar la transformación

$$x = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3x' + y' + 2\sqrt{2}z'),$$

$$y = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x' + y' + 2\sqrt{2}z'),$$

$$z = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4y' + \sqrt{2}z'),$$

obtenemos

$$9x'^2 - 9y'^2 - 72z' + 72 = 0.$$

La transformación del desplazamiento se debe realizar sólo respecto de la variable z':

$$-72z' + 72 = -72(z' - 1) = -72z''.$$

La segunda transformación de las coordenadas tiene la forma

$$x'' = x', \quad y'' = y', \quad z'' = z' - 1,$$

de donde obtenemos en definitiva la ecuación canónica del paraboloide hiperbólico

$$\frac{x''^2}{8} - \frac{y''^2}{8} = z''.$$

La transformación resultante de las coordenadas es:

$$x=\frac{1}{3\sqrt{2}}(3x''+y''+2\sqrt{2}z'')+\frac{2}{3},$$

$$y=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x''+y''+2\sqrt{2}z'')+\frac{2}{3},$$

$$z=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-4y''+\sqrt{2}z'')+\frac{1}{3},$$

y el sistema canónico de coordenadas (O', e_1, e_2, e_3), donde

$$O'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$e_2=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right), \quad e_3=\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \blacktriangleright$$

En los problemas 3.25—3.32 escríbase la ecuación canónica de la superficie de segundo grado, determínese su tipo y hállese el sistema canónico de coordenadas.

325. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$.

3.26. $2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-16zx+60x-12y+12z-90=0$.

3.27. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$.

3.28. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+2zx-4x+6y-2z+3=0$.

3.29. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8zx-28x+2y+16z+45=0$.

3.30. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$.

3.31. $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0$.

3.32. $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10zx+2x+4y-10z-1=0$.

RESPUESTAS

1.6. Sí. **1.7.** Sí, siempre que la recta pase por el origen de coordenadas. **1.8.** No. **1.9.** Sí. **1.10.** No. **1.11.** Sí. **1.12.** No.

1.15. $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}1/2\\ -3/2\\ -2\end{pmatrix}$.

1.16. $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$.

1.17. $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

1.18. $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi\\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$,

$X'=\begin{pmatrix}1\\ -2\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\\ 2\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi\end{pmatrix}$. **1.19.** $r=2$; la base será, por ejemplo, el sistema (x_1, x_2). **1.20.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

1.21. $3x_1+2x_2-x_3=0$, $r=2$, cualquier par de vectores forma la base de este sistema. **1.22.** Las coordenadas de la matriz en esta base coinciden con sus elementos. **1.23.** a) $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -3\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

1.25. $\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$. **1.27.** $\begin{pmatrix}1 & -t_0 & t_0^2 & -t_0^3 & \dots & (-1)^{n-1}t_0^{n-1}\\ 0 & 1 & -2t_0 & 3t_0^2 & \dots & (-1)^{n-2}(n-1)t_0^{n-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

1.28. $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. **1.30.** $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$. **1.31.** $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. **1.32.** $\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$. **1.33.** $\frac{1}{2(1+i)}\times$

$\times\begin{pmatrix}1+3i\\ -1-2i\end{pmatrix}$. **1.34.** $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. **1.37.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}-42 & -71 & -41\\ 12 & 20 & 9\\ 7 & 12 & 8\end{pmatrix}$.

1.38. $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **1.39.** Sí, es un isomorfismo. **1.40.** No es un isomorfismo, puesto que está perturbada la condición de linealidad de la aplicación. **1.41.** No es un isomorfismo, puesto que está perturbada la condición de biunivocidad de la aplicación.

1.43. $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad -2+3i=-2(1+i)-5(-i)$.

1.45. a), b) Un subespacio de dimensión 2; la base la constituye cualquier par de vectores no colineales del conjunto dado; c) no es un subespacio. **1.46.** a) Un subespacio de dimensión $n-2$; b) no es un subespacio. **1.47.** Los conjuntos indicados en los pp. a), b), d) son subespacios, el conjunto de que se trata en el punto c) no es un subespacio. ● La condición que se satisface por las coordenadas en cualquiera de los problemas de esta serie puede escribirse en la forma $AX=O$, donde A es cierta matriz que tiene n columnas, y X es una columna de coordenadas en una base fija. Por eso la dimensión del subespacio correspondiente es igual a $n-\operatorname{rang} A$, y a título de base puede tomarse cualquier sistema fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones $AX=O$. **1.48.** a) Un subespacio de dimensión $n^2-C_n^2=\frac{n(n+1)}{2}$; b) no es un subespacio. **1.49.** a) Un subespacio de dimensión infinita; b) no es un subespacio; c) un subespacio de dimensión n. **1.51.** 2. **1.52.** 3; una de las bases es, por ejemplo, $\mathfrak{B}=(x_1, x_2, x_4)$. **1.53.** 3; una de las bases es, por ejemplo, $\mathfrak{B}=(x_1, x_2, x_5)$. **1.54.** ● El sistema dado de polinomios es linealmente independiente. **1.55.** $\mathscr{L}(a)$ es una recta $\frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$, $\mathscr{L}(a)+b$ es una recta $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. **1.56.** $\mathscr{L}(a_1, a_2)$ es el plano $-3x-y-2z=0$, $\mathscr{L}(a_1, a_2)+b$ es el plano $-3x-y-2z+5=0$. **1.57.** El conjunto de soluciones de un sistema no homogéneo es una variedad lineal, obtenida de un subespacio de dimensión $n-\operatorname{rang} A=3$ de soluciones del sistema homogéneo correspondiente, desplazándolo en una solución particular arbitraria del sistema no homogéneo.

1.62. c) $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$; d) $\left|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$. **1.63.** a) 0; b) -6. **1.64.** a) -1; b) 24. **1.65.** b) $\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right) \times \left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$; c) $\left|\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2}-\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\right| \leqslant$

$$\leqslant \left(\int_a^b (f(t) \mid g(t))^2\, dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\, dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(t)\, dt\right)^{1/2}. \quad 1.66.$$

$e_1 = f_1 = (1, -2, 2)$, $e_2 = (-2/3, -2/3, -1/3)$, $e_3 = (6, -3, -6)$. **1.67.** $e_1 = f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (2, 2, -2, -2)$, $e_3 = (-1, 1, -1, 1)$. **1.68.** $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $e_1 = (1, 2, 2, -1)$, $e_2 = (2, 3, -3, 2)$, $e_3 = (2, -1, -1, -2)$. **1.69.** $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $e_1 = (2, 1, 3, -1)$, $e_2 = (3, 2, -3, -1)$, $e_3 = (1, 5, 1, 10)$. **1.70.** $e_3 = (-4, 2, -1, 3)$, $e_4 = (2, 4, 3, 1)$. ● Para determinar el vector $e_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ basta hallar alguna solución del sistema respecto de las incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 de dos ecuaciones lineales $(e_3, e_1) = 0$, $(e_3, e_2) = 0$. Para la determinación de e_4 el sistema análogo consiste de tres ecuaciones. **1.71.** $e_3 = (2/3, -2/3, -1/3)$. **1.72.** $e_3 = (1, -2, 1, 0)$, $e_4 = (25, 4, -17, -6)$. **1.74.** $y = (1, -1, -1, 5)$, $z = (3, 0, -2, -1)$. **1.75.** $y = (3, 1, -1, -2)$, $z = (2, 1, -1, 4)$. **1.77.** ⊗ De la igualdad $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ se deduce que $(x, y) + (y, x) = (x, y) + \overline{(x, y)} = 0$, es decir, (x, y) es un número imaginario que no es necesariamente nulo.

2.1. Es un operador lineal; $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2.2. No es un operador lineal. **2.3.** Es un operador de proyección sobre el eje dado por el vector e. Si $e = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\beta\cos\alpha & \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\gamma\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{pmatrix}.$$

2.4. Sí, es un operador lineal; si $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.5.** No es un operador lineal. **2.6.** Es un operador lineal. ◀ Está claro que

$$y = U(e, \varphi)\, x = y_e + y_\alpha, \tag{1}$$

donde y_e es un componente del vector y a lo largo del eje e; y_α es el componente del vector y coplanar respecto del plano α. El componente y_e es igual a

$$y_e = x_e = (x, e)e. \tag{2}$$

El componente y_α se obtiene del vector x_α por giro del último en el plano α en un ángulo φ. Para hallar y_α, introduzcamos un vector auxiliar $[e, x_\alpha]$, situado en el plano α perpendicularmente al vector x_α,

con la particularidad de que la terna x_α, $[e, x_\alpha]$, e es derecha. Descompongamos el vector y_α en componentes a lo largo de x_α y $[e, x_\alpha]$:

$$y_\alpha = |x_\alpha| \cos\varphi \frac{x_\alpha}{|x_\alpha|} + |x_\alpha| \operatorname{sen}\varphi \frac{[e, x_\alpha]}{|[e, x_\alpha]|} =$$

$$= \cos\varphi \cdot x_\alpha + \operatorname{sen}\varphi \cdot [e, x_\alpha]. \quad (3)$$

Por fin,

$$x_\alpha = x - x_e = x - (x, e)\, e. \quad (4)$$

Al sustituir (2), (3) y (4) en (1) obtendremos $y = (x, e)\, e + \cos\varphi\,(x - (x, e)\, e) + \operatorname{sen}\varphi\,[e, x - (x, e)\, e] = \cos\varphi \cdot x + (1 - \cos\varphi)\,(x, e)\, e + \operatorname{sen}\varphi\,[e, x]$.

De (5) se deduce que el operador $U(e, \varphi)$ representa una suma de operadores de los problemas 2.1, 2.3 y 2.4 cuyas matrices se conocen. ▶

2.7. Es un operador lineal; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.8.** Es un operador lineal; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.9.** No es un operador lineal. **2.10.** Es un operador lineal; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.9.** No es un operador lineal. **2.10.** Es un operador lineal; $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.11.** a) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. **2.12.** $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **2.13.** $[A+B]_{\mathfrak{B}''} = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29{,}5 & -25 \end{pmatrix}$. **2.14.** $|p(A)| = 3A^2 - 2A + 5E = \begin{pmatrix} -6 & 22 \\ -22 & 49 \end{pmatrix}$. **2.15.** a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 2 & & & 0 \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & n-1 \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$. 2.16. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.17. $\begin{pmatrix} 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.19. El operador es invertible cuando, y sólo cuando, $\lambda \neq 0$; $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$. 2.20. El operador de proyección sobre un eje dado por el vector e no tiene inverso. 2.21. El operador no tiene inverso. 2.22. El operador de proyección sobre un plano perpendicular al vector e no tiene inverso. 2.23. El operador de imagen especular en un plano perpendicular al vector e. Es invertible, con la particularidad de que $A^{-1} = A$. ● Lo último proviene de la igualdad $A^2 = E$, la que es obvia desde el punto de vista geométrico, mas puede ser comprobada también de la manera siguiente: $A^2x + A(x - 2(x, e)e) = x - 2(x, e)e - 2(x, e)Ae = x - 2(x, e)e - 2(x, e)(e - 2e) = x = Ex$, $x \in \mathcal{V}_3$. 2.24. $A^{-1}x = (x + 2y - z)i + (-x - 3y - 2z)j + (2x - 3y + 2z)k$. 2.25. El operador no tiene inverso. 2.26. $U^{-1}(e, \varphi) = U(e, -\varphi) = U(-e, \varphi)$. 2.27. $A^{-1} = A$. 2.28. El operador no tiene inverso. 2.29. $A^{-1}x = \frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

2.30. a) N_A es un subespacio bidimensional de todos los vectores ortogonales al vector e, T_A es un subespacio unidimensional de todos los vectores colineales con el vector e; b) N_A es un subespacio unidimensional de todos los vectores colineales con a, T_A es un subespacio bidimensional de todos los vectores ortogonales a a. 2.31. $N_D = \mathcal{P}_0 = \mathbb{R}$, $T_D = \mathcal{P}_{n-1}$. 2.33. $r_A = 2$, la base T_A: $e_1 = (2, 1, 1)$, $e_2 = (-1, -2, 1)$; $n_A = 1$, la base N_A: $e = (1, 1, 1)$. 2.34. $r_A = 1$, la base T_A: $e = (1, 1, 1)$; $n_A = 2$, la base N_A: $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 0, -1)$. 2.36. $\lambda = a$, $x^{(\lambda)}$ es cualquier vector no nulo. 2.37. $\lambda_1 = 1$, $x^{(\lambda_1)} = xi$, $x \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $x^{(\lambda_2)} = yj + zk$, $x^{(\lambda_2)} \neq 0$. 2.38. $\lambda = 0$, $x^{(\lambda_1)} = xi$, $x \neq 0$ .2.39. Para $\varphi = 2\pi l$, $l = 0, \pm 1, \ldots$, el operador $U(e, \varphi)$ coincide con el operador unidad. Por ello, en este caso $\lambda = 1$, y $x^{(\lambda)}$ es cualquier vector no nulo. Para $\varphi = (2l + 1)\pi$, $l = 0, \pm 1, \ldots$, $\lambda_1 = 1$, $x^{(\lambda_1)} = \alpha e$, $\alpha \neq 0$, $\lambda_2 = -1$, $x^{(\lambda_2)}$ es cualquier vector no nulo perpendicuar al vector e. Para $\varphi \neq \pi l$, $l = 0, \pm 1, \ldots$, el operador tiene su único número propio $\lambda = 1$, y $x^{(\lambda)} = \alpha e$, $\alpha \neq 0$. 2.40. $\lambda_1 = 1$, $x^{(\lambda_1)}$ es cualquier vector no nulo coplanar respecto del plano de reflexión, $\lambda_2 = -1$, $x^{(\lambda_2)} = \alpha e$, $\alpha \neq 0$.

2.41. $\lambda=-1$, $X^{(\lambda)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha\neq 0$. **2.42.** $\lambda=2$, $X^{(\lambda)}=$

$=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, o α_1 y α_2 no son nulos simultáneamente.

2.43. $\lambda_1=1$, $X^{(\lambda_1)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=0$, $X^{(\lambda_2)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\alpha\neq 0$. **2.44.**

$\lambda=1$, $X^{(\lambda)}=\alpha\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha\neq 0$. **2.45.** $\lambda_1=3$, $X^{(\lambda_1)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-1$,

$X^{(\lambda_2)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\alpha\neq 0$. **2.46.** $\lambda_1=1$, $X^{(\lambda_1)}=\alpha_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, α_1,

α_2 no son nulos simultáneamente; $\lambda_2=-1$, $X^{(\lambda_2)}=\alpha\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}$, $\alpha\neq 0$.

2.48. Para cualquier $\alpha\neq 0$, π el operador A tiene dos números propios $\lambda_1(\varphi)=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi=e^{i\varphi}$, $\lambda_2(\varphi)=\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi=e^{i\varphi}$. Los vectores propios que les corresponden: $X^{(\lambda_1)}(\varphi)=\alpha\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$ y $X^{(\lambda_2)}(\varphi)=\beta\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, donde α y β son números complejos arbitrarios distintos de cero. Cuando $\varphi=0$ y $\varphi=\pi$, el operador A tiene en cada caso un número propio: $\lambda(\varphi=0)=1$, $\lambda(\varphi=\pi)=-1$. En ambos casos el vector propio lo constituyo cualquier vector no nulo perteneciente al espacio complejo $\mathscr{L}_2$. **2.49.** ● Aplíquese a la igualdad $(A-\lambda E)X^{(\lambda)}=0$ la operación de conjugación compleja. **2.50.** $\lambda_1=1$,

$X^{(\lambda_1)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=2+3i$, $X^{(\lambda_2)}=\alpha\begin{pmatrix}3-3i\\5-3i\\4\end{pmatrix}$; $\lambda_3=2-3i$, $X^{(\lambda_3)}=$

$=\alpha\begin{pmatrix}3+3i\\5+3i\\4\end{pmatrix}$; $\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq 0$. ● Hágase uso del resultado del problema 2.49. **2.52.** b) $\lambda_{A^{-1}}=1/\lambda_A$. **2.54.** $\begin{pmatrix}3&6\\-1&-3\end{pmatrix}$.

2.55. $\begin{pmatrix} -83 & -59 & -45 \\ 107 & 83 & 67 \\ 14 & 10 & 3 \end{pmatrix}$. 2.56. $\begin{pmatrix} 17 & 13 & 13 \\ -11 & \varepsilon^2-8 & \varepsilon-8 \\ -11 & \varepsilon-8 & \varepsilon^2-8 \end{pmatrix}$. 2.57. $D=$

$=\begin{pmatrix} -3/2 & -2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}$, $D^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 2.58. $D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$D^*=\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4/3 & 0 \end{pmatrix}$. 2.59. El giro en un ángulo α alrededor del origen de coordenadas en el sentido de las agujas del reloj. 2.60. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 0 \end{pmatrix}$. 2.61. $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$, si $ab \neq 0$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ para $a=0$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para $b=0$. 2.62. ◀ Supongamos que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^n$ corresponden a los vectores columna de la matriz A. De acuerdo con el teorema de Kronecker—Capelli, un sistema es compatible cuando, y sólo cuando, rang A = rang $\overline{A}$, es decir, cuando el vector b, correspondiente al vector columna B, pertenece a la cápsula lineal de los vectores $a_1, \ldots, a_n$ los cuales corresponden también a los vectores fila de la matriz conjugada A^* (se considera un caso real). El vector aritmético x será una solución del sistema conjugado por definición cuando, y sólo cuando $(a_i, x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y, por tanto, también $(b, x) = 0$. El teorema queda demostrado. En el caso complejo las filas de la matriz A^* están constituidas no por los vectores $a_1, \ldots, a_n$, sino por los complejos conjugados, pero la demostración queda la misma. ▶ 2.63. Es compatible; la solución general del sistema conjugado es ce, $e = (-1, -1, 2)$. 2.64. Es incompatible; la solución general del sistema conjugado es $c_1e_1 + c_2e_2$, $e_1 = (-1, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 0, 1)$. 2.65. Es compatible; el sistema conjugado tiene sólo solución trivial. 2.66. Es compatible; la solución general del sistema conjugado es la misma que en el problema 2.64. 2.67. ● Hágase uso del teorema de Fredholm. 2.68. Sólo el sistema del problema 2.65. 2.75. $E_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 2.76. La matriz no puede diagonalizarse. 2.77. $E_1=$

$=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2.78. $E_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.79.** $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **2.80.** $E_1 =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.81.** a) $= \begin{pmatrix} 1 & 2^m - 1 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para m par, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ para m impar. ● Hágase uso de la fórmula $A^m = T^{-1} D^m T$.

2.82. $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{pmatrix}$. **2.83.** $\begin{pmatrix} 190 & 180 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$. **2.84.** $E_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$,

$E_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$. **2.85.** $E_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$E_2 = \begin{pmatrix} 1\sqrt{18} \\ -1\sqrt{18} \\ -4\sqrt{18} \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$. **2.86.** $E_1 =$

$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **2.87.**

$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.88.** $U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}$. **2.89.** $U=\begin{bmatrix}i/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\\1/\sqrt{2}&i/\sqrt{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. **2.90.**

$U=\begin{pmatrix}2/3&-2/3&-1/3\\2/3&1/3&1/3\\1/3&2/3&-2/3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}$. **2.91.** $U=$

$=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$. **3.6.** a) $A=$

$=\begin{pmatrix}6&0&-4\\0&6&2\\-4&2&6\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$. **3.7.** a) $A'=\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\1&-3&1&1\\1&1&1&-3\\-1&-1&3&-1\end{pmatrix}$;

b) $A'=\begin{pmatrix}2&2\\2&-2\end{pmatrix}$.

3.11. $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2$,

$$\begin{cases}x_1=x_1'-\frac{1}{2}x_2'+\frac{5}{6}x_3',\\x_2=\frac{1}{2}x_2'-\frac{1}{6}x_3',\\x_3=\frac{1}{3}x_3'.\end{cases}$$

3.12. $x_2'^1-x_2'^2-x_3'^2$,

$$\begin{cases}x_1=x_1'-x_2'-x_3',\\x_2=x_1'+x_2'-x_3',\\x_3=x_3'.\end{cases}$$

3.13. $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2$,

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_1'+x_2',\\x_2=-x_2'+x_3',\\x_3=-x_2'+x_3'.\end{cases}$$

3.14. $9x_1'^2+18x_2'^2-9x_3'^2$,

$$\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}x_1'+\frac{2}{3}x_2'-\frac{1}{3}x_3',\\x_2=-\frac{1}{3}x_1'+\frac{2}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3',\\x_3=\frac{2}{3}x_1'-\frac{1}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3'.\end{cases}$$

3.15. $3x_1'^2+6x_2'^2-2x_3'^2$,

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}x_2'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_2=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\dfrac{1}{\sqrt{6}}x_2'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\dfrac{2}{\sqrt{6}}x_2'. \end{cases}$$

3.16. $5x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2$,

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}x_2'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}x_2'-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\dfrac{2}{\sqrt{6}}x_2'. \end{cases}$$

3.17. $9x_1'^2+18x_2'^2+18x_3'^2$,

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3}x_1'-\dfrac{2}{3}x_2'+\dfrac{2}{3}x_3', \\ x_2=\dfrac{2}{3}x_1'-\dfrac{1}{3}x_2'-\dfrac{2}{3}x_3', \\ x_3=\dfrac{2}{3}x_1'+\dfrac{2}{3}x_2'+\dfrac{1}{3}x_3'. \end{cases}$$

3.18. Elipse $\dfrac{x'^2}{2}+y'^2=1$, $O'(-4/5,\ 2/5)$, $e_1=(1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$, $e_2=(-2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5})$. 3.19. Parábola $y'^2=4\sqrt{2}x'$, $O'(2,\ 1)$, $e_1=(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, $e_2=(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$. 3.20. Hipérbola $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, $O'(1,\ 1)$, $e_1=(3/\sqrt{13},\ 2/\sqrt{13})$, $e_2=(-2/\sqrt{13},\ 3/\sqrt{13})$. 3.21. Rectas paralelas $x'=\pm\sqrt{5}/2$, $O'(-3/5,\ -3/10)$, $e_1=(-2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5})$, $e_2=(1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$, o bien, en las variables antiguas, $2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$. 3.22. Elipse $\dfrac{x'^2}{35/6}+\dfrac{y'^2}{35/36}=1$, $O'(7/6,\ 1/3)$, $e_1=(2/\sqrt{5},\ -1/\sqrt{5})$, $e_2=(1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$. 3.23. Parábola $y'^2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'(3,\ 2)$, $e_1=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $e_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$. 3.24. a) Hipérbola $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2=$

$=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, cuando $\lambda\in(-\infty, -1)$; dos líneas rectas que se cortan $x-y=0$, $x+y+2=0$, cuando $\lambda=-1$; hipérbola $(x-\lambda)^2+$ $+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, cuando $\lambda\in(-1, 0)$; parábola $x^2=2y$, cuando $\lambda=0$; elipse $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, cuando $\lambda\in$ $\in(0, +\infty)$; b) hipérbola $(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)y'^2=1$, $O'=(0, 0)$, $e_1=(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $e_2=(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ cuando $\lambda\in(-\infty,$ $-1)$; dos rectas paralelas $x-y\pm 1=0$, cuando $\lambda=-1$; elipse $(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)y'^2=1$, $O'(0, 0)$, $e_1=(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $e_2=$ $=(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, cuando $\lambda\in(-1, 0)$; circunferencia $x^2+y^2=$ $=1$, cuando $\lambda=0$; elipse $(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)y'^2=1$, $O'(0, 0)$, $e_1=$ $=(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $e_2=(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, cuando $\lambda\in(0, 1)$; dos rectas paralelas $x+y\pm 1=0$, cuando $\lambda=1$; hipérbola $(1-\lambda)x'^2+$ $+(1+\lambda)y'^2=1$, $O'(0, 0)$, $e_1=(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $e_2=(-1/\sqrt{2},$ $-1/\sqrt{2})$, cuando $\lambda\in(1, +\infty)$. 3.25. Elipsoide $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}+\frac{z'^2}{2/3}=$ $=1$, $O'(1, 2, -1)$, $e_1=(1/3, 2/3, 2/3)$, $e_2=(2/3, 1/3, -2/3)$, $e_3=$ $=(2/3, -2/3, 1/3)$. 3.26. Paraboloide hiperbólico $\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{1}=$ $=-2z'$, $O'(1, 2, 3)$, $e_1=(-2/3, 1/3, 2/3)$, $e_2=(1/3, -2/3, 2/3)$, $e_3=(2/3, 2/3, 1/3)$. 3.27. Hiperboloide de dos hojas $\frac{x'^2}{4/5}+\frac{y'^2}{4/15}-$ $-\frac{z'^2}{4/25}=-1$, $O'(0, 1, -2/5)$, $e_1=(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $e_2=$ $=(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $e_3=(0, 0, 1)$. 3.28. Paraboloide elíptico $\frac{x'^2}{5\sqrt{2}/4}+\frac{y'^2}{\sqrt{2}/2}=2z'$, $O'(-1/40, -19/40, 1/2)$, $e_1=(1/\sqrt{6},$ $1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$, $e_2=(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $e_3=(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. 3.29. Cilindro parabólico $y'^2=\frac{4}{3}x'$, $O'(2, 1, -1)$, $e_1=(2/3, 2/3,$ $1/3)$, $e_2=(2/3, -1/3, -2/3)$, $e_3=(1/3, -2/3, 2/3)$. 3.30. Cilindro elíptico $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$, $O'(0, 1, 0)$, $e_1=(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/3)$, $e_2=(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$, $e_3=(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. 3.31. Hiperboloide de una hoja $\frac{x'^2}{1/3}+\frac{y'^2}{1/6}-\frac{z'^2}{1/2}=1$, $O'(-1/3, -2/3, 2/3)$, $e_1=(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $e_2=(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$, $e_3=$ $=(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. 3.32. Cilindro hiperbólico $\frac{x'^2}{1/3}-\frac{y'^2}{1/3}=1$, $O'(1/6, 1/3, -5/6)$, $e_1=(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, $e_2=(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3},$ $1/\sqrt{3})$, $e_3=(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$.

CAPÍTULO 5

CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

§ 1. Derivada

1. Definición de la derivada. Derivación de las funciones definidas explícitamente. Sea $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *un incremento de la función* $y = f(x)$ en el punto x_0 correspondiente al *incremento del argumento* Δx. Se denomina *derivada* de primer orden (o *primera derivada*) de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 el límite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Los números

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

y

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

se llaman *derivadas a la izquierda* y *a la derecha*, respectivamente, de la función $y = f(x)$ en el punto x_0. Para que exista la derivada $f'(x_0)$ de la función $f(x)$ en el punto x_0, es necesario y suficiente que existan y coincidan en dicho punto sus derivadas a la izquierda y a la derecha, es decir, que sea

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

EJEMPLO 1. Hállense $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ para la función $f(x) = |x|$.
◀ Según la definición, tenemos

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

y

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Notemos que la función $f(x) = |x|$ no tiene derivada en el punto $x_0 = 0$, puesto que $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. ▶

Una derivada de la función $f(x)$, considerada sobre el conjunto de aquellos puntos en los que existe, es de por sí una función. El proceso de hallar la derivada se llama también *derivación (diferenciación)*.

TABLA DE DERIVADAS de las funciones elementales principales.

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \neq 0$.
2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$; $(e^x)' = e^x$.
3. $(\log_a x)' = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
4. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.
8. $(\operatorname{arcsen} x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

REGLAS DE DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES

I. Sea C una constante y sean $f(x)$, $g(x)$ las funciones a derivar. En este caso:

1. $(C)' = 0$.
2. $(f+g)' = f' + g'$.
3. $(Cf)' = Cf'$.
4. $(fg)' = f'g + fg'$.
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$, $g \neq 0$.

II. Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0 y la función $z = g(y)$ tiene derivada en el punto $y_0 = f(x_0)$. Entonces, la función compuesta $z = g(f(x))$ tiene en el punto x_0 una derivada igual a

$$z'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) \qquad (2)$$

(regla de derivación de una función compuesta).

EJEMPLO 2. Hállese la derivada de la función $z = \log_3 (\operatorname{arcsen} x)$.

◀ Suponiendo $z = \log_3 y$ e $y = \operatorname{arcsen} x$, tenemos

$$z'(y) = \log_3 e \cdot \frac{1}{y} \quad \text{e} \quad y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De aquí, conforme a (2) obtenemos

$$z'(x) = \frac{\log_3 e}{\operatorname{arcsen} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \blacktriangleright$$

Hállese $\Delta f(x_0, \Delta x)$, si:

1.1. $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0, 1$.

1.2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}25$.

1.3. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 100$, $\Delta x = -90$.

Hállese $\Delta f(x_0, \Delta x)$ como función de Δx, si:

1.4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

◀ Tenemos

$$\Delta f\left(\frac{\pi}{2}, \Delta x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} =$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right) = -2\operatorname{sen}^2\frac{\Delta x}{2}. \blacktriangleright$$

1.5. $f(x) = x^2$, $x_0 = -1$.

1.6. $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$.

1.7. $f(x) \log_2(x)$, $x_0 = 1$.

Haciendo uso sólo de la definición de derivada, hállese $f'(x)$:

1.8. $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

◀ Tenemos:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\operatorname{ctg}(x+\Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\operatorname{sen}(-\Delta x)}{\Delta x \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x+\Delta x)} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x+\Delta x)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \blacktriangleright$$

1.9. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **1.10.** $f(x) = \sqrt{x}$.

1.11. $f(x) = 2^x$. **1.12.** $f(x) = \log_2 x$.

1.13. Se sabe que $f(0) = 0$ y existe un límite $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x}$. Demuéstrese que este límite es igual a $f'(0)$.

1.14*. Demuéstrese que si $f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, entonces

$$\lim_{x \to x_0}\frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Hállense, para $f(x)$ dada, $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$.

1.15. $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$, $x_0 = \pm 1$.

1.16. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 1, \\ -x^2 + 2x, & x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

◀ Tenemos

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-0}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0}\frac{x-1}{x-1} = 1$$

y

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1+0}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0}\frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} =$$

$$= -\lim_{x \to 1+0}(x - 1) = 0. \blacktriangleright$$

1.17. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ x^2 \ln x, & x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

1.18. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}, \quad x_0 = 0.$

1.19. $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & x \neq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

1.20*. Muéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es continua para $x = 0$, pero no tiene en este punto ni derivada por la izquierda ni por la derecha.

Hállense las derivadas de las siguientes funciones:

1.21. $y = 3 - 2x + \dfrac{2}{3} x^4$. **1.22.** $y = -\dfrac{5x^5}{a^2}$.

1.23. $y = x^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{x^5 + a}$. **1.24.** $\dfrac{a}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{b}$.

1.25. $y = \dfrac{a + bx}{c + dx}$. **1.26.** $y = \dfrac{2}{2x - 1} - \dfrac{1}{x}$.

1.27. $y = \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$. **1.28.** $y = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}}$.

1.29. $y = 2 \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{tg} x$. **1.30.** $y = \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

1.31. $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} \dfrac{x}{2}}$.

1.32. $y = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$.

1.33. $y = \cos^2\left(\operatorname{sen} \dfrac{x}{3}\right)$. **1.34.** $y = \sqrt{\operatorname{sen} \sqrt{x}}$.

1.35. $y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$.

1.36. $y = \arccos \dfrac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$. **1.37.** $y = \sqrt{x}\, e^{\frac{x}{2}}$.

1.38. $y = \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$. **1.39.** $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

1.40. $y = 2^{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}$. **1.41.** $y = 3^{2^x}$.

1.42. $y = \ln x \cdot \lg x - \ln a \cdot \log_a x$.

1.43. $y = \log_2 \ln 2x$. **1.44.** $y = e^{\sqrt{\ln (ax^2 + bx + c)}}$.

1.45. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1 + x^2}$.

1.46. $y = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

Hállense las derivadas de las *funciones hiperbólicas*:

1.47. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (*seno hiperbólico*),

1.48. $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (*coseno hiperbólico*),

1.49. $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (*tangente hiperbólica*),

1.50. $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (*cotangente hiperbólica*).

Se denomina *derivada logarítmica* de la función $y = f(x)$ la derivada del logaritmo de esta función, es decir,

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

El cálculo de la derivada se simplifica a menudo, con la aplicación previa de los logaritmos.

EJEMPLO 3. Hállese la derivada de la función $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$.

◀ Tenemos

$$\ln y = \frac{1}{2}(\ln x + \ln (x-1) - \ln (x-2)),$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right),$$

de donde

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \frac{x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 4. Hállese la derivada de una función *exponencial compuesta* $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

◀ Calculando los logaritmos, obtendremos

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

De aquí hallamos las derivadas de los miembros primero y segundo

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}.$$

Por consiguiente,

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1-x}\right). \blacktriangleright$$

Hállense las derivadas de las siguientes funciones, aplicando previamente los logaritmos:

1.51. $y = \dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$.

1.52. $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$.

1.53. $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$.

1.54. $y = x^3 \sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$.

1.55. $y = x^x$. **1.56.** $y = x^{2^x}$.

1.57. $y = \sqrt[3]{x^{\sqrt{x}}}$. **1.58.** $y = (\ln x)^{1/x}$.

1.59. $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arcsen} x}$. **1.60.** $y = x^{x^x}$.

1.61. $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$. **1.62*.** $y = x^{x^2} + x^{2^x} + 2^{x^x}$.

Calcúlense las derivadas de las funciones dadas, introduciendo las variables intermedias:

1.63*. $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^2 x})$.

1.64. $y = (\arccos x)^2 \ln(\arccos x)$.

1.65. $y = \dfrac{e^{-x^2} \operatorname{arcsen}(e^{-x^2})}{1-e^{-2x^2}}$.

1.66. $y = \dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arctg} a^{-x}$.

1.67*. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x \leqslant 0, \\ ax+b, & x > 0. \end{cases}$$

Hállense los coeficientes a y b de modo tal que la función $f(x)$ sea continua y derivable en el punto $x_0 = 0$.

1.68. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & |x| \geqslant 1, \\ ax^2 + b, & |x| < 1. \end{cases}$$

Hállense los coeficientes a y b de modo tal que la función $f(x)$ sea continua y derivable en cualquier punto.

Hállense las derivadas de las siguientes funciones:

1.69. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$. **1.70.** $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

1.71. $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m (1+x)^n}$.

1.72. $y = \operatorname{sen}(\cos^2 x) \cos(\operatorname{sen}^2 x)$. **1.73.** $y = \dfrac{1}{\cos^n mx}$.

1.74. $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$, $a, b > 0$.

1.75. $y = \ln(\ln^n mx)$. **1.76.** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{6}} \ln \dfrac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

1.77. $y = \log_2 \operatorname{sen}\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1.78. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$. **1.79.** $y = \log_x e$.

1.80. $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$. **1.81.** $y = \sqrt{x}^{\operatorname{sen}^2 x}$.

1.82. $y = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}$.

1.83. $y = \ln(\operatorname{sh} x) + \dfrac{1}{2 \operatorname{sh} x}$. **1.84.** $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.

1.85. $y = e^{-x} \operatorname{sh} ax$. **1.86.** $y = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

1.87. $y = \ln |x|$.

◀ La función $y = \ln |x|$ está definida $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, y

$$\ln |x| = \begin{cases} \ln x & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$

De aquí

$$(\ln |x|)' = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \blacktriangleright$$

1.88. $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{|x|}$. **1.89.** $y = |\operatorname{sen} x|$.

1.90. $y = |\operatorname{arctg} x|$.

1.91. $y = [x]\, x$, donde $[x]$ es la parte entera del número x.

◀ La función $y = [x]\, x$ está definida $\forall x \in \mathbb{R}$. Si $k \in \mathbb{Z}$, entonces $y = kx$ para $x \in [k, k+1)$. Por ello

$$y' = k, \qquad x \in (k, k+1),$$

y en los puntos $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$f'_-(k) = k - 1, \qquad f'_+(k) = k. \blacktriangleright$$

1.92. $y = \begin{cases} 1 - x, & x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$

1.93. $y = \begin{cases} x & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geqslant 0. \end{cases}$

1.94. $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leqslant 1. \\ 1/e, & |x| > 1. \end{cases}$

1.95. $y = \dfrac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$.

1.96. $y = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_n)^{\alpha_n}$.

1.97. $y = a^{x^a}$. **1.98.** $y = (\log_x a)^x$.

1.99. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$. **1.100.** $y = (1/x)^{1/x}$.

1.101. $y = \dfrac{\ln 3 \cdot \operatorname{sen} x + \cos x}{3^x}$.

1.102. $y = 3^{\frac{\operatorname{sen} ax}{\cos bx}} + \dfrac{1}{3} \dfrac{\operatorname{sen}^3 ax}{\cos^3 bx}$.

1.103. Demuéstrese que la derivada de una función par es una función impar, y la derivada de la función impar, una función par.

1.104. Demuéstrese que la derivada de una función periódica es también función periodica.

1.105*. Hállese $f'(x_0)$, si $f(x) = (x - x_0)\, \varphi(x)$, donde la función $\varphi(x)$ es continua en el punto x_0.

Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ unas funciones derivables. Hállense las derivadas de las siguientes funciones compuestas:

1.106. $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$.

1.107. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

1.108. $y = \psi(x)^{\varphi(x)}$, $\psi(x) > 0$.

1.109. $y = \log_{\varphi}(x)\ \psi(x)$, $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$, $\varphi(x) \neq 1$.

◀ Pasemos a los logaritmos naturales:

$$y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)}.$$

De aquí hallamos

$$y' = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \ln \varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)} =$$

$$= \frac{1}{\ln \varphi(x)} \left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - y \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right). \blacktriangleright$$

Sea $f(x)$ una función derivable arbitraria. Hállese y':

1.110. $y = f(\ln x)$. **1.111.** $y = \ln(f(x))$.

1.112. $y = f(e^x) e^{f(x)}$.

◀ Tenemos $y' = f'(e^x)\, e^x e^{f(x)} + f(e^x)\, e^{f(x)} f'(x) = e^{f(x)}(e^x f'(e^x) + f'(x) f(e^x))$. ▶

1.113. $y = f(f(x))$.

2. Derivación de las funciones definidas en forma implícita o paramétrica. Se dice que la función $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, viene *dada implícitamente* mediante la ecuación $F(x, y) = 0$, si para todo $x \in (a, b)$ se verifica

$$F(x, f(x)) = 0. \tag{3}$$

Con el fin de calcular la derivada de la función $y = f(x)$ se debe derivar la identidad (3) respecto de x (considerando el primer miembro como una función compuesta de x) y luego resolver la ecuación obtenida respecto de $f'(x)$.

EJEMPLO 5. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define implícitamente dos funciones en el intervalo $(-1, 1)$:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{1 - x^2}, \\ y_2(x) &= -\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Hállense sus derivadas sin emplear las expresiones explícitas (4).

◀ Sea $y(x)$ cualquiera de estas funciones. Entonces, derivando respecto de x la identidad

$$x^2 + y^2(x) = 1,$$

obtendremos

$$2x + 2y(x)\, y'(x) = 0.$$

De aquí

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)},$$

es decir,

$$y_1'(x) = -\frac{x}{y_1(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$y_2'(x) = -\frac{x}{y_2(x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Dedúzcase la regla de diferenciación de una función inversa.

◀ Si $x = f^{-1}(y)$, $y \in E$, es una función inversa de $y = f(x)$, $x \in D$, entonces para todo $y \in E$ se cumple la igualdad

$$f(f^{-1}(y)) - y = 0.$$

En otras palabras, la función inversa $x = f^{-1}(y)$ es una función definida implícitamente mediante la ecuación

$$f(x) - y = 0. \tag{5}$$

Para calcular la derivada de la función $x = f^{-1}(y)$ derivemos (5) respecto de y:

$$f'(x(y))\, x'(y) - 1 = 0,$$

de donde

$$x'(y) = \frac{1}{(f'(y))}. \blacktriangleright$$

Al tratar las funciones definidas implícitamente, así como las compuestas, se usarán, además, para designar la derivada, las denotaciones del tipo y_x' allí, donde es necesario precisar respecto a qué variable se realiza la diferenciación.

1.114. Hállese el valor de y_x' en el punto $x = 1$, si

$$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, \qquad y(1) = 1.$$

1.115. Hállese y_x' en el punto $(0, 1)$, si $e^y + xy = e$.

Hállese y_x' para las siguientes funciones definidas implícitamente:

1.116. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **1.117.** $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

1.118. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a > 0$. **1.119.** $2y \ln y = x$.

1.120. $e^x \operatorname{sen} y - e^y \cos x = 0$.

1.121. $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = 0$. **1.122.** $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

1.123. $x - y = \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} y$.

1.124. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2+y^2}$.

1.125. $xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. **1.126.** $x^y = y^x$.

1.127. $a^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$.

1.128. Demuéstrese que la función y, definida mediante la ecuación $xy - \ln y = 1$, satisface también la ecuación $y^2 + (xy - 1)y' = 0$.

Hállense las derivadas de las funciones inversas a las dadas:

1.129. $y = \operatorname{sh} x$.

◀ Tenemos, por definición, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Puesto que $(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces la función $\operatorname{sh} x$ es creciente monótona sobre todo el eje real y, por tanto, tiene su inversa designada por $\operatorname{arsh} x$. De acuerdo con la regla de diferenciación de la función inversa, obtenemos

$$x'_y = (\operatorname{arsh} y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Por consiguiente, pasando a las designaciones habituales, tenemos

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \blacktriangleright$$

1.130*. $y = \operatorname{ch} x$. **1.131.** $y = \operatorname{arcsen} 2^x$.

1.132. $y = 2x^2 - x$, $x \in (1/2, +\infty)$.

Sea $y = \alpha(x)$ una función inversa a la dada $y = f(x)$. Exprésese $\alpha'(x)$ en términos de x y $\alpha(x)$, si:

1.33. $y = x^x$.

◀ Teniendo presente que

$$(x^x)' = x^x (\ln x + 1),$$

obtenemos:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{x^x (\ln x + 1)} = \frac{1}{y (\ln \alpha(y) + 1}},$$

puesto que $x = \alpha(y)$. En las designaciones corrientes

$$\alpha'(x) = \frac{1}{x (\ln \alpha(x) + 1)}. \blacktriangleright$$

1.134. $y = x + e^x$. **1.135.** $y = {}^1/_2\, x + x^3$.

1.136. $y = x + \log_2 x$. **1.137.** $y = x \ln x$.

Sean dadas las funciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{6}$$

Si en este caso $x = \varphi(t)$ tiene en el intervalo (α, β) su inversa $t = \varphi^{-1}(x)$, queda, pues, definida una nueva función

$$y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)), \tag{7}$$

llamada función *definida paramétricamente* por las correlaciones (6). Derivando (7) respecto de x y empleando la regla de derivación de la función inversa (ejemplo 6), obtenemos

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8}$$

EJEMPLO 7. Hállese y'_x, si

$$x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad t \in (0, \pi/2).$$

◀ Como $\psi'_t = \cos t$, $\varphi'_t = -2 \cos t \operatorname{sen} t$, entonces, según la fórmula (8), hallamos

$$y'_x = \frac{1}{2 \operatorname{sen} t}. \blacktriangleright$$

Hállense y'_x para las funciones dadas paramétricamente:

1.138. $x = 2t$, $y = 3t^2 - 5t$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

1.139. $x = t^3 + 2$, $y = 0{,}5t^2$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

1.140. $x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$, $t \neq -1$.

1.141. $x = 2^{-t}$, $y = 2^{2t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

1.142. $x = a \cos \varphi$, $y = b \operatorname{sen} \varphi$, $\varphi \in (0, \pi)$.

1.143. $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{sen} 2t + 2 \cos 2t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

1.144. $x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$,

$t \in (0, +\infty)$.

1.145. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$, $t \in (0, +\infty)$.

1.146. $x = 3 \log_2 \operatorname{ctg} t$, $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$, $t \in (0, \pi/2)$.

1.147. $x = \operatorname{arcsen}(t^2 - 1)$, $y = \arccos 2t$, $t \in (0, \sqrt{2})$.

1.148. $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$,

$t \in (1, +\infty)$.

1.149. $x = a \operatorname{sh} t$, $y = b \operatorname{ch} t$, $t \in (0, +\infty)$.

Hállese y'_x en los puntos indicados:

1.150. $x = t \ln t$, $y = \dfrac{\ln t}{t}$, $t = 1$.

1.151. $x = t(t \cos t - 2 \operatorname{sen} t)$, $y = t(t \operatorname{sen} t + 2 \cos t)$, $t = \pi/4$.

1.152. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $t = \pi/6$.

1.153. $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $y = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $t = 2$.

3. **Derivadas de órdenes superiores.** Se denomina *derivada de segundo orden* de la función $y = f(x)$ la derivada de su primera derivada, es decir,

$$y''(x) = (y'(x))'.$$

En general, se llama *derivada de n-ésimo orden* (o *n-ésima derivada*) la derivada de la derivada de orden $(n-1)$, es decir,

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))', \quad n = 2, 3, \ldots$$

Para la derivada de n-ésimo orden se usa también la designación $\frac{d^n y}{dx^n}$.

EJEMPLO 8. Hállese y'', si $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

◀ Tenemos $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Por consiguiente,

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}. \blacktriangleright$$

Hállense las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:

1.154. $y = \cos^2 x$. **1.155.** $y = \operatorname{arctg} x^2$.

1.156. $y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}$. **1.157.** $y = e^{-x^2}$.

1.158. $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1.159*.** $y = x^{\sqrt{x}}$.

1.160. Hállense $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ si $y(x) = e^{2x} \operatorname{sen} 3x$.

1.161. Hállese $y'''(2)$, si $y = \ln(x-1)$.

1.162. Hállese $y^{IV}(1)$, si $y = x^3 \ln x$.

1.163. Hállense $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, si $y = 2^{\operatorname{sen} x} \cos(\operatorname{sen} x)$.

Sea $f(u)$ una función derivable dos veces. Hállense y' e y'', si:

1.164. $y = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$. **1.165.** $y = \ln f(e^x)$.

Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones derivables dos veces. Hállense y', y'', si:

1.166. $y = u^v$ $(u > 0)$.

◀ Tenemos $\ln y = v \ln u$. De aquí encontramos

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{v}{u} u',$$

es decir,

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right) = u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right),$$

$$y'' = y'\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right) + y\left(v'' \ln u +\right.$$

$$+\frac{v'}{u}u'+\frac{v'u'u+vu''u-vu'^2}{u^2}\Big)=u^v\left(\left(v\frac{u'}{u}+v'\ln u\right)^2+\right.$$

$$\left.+v\frac{uu''-u'^2}{u^2}+\frac{2u'v'}{u}+v''\ln u\right).\ \blacktriangleright$$

1.167. $y=\sqrt{u^2+v^2}$. **1.168.** $y=\ln\frac{u}{v}$.

Hállese la fórmula para la n-ésima derivada de las funciones dadas:

1.169. $y=x^m$, $m\in\mathbb{N}$. **1.170.** $y=a^{kx}$, $k\in\mathbb{R}$

1.171*. $y=\operatorname{sen}x$. **1.172.** $y=\ln x$.

1.173*. $y=\cos^2 x$. **1.174.** $y=\frac{1+x}{1-x}$.

Hállense las derivadas indicadas de las funciones dadas, empleando la descomposición en una combinación lineal de las funciones más sencillas:

1.175. $y=\frac{2x}{x^2-1}$, hállese $y^{(n)}$.

◀ Transformemos la expresión a la forma

$$y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

Puesto que

$$\left(\frac{1}{x\pm1}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\frac{1}{(x\pm1)^{n+1}},$$

se tiene

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right).\ \blacktriangleright$$

1.176. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$, hállese $y^{(50)}$.

1.177*. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, hállese $y^{(20)}$.

Supongamos que $u(x)$ y $v(x)$ tienen derivadas de hasta n-ésimo orden inclusive. Entonces, para la derivada de n-ésimo orden de su producto $u(x)\,v(x)$ queda válida la *fórmula de Leibniz*

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}u^{(n-2)}v''+\ldots$$

$$\ldots+uv^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

donde $u^{(0)} \equiv u$; $v^{(0)} \equiv v$ y $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

son unos coeficientes binomiales.

Hállense las derivadas de órdenes indicados de las funciones dadas, aplicando la fórmula de Leibniz:

1.178. $y = (x^2 + x + 1)\operatorname{sen} x$, hállese $y^{(15)}$.

1.179. $y = (x^2 - x)e^x$, hállese $y^{(20)}$.

1.180. $y = \operatorname{sen} x \cdot e^{-x}$, hállese $y^{(5)}$.

1.181. $y = x \log_2 x$, hállese $y^{(10)}$.

1.182. $y = x \operatorname{sh} x$, hállese $y^{(100)}$.

1.183*. Muéstrese que

$$(e^{ax}\cos bx)^{(n)} = r^n e^{ax}\cos(bx + n\varphi),$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$.

1.184. Demuéstrese que $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)} = (-1)^n \dfrac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

1.185. Calcúlese el valor de la n-ésima derivada de la función $y = \dfrac{3x+2}{x^2-2x+5}$ en el punto $x = 0$.

◀ Tenemos, según la condición, que

$$y(x)(x^2 - 2x + 5) = 3x + 2.$$

Derivemos esta identidad n veces aplicando la fórmula de Leibniz. En este caso (para $n \geqslant 2$) obtendremos

$$y^{(n)}(x)(x^2 - 2x + 5) + ny^{(n-1)}(2x - 2) + \frac{n(n-1)}{2} y^{(n-2)}(x)\cdot 2 = 0,$$

de donde para $x = 0$

$$5y^{(n)}(0) - 2ny^{(n-1)}(0) + n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0,$$

o bien

$$y^{(n)}(0) = \frac{2}{5} ny^{(n-1)}(0) - \frac{n(n-1)}{5} y^{(n-2)}(0).$$

Se ha obtenido una fórmula recurrente para determinar la n-ésima derivada en el punto $x = 0$ ($n \geqslant 2$). Los valores de $y(0)$ e $y'(0)$ los hallamos directamente:

$$y(0) = \frac{2}{5}, \quad y'(0) = \frac{-3x^2 - 4x + 19}{(x^2 - 2x + 5)^2}\bigg|_{x=0} = \frac{19}{25}.$$

A continuación, suponiendo sucesivamente $n = 2, 3, 4, \ldots$, obtendremos, con ayuda de la fórmula recurrente, los valores de las derivadas de órdenes superiores.

Por ejemplo,

$$y''(0)=\frac{2}{5}\cdot 2\cdot\frac{19}{25}-\frac{2\cdot 1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{56}{125},$$

$$y'''(0)=\frac{2}{5}\cdot 3\cdot\frac{56}{125}-\frac{3\cdot 2}{5}\cdot\frac{19}{25}=-\frac{234}{625}. \blacktriangleright$$

Aplicando el método descrito en el problema 1.185, hállese la derivada de cuarto orden en el punto $x = 0$ de la función dada:

1.186. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$. **1.187.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

1.188. Muéstrese que la función $y = \arcsen x$ satisface la ecuación diferencial $(1 - x^2)\, y'' = xy'$.

1.189. Muéstrese que la función $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + e^x$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

1.190. Muéstrese que la función $y = e^{-x} \cos x$ satisface la ecuación diferencial $y^{(IV)} + 4y = 0$.

1.191. Muéstrese que la función $y = x^n (\cos (\ln x) + \operatorname{sen} (\ln x))$ satisface la ecuación diferencial $x^2y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$.

En los problemas 1.192—1.196 hállense las derivadas de segundo orden de las funciones dadas implícitamente:

1.192. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, $a>0$.

◀ Diferenciando la ecuación que define la función $y(x)$, obtenemos:

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{y'x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

De aquí

$$x + yy' = xy' - y \tag{9}$$

y, por consiguiente,

$$y'=\frac{x+y}{x-y}. \tag{10}$$

Al diferenciar (9) y usar la expresión (10), hallada para y', obtenemos

$$y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \blacktriangleright$$

1.193. $y^2 = 2px$. **1.194.** $y = 1 + xe^y$.

1.195. $y = \operatorname{tg}(x + y)$. **1.196.** $e^{x-y} = xy$.

1.197. Dedúzcase la fórmula para la segunda derivada de la función inversa respecto a la función dada $y = f(x)$.

1.198. Demuéstrese que si $(a + bx)e^{y/x} = x$, entonces $x^3y'' = (xy' - y)^2$.

Hállense las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones dadas paramétricamente:

1.199. $x = \ln t$, $y = t^3$, $t \in (0, +\infty)$.

◀ Tenemos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = 3t^3$$

y

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{9t^2}{1/t} = 9t^3.$$

Observemos que en el caso dado el parámetro t es fácil eliminarlo de las ecuaciones dadas, suponiendo $t = e^x$. Por consiguiente, la expresión para y''_{xx} como función de x tiene la forma $y''_{xx} = 9e^{3x}$. ▶

En el caso general, si $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, se calcula y''_{xx} según la fórmula

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(s) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) \\ \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix}}{(\varphi'(t))^3}.$$

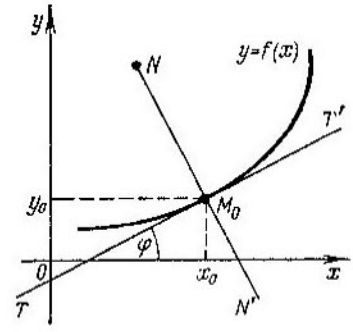


Fig. 46

1.200. $x = \sec t$, $y = \operatorname{tg} t$, $t \in (0, \pi/2)$.

1.201. $x = \operatorname{arcsen} t$, $y = \ln(1 - t^2)$, $t \in (-1, 1)$.

1.202. $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \ln(1 + t^2)$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

1.203. $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, $t \in (0, \pi/2)$.

1.204. Muéstrese que la función $y(x)$, dada paramétricamente mediante las ecuaciones $x = \operatorname{sen} t$, $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, satisface la ecuación diferencial $(1 - x^2)y''_{xx} - xy'_x = 2y$, cualesquiera que sean las constantes a y b.

4. Aplicaciones geométricas y mecánicas de la derivada. El valor de la derivada $f'(x_0)$ de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 es igual al coeficiente angular (la pendiente) $k = \operatorname{tg}\varphi$ de la tangente TT' a la gráfica de esta función trazada por el punto $M_0(x_0, y_0)$, donde $y_0 = f(x_0)$ (fig. 46) (*significado geométrico de la derivada*).

La ecuación *de la tangente* TT' a la gráfica de la función $y = f(x)$ en su punto $M_0(x_0, y_0)$ tiene la forma

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

La recta NN' que pasa por el punto de tangencia M_0 perpendicularmente a la tangente se denomina *normal* a la gráfica de la función $y = f(x)$ en este punto. La ecuación de la normal es

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

Escríbanse las ecuaciones de la tangente y de la normal a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto dado, si:

1.205. $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$.

1.206. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $x_0 = -2$.

1.207. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

1.208. $y = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = 0$.

1.209. $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

1.210. $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$.

1.211. Escríbanse las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto $M_0(2, 2)$ a la curva $x = \frac{1+t}{t^3}$, $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$, $t \neq 0$.

1.212. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la curva

$$x = t \cos t, \qquad y = t \operatorname{sen} t, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

en el origen de coordenadas y en el punto $t = \pi/4$.

1.213. Escríbanse las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ en el punto de ordenada $y_0 = 3$.

1.214. Escríbanse la ecuación de la tangente a la curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ en el punto $M_0(1, 1)$.

1.215. ¿Bajo qué ángulo la gráfica de la función $y = e^{x/2}$ corta la recta $x = 2$?

1.216. ¿En qué punto M_0 de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

1.217. Hállense los coeficientes b y c en la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que toca la recta $y = x$ en el punto $M_0(1, 1)$.

1.218. Muéstrese que las tangentes a la hipérbola $y = \frac{x-4}{x-2}$ en los puntos de su intersección con los ejes coordenados son paralelas entre sí.

1.219. Fórmese la ecuación de la normal a la gráfica de la función $y = -\sqrt{x} + 2$ en el punto de intersección con la bisectriz del primer ángulo coordenado.

1.220. Fórmese la ecuación de tal normal a la parábola $y = x^2 - 6x + 6$ que sea perpendicular a una recta que une el origen de coordenadas con el vértice de la parábola.

1.221. En los puntos de intersección de la recta $x - y + 1 = 0$ con la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ están trazadas las normales a la parábola citada. Hállese el área del triángulo formado por las normales y una cuerda que une los puntos de intersección mencionados.

1.222. Muéstrese que las normales a la desarrollante de la circunferencia $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Se llama ángulo ω *entre las curvas* $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ en su punto común $M_0(x_0, y_0)$ un ángulo formado por las tangentes a dichas curvas en el punto M_0.

1.223. Demuéstrese que

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}.$$

Hállense los ángulos bajo los cuales se cortan las curvas dadas:

1.224. $y = x^2$ e $y = x^3$.

1.225. $y = (x - 2)^2$ e $y = 4x - x^2 + 4$.

1.226. $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

1.227. $x^2 + y^2 = 8ax$ e $y^2 = \dfrac{x}{2a - x}$.

1.228. Demuéstrese que la suma de los segmentos que se obtienen al cortar la tangente a la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ en los ejes de coordenadas es igual a a para todos los puntos de la curva.

1.229. Muéstrese que un segmento de la tangente a la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, comprendido entre los ejes de coordenadas, es de longitud constante igual a a.

1.230. Hállese la distancia entre el origen de coordenadas y la normal a la línea $y = e^{2x} - x^2$, trazada en el punto de abscisa $x = 0$.

1.231. Demuéstrese que el segmento de una tangente a la tractriz

$$y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2},$$

comprendido entre el eje de coordenadas y el punto de tangencia, es de longitud constante.

Si una curva viene dada en las coordenadas polares por la ecuación $r = r(\varphi)$, el ángulo θ, formado por la tangente TT' y el radio vector $\overline{OM}$ del punto de tangencia M (fig. 47), se determina por la relación

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r(\varphi)}{r'_\varphi}. \qquad (12)$$

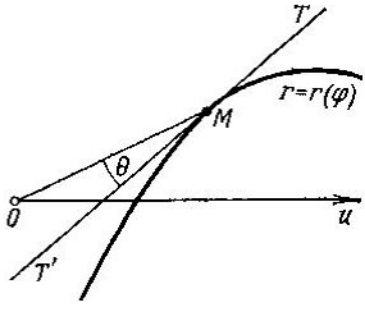


Fig. 47

1.232.** Dedúzcase la fórmula (12).

1.233. Hállese el ángulo θ entre la tangente y el radio vector del punto de tangencia para la espiral logarítmica $r = ae^{k\varphi}$.

1.234. Hállese el ángulo θ formado por la tangente y el radio vector del punto de tangencia para la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Si $x = x(t)$ es una función que describe la ley del movimiento de un punto material, entonces la primera derivada $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ representa la velocidad y la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2} = \ddot{x}$ es la aceleración de este punto en un instante de tiempo t (*sentido mecánico de las derivadas primera y segunda*).

1.235. La ley del movimiento de un punto material por una recta tiene la forma $x = 1/4t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

a) ¿En qué instantes de tiempo el punto se encuentra en el origen de coordenadas?

b) ¿En qué instantes de tiempo la dirección de su movimiento coincide con la orientación positiva del eje Ox?

c) ¿En qué instantes de tiempo su aceleración es nula?

1.236. Hállese la velocidad de una oscilación armónica de amplitud a, frecuencia ω y fase inicial $\varphi = 0$.

1.237. Un cuerpo de masa 4 se desplaza rectilíneamente según la ley $x = t^2 + |t| + 1$. Hállese la energía cinética del cuerpo en el instante $t = 5$.

1.238. ¿En qué instante de tiempo $t \in [0, 2\pi]$ se debe parar el efecto de las fuerzas para que un punto que parti-

cipa en la oscilación armónica $x = \cos 3t$ siga moviéndose uniformemente a la velocidad $v = {}^3/_2$.

1.239. Un punto se desplaza por una espiral logarítmica $r = e^{a\varphi}$. Hállese la velocidad de variación del radio polar, si se sabe que éste gira a la velocidad constante ω.

1.240. Un punto se mueve por una circunferencia $r = 2a \cos \varphi$. Hállese la velocidad de variación de la abscisa y ordenada del punto, si el radio polar gira a la velocidad angular ω.

1.241. ¿En qué punto de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 400$ la ordenada va decreciendo a la misma velocidad a la que crece la abscisa?

1.242. El radio de una bola varía a la velocidad v. ¿A qué velocidad varían el volumen y la superficie de la bola?

1.243. Una rueda gira de modo tal que el ángulo de rotación es proporcional al cuadrado del tiempo. La primera vuelta de la rueda se ha realizado durante un lapso de tiempo $T = 8$ segundos. Hállese la velocidad angular ω en el instante de tiempo $t = 32s$ después de comenzar el movimiento.

§ 2. Diferencial

1. Diferencial de primer orden. Una función $y = f(x)$ se llama *derivable* en el punto x_0, si su incremento $\Delta y\ (x_0, \Delta x)$ puede representarse en la forma

$$\Delta y\ (x_0, \Delta x) = A\ \Delta x + o\ (\Delta x). \qquad (1)$$

La parte lineal principal $A\ \Delta x$ del incremento Δy lleva el nombre de *diferencial* de esta función en el punto x_0, correspondiente al incremento Δx, y se designa por el símbolo $dy\ (x_0, \Delta x)$.

Para que la función $y = f(x)$ sea derivable en el punto x_0, es necesario y suficiente que exista la derivada $f'(x_0)$; en este caso se verifica la igualdad $A = f'(x_0)$.

Esta afirmación permite llamar derivable toda función que tiene derivada. Precisamente en este sentido hemos usado esta expresión en el § 1.

La expresión para una diferencial tiene la forma

$$dy\ (x_0, dx) = f'(x_0)\, dx,$$

donde se ha adoptado la designación $dx = \Delta x$. De la fórmula (1) se deduce que, si $f'(x_0) \neq 0$, entonces para $\Delta x \to 0$ el incremento de la función y su diferencial dy en un punto fijo serán unos infenitésimos equivalentes, lo que permite anotar la igualdad aproximada:

$$\Delta y \approx dy \text{ para } |\Delta x| \leqslant 1. \qquad (2)$$

EJEMPLO 1. Hállese el valor aproximado del volumen V de una bola cuyo radio es $r = 1{,}02$ m.

◀ Puesto que $V(r) = \frac{3}{4}\pi r^3$, entonces, suponiendo $r_0 = 1$, $\Delta r = 0{,}02$ y haciendo uso de la fórmula (2), obtenemos:

$$V(1{,}02) = V(1) + \Delta V(1,\ 0{,}02) \approx V(1) - V'(1)\cdot 0{,}02 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi + 4\pi\cdot 0{,}02 \approx 4{,}43\ m^3. \blacktriangleright$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA DIFERENCIAL. La diferencial dy $(x_0,\ \Delta x)$ es igual al incremento de la ordenada de la tangente TT' a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $M_0(x_0, y_0)$ correspondiente al incremento del argumento igual a Δx (fig. 48).

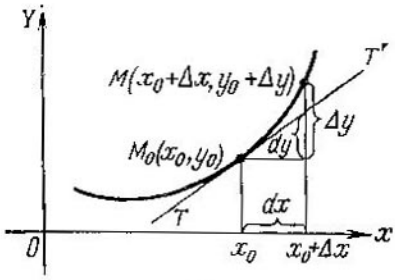


Fig. 48

2.1. Demuéstrese que para una función lineal $y = ax + b$ el incremento Δy y la diferencial dy coinciden.

2.2. Hállense el incremento Δy y la diferencial dy de la función $y = x^3$, correspondientes al valor del argumento $x_0 = 2$ y a dos incrementos distintos del argumento $(\Delta x)_1 = 0{,}1$ y $(\Delta x)_2 = 0{,}01$.

2.3. Hállense el incremento ΔS y la diferencial dS del área S de un cuadrado, correspondientes al incremento Δx del lado x. Con ayuda de la figura interprétese geométricamente ΔS, dS y la diferencia $\Delta S - dS$.

2.4. Un punto material M se mueve rectilíneamente siguiendo la ley $s = f(t)$, donde t es un momento de tiempo y s es el trayecto recorrido durante el lapso de tiempo de 0 hasta t. Dése una interpretación mecánica de la diferencial del trayecto ds, correspondiente al intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

2.5. Haciendo uso del resultado del problema anterior y de la fórmula (2), hállese aproximadamente el trayecto Δs recorrido por el punto M durante un intervalo de tiempo de $t_1 = 3$ hasta $t_2 = 4$, si la ley del movimiento del punto M está dada por la fórmula $s = 1 + \operatorname{arctg} t$. Compárese la respuesta con el valor exacto de Δs.

2.6. Para las funciones: a) $f(x) = x^n$ y b) $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ hállense los valores del argumento x, para los cuales las diferenciales de estas funciones no son equivalentes a sus incrementos cuando $\Delta x \to 0$.

2.7. Sea dado un segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ de variación del argumento x de la función $y = f(x)$; Δy y dy son el incremento y la diferencial correspondientes de la función y. ¿Serán posibles las igualdades: a) $dy = \frac{3}{2}\Delta y$, b) $dy = \Delta y$, c) $dy = \frac{1}{2}\Delta y$ sobre todo el segmento?

2.8. Las aristas de un cubo han sido aumentadas en 1 cm. La diferencial dV del volumen V del cubo resultó ser igual a 12 cm³. Hállese la longitud inicial de las aristas.

2.9. El radio de un círculo ha sido aumentado en 1 cm. La diferencial del área del círculo resultó ser igual a 6π cm². Hállese el valor original del radio.

Hállense las diferenciales de las funciones que vienen más abajo para los valores arbitrarios del argumento x y para su incremento arbitrario $\Delta x = dx$:

2.10. $x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} - 5$.

2.11. $\operatorname{sen} x - x \cos x + 4$.

2.12. $x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$. 2.13. $x \ln x - x + 1$.

2.14. $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} - 3$. 2.15. $y^5 + y - x^2 = 1$.

2.16. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. 2.17. $e^y = x + y$.

En los problemas 2.18—2.22 realícense los cálculos aproximados que se prescriben, recurriendo al cambio del incremento Δy de la función conveniente $y = f(x)$ por la diferencial dy de esta función, siendo pequeño el valor absoluto del incremento Δx del argumento x.

2.18. Calcúlonse aproximadamente: a) $\operatorname{arcsen} 0{,}05$; b) b) $\operatorname{arctg} 1{,}04$; c) $\ln 1{,}2$.

2.19. Arguméntese la fórmula aproximada

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

y calcúlese, según esta fórmula, $\sqrt[3]{25}$.

2.20. Hállese el valor aproximado de la función $f(x) = e^{x^2 - x}$ para $x = 1{,}2$.

2.21*. Hállese la expresión aproximada para el incremento ΔV del volumen V de un cilindro circular recto de altura h, cuando el radio r de la base varía en una magnitud Δr.

2.22*. Según la ley de Clapeyron, el volumen V, ocupado por un gas, la presión del gas p y la temperatura absoluta T están ligados mediante la fórmula $pV = RT$, donde R es la constante de los gases. Hállese la expresión aproximada para el incremento ΔV del volumen V, cuando la presión p varía en la magnitud Δp, considerando invariable la temperatura T.

2. Diferenciales de órdenes superiores. Examinemos la diferencial $dy\,(x,\ \Delta_1 x) = f'(x)\,\Delta_1 x$ como función de x para $\Delta x = \Delta_1 x$ fijo. Suponiendo que la función $y = f(x)$ es dos veces derivable en el punto x, hallemos la diferencial de $dy\,(x,\ \Delta_1 x)$ para $\Delta x = \Delta_2 x$:

$$d\,(dy\,(x,\ \Delta_1 x))\,|_{x,\ \Delta x = \Delta_2 x} = f''(x)\,\Delta_1 x \Delta_2 x.$$

El valor de la expresión obtenida para $\Delta_1 x = \Delta_2 x = dx$ recibe el nombre de *segunda diferencial* o diferencial de 2do orden de la función $y = f(x)$ y se denota mediante el símbolo $d^2y\,(x,\ dx)$.

De este modo,

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

Análogamente

$$d^3y = d\,(d^2y) = f'''(x)\,dx^3,$$

. . . . . .

$$d^ny = d\,(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Hállense las diferenciales de 2do orden de las funciones del argumento x que vienen más abajo:

2.23. $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$. **2.24.** $y = 3^{-x}$.

2.25. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. **2.26.** $y = ax^2 + bx + c$.

2.27. $xy + y^2 = 1$. **2.28.** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

2.29. $x^3 + y^3 = y$. **2.30.** $x = y - a \operatorname{sen} y$.

§ 3. Teoremas de las funciones derivables. Fórmula de Taylor.

1. Teoremas del valor medio.

TEOREMA DE ROLLE. *Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a,\ b]$, derivable para $x \in (a,\ b)$ y $f(a) = f(b)$, entonces existe por lo menos un punto $\zeta \in (a,\ b)$ tal que $f'(\zeta) = 0$.*

Los puntos en los que $f'(x) = 0$ se denominan *puntos estacionarios* de la función $f(x)$.

TEOREMA DE LAGRANGE. *Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a,\ b]$ y derivable para $x \in (a,\ b)$, entonces existe por lo menos un punto $\xi \in (a,\ b)$ tal que se verifica*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\cdot(b - a) \quad \textit{(fórmula de Lagrange)}.$$

TEOREMA DE CAUCHY. *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el segmento $[a, b]$, derivables cuando $x \in (a, b)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces existe por lo menos un punto $\xi \in (a, b)$ tal que se verifica*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ (fórmula de Cauchy).}$$

3.1. La función $f(x) = \frac{5-x^2}{x^4}$ tiene en los extremos del segmento $[-1, 1]$ valores iguales (¡compruébese!). Su derivada $f'(x)$ es igual a cero sólo en dos puntos $x = \pm\sqrt{10}$ (¡compruébese!), situados fuera de los límites de dicho segmento. ¿Cuál es la razón por la que se viola la conclusión del teorema de Rolle?

3.2. Muéstrese que la función $f(x) = x^2 - 1$ en el segmento $[-1, 1]$ satisface las condiciones del teorema de Rolle. Hállense todos los puntos estacionarios de esta función.

3.3. Sea $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Demuéstrese que todas las tres raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ son reales.

3.4*. Demuéstrese que la ecuación $16x^4 - 64x + 31 = 0$ no puede tener dos raíces reales distintas en el intervalo $(0, 1)$.

3.5*. Demuéstrese que la ecuación $e^{x-1} + x - 2$ que cuenta con una raíz $x = 1$ (¡compruébese!) no tiene otras raíces reales.

3.6*. Demuéstrese que si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces la función $F(x) = (f(x) - f(a))(b-a) - (f(b) - f(a)) \times (x-a)$ tiene por lo menos un punto estacionario en el intervalo (a, b).

3.7. Habiendo escrito la fórmula de Lagrange para la función $f(x) = \sqrt{3x^3} + 3x$ en el segmento $[0, 1]$, hállese en el intervalo $(0, 1)$ el valor correspondiente de ξ.

3.8. Demuéstrese que si la derivada $f'(x)$ es idénticamente igual a cero en el intervalo (a, b), la función $f(x)$ es constante en dicho intervalo.

3.9. Demuéstrese que si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) en el intervalo (a, b), la función $f(x)$ es monótona creciente (monótona decreciente) en dicho intervalo.

La función $f(x)$ satisface la *condición de Lipschitz* en el intervalo (a, b), si existe tal K que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K \cdot |x_2 - x_1|$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in (a, b)$.

3.10. Demuéstrese que si $\sup_{a<x<b} f'(x) = M$, la función $f(x)$ satisface en el intervalo (a, b) la condición de Lipschitz con una constante K igual a M.

3.11*. Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos veces derivables en el intervalo (a, b). Demuéstrese que si $f''(x) = \varphi''(x)$ en (a, b), entonces $f(x)$ y $\varphi(x)$ se diferencian en un sumando lineal.

3.12. Demuéstrese que si una función $f(x)$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange en $[a, b]$, entonces $|f(b) - f(a)| \geqslant m \cdot (b - a)$, donde $m = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f'(x)$.

3.13. Al escribir la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ y $g(x) = x^2 + 4$ en el segmento $[0, 2]$, hállense los valores de ξ.

2. Regla de L'Hospital—Bernoulli. *Cálculo del límite de indeterminaciones del tipo* $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. Supongamos que para $x \to a$ las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son ambas infinitésimos o bien infinitamente grandes. En este caso su razón no está determinada en el punto $x = a$ y se dice que representa una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, ó, correspondientemente, $\frac{\infty}{\infty}$. Sin embargo, dicha razón puede tener un límite en el punto $x = a$, finito o infinito. El proceso de búsqueda de este límite se denomina cálculo del límite de la indeterminación. La regla de L'Hospital—Bernoulli, que se basa en el teorema siguiente que lleva sus nombres, constituye uno de los métodos para calcular el límite de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

TEOREMA. *Supongamos que en cierto entorno U del punto $x = a$ las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son derivables en todo punto, a excepción, quizás, del mismo punto $x = a$, y sea $\varphi'(x) \neq 0$ en U. Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son simultáneamente bien infinitésimos o bien infinitamente grandes para $x \to a$, y existe, además, un límite de la razón $\frac{f(x)}{\varphi'(x)}$ de sus derivadas para $x \to a$, entonces existe también un límite de la razón $\frac{f'(x)}{\varphi(x)}$ entre las mismas funciones, con la particularidad de que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (1)$$

La regla puede aplicarse también en el caso cuando $a = \infty$.

EJEMPLO 1. Hállese $\lim_{x \to a} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{arctg} 5x}$ (es decir, calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$).

◀ Haciendo uso de la fórmula (1), obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\dfrac{1}{1+25x^2}}=\frac{2}{5},$$

puesto que $e^{2x}\to 1$ y $\dfrac{1}{1+25x^2}\to 1$ para $x\to 0$. ▶

En algunos casos el cálculo del límite de las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ puede exigir que se aplique reiteradamente la regla de L'Hospital—Bernoulli.

EJEMPLO 2. Hállese $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$ (es decir, calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$).

◀ Aplicando dos veces la fórmula (1), obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2\ln x}{x}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{3x^2}=0.\ \blacktriangleright$$

En cada etapa de la aplicación de la regla de L'Hospital—Bernoulli se deben emplear las transformaciones idénticas que simplifican la razón y combinar también dicha regla con otros procedimientos cualesquiera del cálculo de límites.

EJEMPLO 3. Hállese $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ (es decir, calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$).

Hagamos uso de la fórmula (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}.$$

Suprimamos en el denominador de la fracción el factor $\cos^2 x$, puesto que tiene el límite 1 cuando $x\to 0$. Desarrollemos la diferencia de los cubos en el numerador y liberemos éste del factor $(1+\cos x+\cos^2 x)$ que tiene el límite 3 cuando $x\to 0$. Realizadas dichas simplificaciones, obtendremos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Apliquemos de nuevo (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}.$$

Haciendo uso del primer límite notable, obtenemos la respuesta definitiva 1/2, sin recurrir ya otra vez a la regla de L'Hospital—Bernoulli. ▶

Calcúlense los límites de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$:

3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{arcsen} 3x}$. **3.15.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. **3.17.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$. **3.19.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{tg} x}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. **3.21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\operatorname{sen}^2 5x}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\operatorname{sen} 4x}$ **3.23.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^m}$, $m>0$. **3.25.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\operatorname{sen} x}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$. **3.27.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Cálculo de los límites de las indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$. Con el fin de calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,\varphi(x)$, donde $f(x)$ es un infinitésimo y $\varphi(x)$ es infinitamente grande para $x\to a$ (cálculo del límite de la indeterminación del tipo $0\cdot\infty$) se debe transformar el producto a la forma $\dfrac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ (una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$) o bien a la forma $\dfrac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ (una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$) y emplear a continuación la regla de L'Hospital—Bernoulli.

EJEMPLO 4. Hállese $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sen}(x-1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ (calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $0\cdot\infty$).

◀ Tenemos: $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{sen}(x-1)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi x}{2}}} = -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi}. \blacktriangleright$$

Con el fin de calcular el $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$, donde $f(x)$ y $\varphi(x)$ son infinitamente grandes cuando $x\to a$ (cálculo del límite de una indeterminación del tipo $\infty-\infty$), se debe transformar la diferencia a la forma $f(x)\left(1-\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$; calcular después el límite de la indeterminación $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)} \neq 1$, entonces $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=\infty$. Si, en cambio, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=1$, obtenemos una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$, analizada más arriba.

EJEMPLO 5. Hállese $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)$ (calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $\infty-\infty$).

◀ Tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right).$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x}}{1} = 3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x} =$$

$$= 3\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{1} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{1} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x) = +\infty. \blacktriangleright$$

Calcúlese el límite de indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$, o bien $\infty-\infty$:

3.29. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-e^{-x}-2)\operatorname{ctg} x$. **3.30.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$.

3.31. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)$. **3.32.** $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\dfrac{a}{x}$.

3.33. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$. **3.34.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

3.35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.36. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

3.37. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

3.38. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

Cálculo del límite de indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0, 1^∞. En todos los tres casos se tiene en cuenta el cálculo del límite de la expresión $(f(x))^{\varphi(x)}$, donde $f(x)$ es un infinitésimo en el primer caso, infinitamente grande en el segundo y una función que tiene un límite igual a la unidad, en el tercero. En cuanto a $\varphi(x)$, será un infinitésimo en los primeros dos casos e infinitamente grande en el tercer caso.

Procedamos del modo siguiente. Aplicando primeramente los logaritmos $y=(f(x))^{\varphi(x)}$, obtenemos la igualdad

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x) \tag{2}$$

y hallamos el límite de $\ln y$, después de lo cual se encuentra también el límite de y. En todos los tres casos $\ln y$ es, en virtud de (2), una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$ (compruébese) y el método para calcular su límite se ha expuesto más arriba.

EJEMPLO 6. Hállese el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ (calcúlese el límite de una indeterminación del tipo 1^∞).

◀ Introduzcamos la designación $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$. Entonces $\ln y=2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ será una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$. Transformando la expresión $\ln y$ a la forma $\ln y=2\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$, hallamos, rigiéndonos por la regla de L'Hospital—Bernoulli

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=2\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=2.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=e^2.\ \blacktriangleright$$

Calcúlese el límite de indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0, 1^∞:

3.39. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ **3.40.** $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{arcsen} x)^{\operatorname{tg} x}$.

3.41. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$ **3.42.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

3.43. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$. **3.44.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2^x)^{1/x}$.

3.45. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$. **3.46.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

3.47. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$. **3.48.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

3.49. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$. **3.50.** $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{1/x}$.

3. Fórmula de Taylor. Si la función $y = f(x)$ tiene derivadas hasta el orden $(n+1)$ inclusive en cierto entorno $U_\delta(a) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$ del punto a, entonces para todo $x \in U_\delta(a)$ queda válida la *fórmula de Taylor* (de orden n)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n+1} + R_{n+1}(x),$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

(término residual en la *forma de Lagrange*). De este modo, la fórmula de Taylor de orden n permite representar la función $y = f(x)$ como una suma del polinomio de n-ésimo grado y del término residual.

En particular, cuando $a = 0$, tenemos

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

(*fórmula de Maclaurin*).

3.51. Desarróllese el polinomio $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ en potencias del binomio $x + 1$.

3.52. Para el polinomio $x^4 + 4x^2 - x + 3$ escríbase la fórmula de Taylor de segundo orden en el punto $a = 1$. Escríbase el término residual en la forma de Lagrange y hállese el valor de θ correspondiente a los siguientes valores del argumento: a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 2$.

3.53. Sea $P(x)$ un polinomio de cuarto grado, $P(2) = -1$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 2$, $P'''(2) = -12$, $P^{IV}(2) = -24$. Calcúlense $P(-1)$, $P'(0)$ y $P''(1)$.

Escríbase la fórmula de Maclaurin de n-ésimo orden para las funciones dadas:

3.54. $y = e^x$. **3.55.** $y = \operatorname{sen} x$. **3.56.** $y = \cos x$.

3.57. $y = \ln(1 + x)$. **3.58*.** $y = \operatorname{arctg} x$.

3.59. $y = (1 + x)^\alpha$.

3.60. Escríbase la fórmula de Taylor de tercer orden para la función $y = \frac{x}{x-1}$ en el punto $a = 2$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

3.61. Escríbase la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $y = \operatorname{tg} x$ en el punto $a = 0$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de segundo grado.

3.62. Escríbase la fórmula de Taylor de tercer orden para la función $y = \operatorname{arcsen} x$ en el punto $a = 0$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

3.63. Escríbase la fórmula de Taylor de tercer orden para la función $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en el punto $a = 1$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

La fórmula de Taylor se usa ampliamente para calcular los valores de las funciones con un grado de precisión dado. Supongamos, por ejemplo, que se pide calcular el valor de la función $f(x)$ en el punto x_0 con un error absoluto no superior a ε, si se conocen el valor de esta función y de sus derivadas en el punto a. De la fórmula de Taylor se deduce que

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x_0 - a) + \ldots + \frac{f^{n_0}(a)}{n_0!}(x_0 - a)^{n_0},$$

donde n_0 es el mínimo de los números n, para los cuales

$$|R_{n+1}(x_0)| < \varepsilon.$$

Ejemplo 7. Calcúlese el número e con un error absoluto no superior a 0,001.

◀ Aplicando la fórmula de Maclaurin a la función $f(x) = e^x$, tenemos

$$e = f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

El valor mínimo de n que satisface la condición $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < 0{,}0001$, donde $0 < \theta < 1$, es igual a $n_0 = 6$. Por consiguiente,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} = 2{,}718. \blacktriangleright$$

3.64. Calcúlense con un error absoluto no superior a 0,001 los valores aproximados de los siguientes números:

a) sen 1; b) $\sqrt{e}$; c) ln 1,05; d) $\sqrt[5]{33}$.

3.65. Aclárese el origen de las fórmulas aproximadas:

a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2, \quad |x| < 1;$

b) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \; |x| < 1$

y evalúese su error.

El término residual en la fórmula de Taylor puede escribirse en la *forma de Peano*

$$R_{n+1}(x) = o(|x - a|^n),$$

cuyo empleo resulta útil al calcular los límites.

Ejemplo 8. Hállese $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{5x^2 + 7x^3}$.

◀ Como $1 - \cos^3 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)$, y $5x^2 + 7x^3 \sim 5x^2$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{5x^2 + 7x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{3(1 - \cos x)}{5x^2}.$$

Al sustituir $\cos x$ por su desarrollo según la fórmula de Maclaurin $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{5x^2 + 7x^3} = \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2}{x^2},$$

puesto que $\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\sim\frac{x^2}{2}$ cuando $x\to 0$. En definitiva

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\frac{3}{10}\cdot\blacktriangleright$$

EJEMPLO 9. Hállese $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\operatorname{sen}(2x-2)}{x-1+\operatorname{sen}(3x-3)}$.

◀ De acuerdo con la fórmula de Taylor tenemos

$$\operatorname{sen}(2x-2)=\operatorname{sen}2(x-1)=\frac{2(x-1)}{1!}+o(|x-1|),$$

$$\operatorname{sen}(3x-3)=\frac{3(x-1)}{1!}+o(|x-1|).$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\operatorname{sen}(2x-2)}{x-1+\operatorname{sen}(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)-o(|x-1|)}{4(x-1)+o(|x-1|)}.$$

Despreciando los infinitésimos de órdenes superiores, es decir, pasando en el numerador y el denominador a los infinitésimos equivalentes para $x\to 1$, obtenemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\operatorname{sen}(2x-2)}{x-1+\operatorname{sen}(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{4(x-1)}=-\frac{1}{4}\cdot\blacktriangleright$$

3.66. Muéstrese que el desarrollo según la fórmula de Maclaurin para las funciones sen x, tg x, arcsen x, arctg x, e^x-1 y $\ln(1+x)$ puede escribirse en la forma $x+o(|x|)$ y que para $x\to 0$ todas estas funciones son equivalentes al infinitésimo $\alpha(x)=x$ (y, por lo tanto, son equivalentes entre sí).

3.67. Haciendo uso del desarrollo según la fórmula de Maclaurin, calcúlense los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3+x^4}$.

§ 4. Investigación de las funciones y construcción de las gráficas

1. Crecimiento y decrecimiento de las funciones. Extremo. Una función $y=f(x)$ se denomina *creciente* (*decreciente*) en el intervalo (a, b), si de la desigualdad $x_1<x_2$, donde $x_1, x_2\in(a, b)$, se desprende la desigualdad $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$, respectivamente).

Si la función $f(x)$ es derivable en el intervalo (a, b) y $f'(x) > 0$ para cualquier $x \in (a, b)$, entonces la función $f(x)$ crece en (a, b); si, en cambio, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, la función $f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En los casos más sencillos el dominio de definición de la función $y = f(x)$ puede dividirse en un número finito de *intervalos de monotonía*. Cada uno de los intervalos de monotonía está acotado por los *puntos críticos* en los cuales $f'(x) = 0$ ó bien $f'(x)$ no existe.

Si existe tal entorno $U_\delta(x_0)$ del punto x_0 que para cualquier punto $x \neq x_0$ de dicho entorno se verifica la desigualdad $f(x) > f(x_0)$ (o bien $f(x) < f(x_0)$), entonces x_0 lleva el nombre de *punto de mínimo* (*máximo*) de la función $y = f(x)$, mientras que el número $f(x_0)$ se llama *mínimo* (*máximo*) de esta función. Los puntos de mínimo y de máximo de una función se denominan sus *puntos de extremo*.

Condición necesaria de extremo. Si x_0 es un punto de extremo de la función $f(x)$, entonces $f'(x_0) = 0$, o bien $f'(x_0)$ no existe, es decir, x_0 es un punto crítico de esta función.

Lo recíproco, hablando en general, no es cierto.

Condiciones suficientes de extremo de una función continua.

1) Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en cierto entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del punto crítico x_0, a excepción, quizás, de este mismo punto. Si en este caso la derivada $f'(x)$ tiene, en los intervalos $(x_0 - \delta, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta)$, signos opuestos, entonces x_0 es un punto de extremo, con la particularidad de que, si $f'(x) > 0$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) < 0$ para $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, x_0 será el punto de máximo, y si $f'(x) < 0$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) > 0$ para $x \in (x_0 + \delta, x_0)$, entonces x_0 será el punto de mínimo. Si, en cambio, $f'(x)$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, mantiene su signo, el punto x_0 no es un punto de extremo.

2) Supongamos que la función $f(x)$ es dos veces derivable en el punto crítico x_0 y en cierto entorno de éste. Si $f''(x_0) < 0$, x_0 será un punto de máximo de la función $f(x)$; si $f''(x_0) > 0$, x_0 será un punto de mínimo. En el caso de que $f''(x) = 0$, se necesitan investigaciones complementarias.

EJEMPLO 1. Hállense los intervalos de monotonía y los puntos de extremo de la función $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Encontramos la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3} & \text{para} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\ \dfrac{2-x}{x^3} & \text{para} \quad x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Igualándola a cero, obtenemos $x = 2$. De este modo, los puntos críticos son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ (tomando en consideración los puntos, donde la derivada no existe). Dichos puntos dividen el dominio de definición de $f(x)$ en cuatro intervalos de monotonía: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$. Por cuanto $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$ y $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, entonces $f(x)$ es monótona creciente para $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$, monótona decreciente para $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, en el punto $x_3 = 2$ la función alcanza su máximo ($f(2) = 1/4$), y en el punto $x_2 = 1$, su mínimo ($f(1) = 0$). Resulta cómodo reducir los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

Tabla 4.1

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$
$f'(x)$	$+$	no existe	$-$	no existe	$+$	0	$-$

Hemos de notar que en el ejemplo examinado la primera condición suficiente permite determinar el carácter de cada uno de los puntos críticos de la función dada. Al mismo tiempo la segunda condición suficiente no es aplicable en el punto x_2, puesto que en dicho punto no existe la primera derivada. ▶

4.1*. Demuéstrese la siguiente generalización de la segunda condición suficiente de extremo. Sea x_0 un punto crítico de la función $f(x)$ y supongamos que la primera de las derivadas no nulas de dicha función en el punto x_0 es de orden k. Si k es un número par, x_0 será el punto de extremo y, además, de máximo, siempre que $f^{(k)}(x_0) < 0$, y de mínimo, siempre que $f^{(k)}(x_0) > 0$. En cambio, si k es un número impar, no hay extremo en el punto x_0.

4.2. Analícese el extremo de la función $f(x) = (x - x_0)^k \varphi(x)$ en el punto x_0, donde $k \in N$ y $\varphi(x)$ es continua en el punto x_0, siendo $\varphi(x_0) \neq 0$.

4.3.* Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demuéstrese que la función $f(x)$ tiene en el punto $x_0 = 0$ un mínimo, y la función $g(x)$ no tiene extremo en el punto x_0, aunque

$$f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Hállense los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, como también los puntos de extremo, para las funciones indicadas más abajo:

4.4. $y = x\sqrt{1 - x^2}$. **4.5.** $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$.

4.6. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. **4.7.** $y = x - 2 \operatorname{sen} x$.

4.8. $y = x - 2 \ln x$.

4.9. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$. **4.10.** $y = e^x \cos x$.

4.11. $y = x^x$. **4.12.** $y = \operatorname{ch}^3 x + 1$.

El *valor máximo* (*mínimo*) de una función continua $f(x)$ en un segmento dado $[a, b]$ se alcanza bien en los puntos críticos o bien en los extremos de dicho segmento.

Hállense los valores máximo M y mínimo m de las siguientes funciones en los segmentos indicados (en todo el dominio de definición, si no se indica el segmento):

4.13. $y = -3x^4 + 6x^2$; $[-2, 2]$. **4.14.** $y = x + 2\sqrt{x}$; $[0, 4]$. **4.15.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; $[0, 4]$.

4.16. $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; $[0, 1]$.

4.17. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$; $[0, 1]$.

4.18. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x}$; $[0, 1]$.

4.19. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **4.20.** $y = xe^{-x^2/2}$.

Demuéstrense las siguientes desigualdades:

4.21*. $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$. **4.22.** $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $x \neq 0$.

4.23. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $x \neq 0$.

4.24. $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x > 2x$, $x \in (0, \pi/2)$.

4.25. Dos cuerpos se mueven a velocidades constantes de v_1 m/s y v_2 m/s. El movimiento se realiza a lo largo de dos rectas que forman el ángulo $\pi/2$, en dirección hacia el vértice de este ángulo, con la particularidad de que al principio del movimiento el primer cuerpo se encontraba a la distancia a m del vértice y el segundo cuerpo, a la distancia b m. ¿Dentro de cuántos segundos después de comenzar el movimiento la distancia entre los cuerpos será mínima?

4.26. Con el fin de transportar la producción de la fábrica N a la ciudad A (fig. 49) se construye una carretera NP que une la fábrica con el ferrocarril AB que pasa por la ciudad A. Los gastos de transporte por carretera son dos veces mayores que los gastos por ferrocarril. ¿A qué punto P se debe tender la carretera, para que los gastos generales de

transporte de la producción de la fábrica N a la ciudad A por carretera y por ferrocarril sean mínimos?

4.27. Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado con un semicírculo (fig. 50). Se conoce el perímetro P de esta figura. ¿Para qué dimensiones x e y la ventana dejará pasar la cantidad máxima de luz?

4.28. De tres tablas de igual espesor se hace un canalón para suministrar agua. ¿Con qué ángulo α de inclinación de

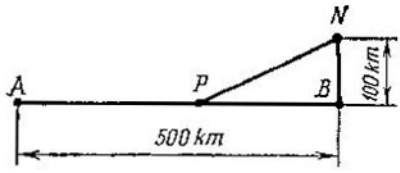


Fig. 49

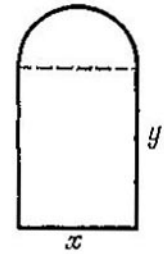


Fig. 50

las paredes laterales respecto al fondo del canalón, será máxima el área de la sección transversal de éste?

4.29. En un triángulo de base a y altura h está inscrito un rectángulo cuya base se sitúa en la del triángulo y dos vértices, en los lados laterales del mismo. Hállese el área máxima del rectángulo inscrito.

4.30. El perímetro de la sección axial de un cilindro es igual a $6a$. Hállese el volúmen máximo de tal cilindro.

4.31. Un cilindro está inscrito dentro de un cono cuya altura es h y el radio de la base r. Hállese el volumen máximo del cilindro inscrito.

4.32. Hállese el volumen mínimo de un cono circunscrito alrededor de una bola de radio r.

4.33. Hállese el volumen máximo de un cono, si se conoce la longitud dada l de su generatriz.

4.34. Determínese el área máxima de un rectángulo inscrito en un círculo de radio r.

4.35. Hállese en la parábola $y = x^2$ un punto N cuya distancia hasta la recta $y = 2x - 4$ sea mínima.

4.36. En un semicírculo de radio R está inscrito un rectángulo de área máxima. Determínense su base x y la altura y.

4.37. Divídase un segmento de longitud a en dos partes de modo tal que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre estas partes sea mínima.

4.38. Un embudo cónico, el radio de la base del cual es R y la altura H, está lleno de agua. En el embudo se sumerge una bola. ¿Cuál debe ser el radio de la bola r, para que el volumen de agua desplazado del embudo por la parte sumergida de la bola sea máximo.

4.39. Determínese la altura mínima $h = |OB|$ de la puerta de una torre vertical $ABCD$, para que pueda llevarse a la torre por esta puerta una varilla rígida MN de longitud l cuyo extremo N se desliza a lo largo de la recta horizontal AB. El ancho de la torre $|AB| = d < l$ (fig. 51).

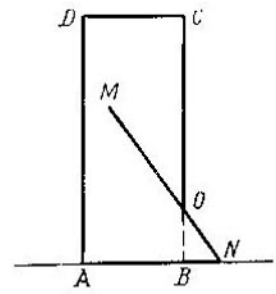


Fig. 51

2. Dirección de convexidad. Puntos de inflexión. La gráfica de una función derivable $y = f(x)$ se dice *convexa hacia las y negativas* (o *cóncava hacia las y positivas*) en el intervalo (a, b), si el arco de la curva en este intervalo se dispone por arriba de la tangente, trazada a la gráfica de la función $y = f(x)$ en cualquier punto $x \in (a, b)$.

En cambio, si en el intervalo (a, b) toda tangente se dispone por arriba del arco de la curva, entonces la gráfica de la función derivable en dicho intervalo se llama *convexa hacia las y positivas* (o bien *cóncava hacia las y negativas*) (en la fig. 52 la gráfica de la función $y = f(x)$ es convexa hacia las y negativas en el intervalo (a, x_0) y convexa hacia las y positivas, en el intervalo (x_0, b)).

Si la función es dos veces derivable en (a, b) y $f''(x) > 0$, $(f''(x) < 0)$, su gráfica es convexa hacia las y negativas (positivas) en este intervalo.

En los casos más sencillos el dominio de definición de la función $f(x)$ puede ser dividido en un número finito de intervalos en los que la dirección de convexidad se mantiene constante. Cada uno de estos intervalos está limitado por puntos en los cuales $f''(x) = 0$, o bien $f''(x)$ no existe. El punto $(x_0, f(x_0))$, en el cual la dirección de convexidad de la gráfica de la función cambia por opuesta, lleva el nombre de *punto de inflexión* (véase fig. 52).

Condición suficiente para la existencia del punto de inflexión. Supongamos que la función $f(x)$ es dos veces derivable en cierto entorno $U_\delta(x_0)$ del punto x_0, en el cual $f''(x_0) = 0$, ó $f''(x_0)$ no existe. Si en este caso la derivada $f'(x)$ tiene en los intervalos $(x_0 - \delta, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta)$ signos opuestos, el punto x_0 será punto de inflexión.

EJEMPLO 2. Hállense los intervalos de convexidad y los puntos de inflexión de la función $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Hallamos la segunda derivada:

$$f''(x)\begin{cases}\dfrac{2(3-x)}{x^4}, & x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1)\\[2ex] \dfrac{2(x-3)}{x^4}, & x\in(1,\ +\infty).\end{cases}$$

Por consiguiente, los puntos críticos de la primera derivada son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Además, en los puntos x_1 y x_2 la segunda derivada no existe (en particular, $f''_-(1) = 4$, y $f''_+(1) = -4$), mientras que en el punto x_3 ella es igual a cero.

Obtenemos, pues, cuatro intervalos de convexidad: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$. Analizando el signo de la segunda derivada

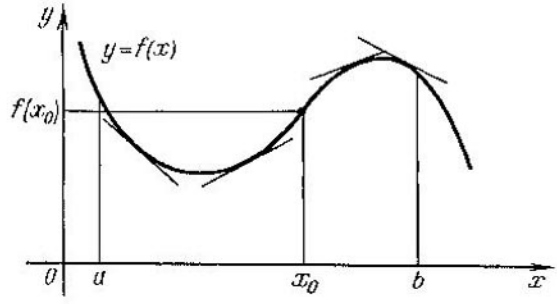


Fig. 52

en cada uno de los intervalos citados deducimos que la gráfica de la función es convexa hacia las y negativas en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(3, -\infty)$ y convexa hacia las y positivas en el intervalo $(1, 3)$. Por consiguiente, los puntos x_2 y x_3 son puntos de inflexión de la gráfica de la función y x_1 no lo es. Los resultados obtenidos pueden reducirse cómodamente en la siguiente tabla:

Tabla 4.2

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f(x)$	$\cup$	$-\infty$	$\cup$	0	$\cap$	$\frac{2}{9}$	$\cup$
$f''(x)$	$+$	no existe	$+$	no existe	$-$	0	$+$

▶

Hállense los intervalos de convexidad de la gráfica de la función $y = f(x)$, los puntos de inflexión y los coeficientes angulares k de las tangentes en los puntos de inflexión:

4.40. $y = x^7 + 7x + 1$. **4.41.** $y = x^4 + 6x^2$.

4.42. $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$. **4.43.** $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

4.44. $y = \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

4.45. $y = xe^{2x} + 1$.

4.46. $y = x \ln |x|$. **4.47.** $y = x^3 \ln x + 1$.

4.48. ¿Para qué valores a y b el punto (1, 3) es un punto de inflexión de la curva $y = ax^3 + bx^2$?

4.49. ¿Para qué parámetro h la *curva de probabilidades*

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, \quad h > 0,$$

tiene puntos de inflexión con las abscisas $x = \pm 6$?

4.50. Muéstrese que la curva $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ tiene tres puntos de inflexión que se sitúan en una recta.

4.51.* Muéstrese que los puntos de inflexión de la curva $y = x \operatorname{sen} x$ se sitúan en la curva $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

3. Asíntotas. Supongamos que para la función $y = f(x)$ existe una recta tal que la distancia entre el punto $M\ (x, f(x))$ de la gráfica de la función y la recta citada tiende a cero, cuando el punto M se aleja indefinidamente del origen de coordenadas. Entonces la recta lleva el nombre de *asíntota* de la gráfica de la función.

Si, en este caso, la coordenada x del punto M tiende hacia un número finito a, la semirecta $x = a$ ($y > 0$ o bien $y < 0$) será asíntota vertical. Para que exista la asíntota vertical en el punto $x = a$, es necesario y suficiente que por lo menos uno de los límites $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ sea igual al infinito.

Las funciones continuas no tienen asíntotas verticales.

En el caso de que la coordenada x del punto M tienda hacia $+\infty$ ó hacia $-\infty$, obtenemos una asíntota oblicua $y = kx + b$, para la existencia de la cual resulta necesaria y suficiente la existencia de dos límites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad y \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b.$$

Los límites mencionados pueden ser distintos para $x \to +\infty$ (en el caso de una asíntota oblicua derecha) y para $x \to -\infty$ (en el caso de una asíntota oblicua izquierda).

EJEMPLO 3. Hállese la asíntota de la gráfica de la función $y = \frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Por cuanto la función es continua en todo el eje, a excepción del punto $x = 0$, la asíntota vertical puede existir sólo en este mismo punto.

Tenemos:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{|x-1|}{x^2} = \lim_{x \to 0-0} \frac{|x-1|}{x^2} = +\infty,$$

y, por consiguiente, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Hallemos las asíntotas oblicuas. Por cuanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{|x-1|}{x^2}}{x} = 0 = k \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{|x-1|}{x^2} - 0 \cdot x \right) = 0 = b,$$

la recta $y = 0 \cdot x + 0 = 0$ será la asíntota oblicua derecha (horizontal, en el caso dado).

De un modo absolutamente análogo hallamos que la misma recta $y = 0$ es también la asíntota oblicua izquierda. ▶

Hállense las asíntotas de las gráficas de las funciones:

4.52. $y = \sqrt[3]{\frac{x}{x-2}}$. 4.53. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

4.54. $y = \sqrt{|x^2 - 3|}/x$. 4.55. $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$.

4.56 $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$. 4.57. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

4.58 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$. 4.59. $y = x \operatorname{arcsen} x$.

4.60. Demuéstrese que la gráfica de una función racional entera $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, $n \geqslant 2$, no tiene ninguna asíntota.

4. **Construcción de las gráficas de las funciones.** Para construir la gráfica de una función $y = f(x)$ con una segunda derivada continua (en todo punto del dominio de definición de la función, a excepción, quizás, de un número finito de puntos) realizamos, primeramente, el análisis elemental que pone de manifiesto ciertas peculiaridades de la función (si se tienen): simetría, periodicidad, constancia del signo, ceros, puntos de intersección con el eje Oy, puntos de discontinuidad, etc. Luego, utilizando las derivadas primera y segunda, hallamos los puntos de extremo y los de inflexión, los intervalos de monotonía y de convexidad, como también las asíntotas.

EJEMPLO 4. Constrúyase la gráfica de la función $y = \frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ La función está definida y es continua en todo punto, a excepción del punto $x = 0$, es siempre no negativa y se anula sólo en el

punto $x = 1$. El análisis de esta función se ha realizado en los ejemplos del 1 al 3. El resultado de este análisis se reduce cómodamente en una tabla que representa la reunión de las tablas 4.1 y 4.2. La gráfica de la función se da en la fig. 53.

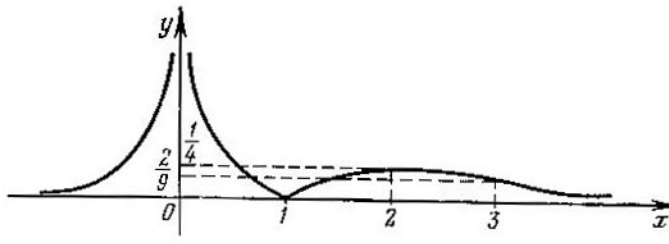


Fig. 53

Constrúyanse las gráficas de las siguientes funciones:

4.61. $y = \frac{(x^2-5)^3}{125}$. **4.62.** $y = \frac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$.

4.63. $y = \frac{1}{6}x^3(x^2-5)$. **4.64.** $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$

4.65. $y = \frac{x^4}{x^3-1}$. **4.66.** $y = \frac{x^3-3x}{x^2-1}$.

4.67. $y = \frac{x^4}{x^3+1}$. **4.68.** $y = \frac{x}{x^3+2}$.

4.69. $y = \frac{x^3}{x^4-1}$. **4.70.** $y = \frac{x^2}{x^3-1}$.

4.71. $y = \frac{x}{x^2-4}$. **4.72.** $y = \frac{x^3}{x^2-3}$.

4.73. $y = \frac{x}{2-x^3}$. **4.74.** $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. **4.75.** $y = \frac{x^3}{x^3+1}$.

4.76. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$. **4.77.** $y = \sqrt[3]{x^2-2x}$.

4.78. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

4.79. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$. **4.80.** $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

4.81. $y = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}$.

4.82. $y = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1}$.

4.83. $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$. **4.84.** $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

4.85. $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt[3]{x^3+2}}$. **4.86.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$

4.87. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}$. **4.88.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

4.89. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$. **4.90.** $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$.

4.91. $y = \dfrac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$. **4.92.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

4.93. $y = \sqrt[3]{|x^2-1|}$. **4.94.** $y = \sqrt{|x^2-2|^3}$.

4.95. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$. **4.96.** $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

4.97. $y = x \operatorname{arctg} x$. **4.98.** $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arcctg} x$.

4.99. $y = e^{2x-x^2}$. **4.100.** $y = xe^{-x^2/2}$.

4.101. $y = \dfrac{1}{x} e^{-1/x}$. **4.102.** $y = \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x^2}$.

4.103. $y = xe^{1/x}$. **4.104.** $y = \dfrac{1}{x} e^{-1/x^2}$.

4.105. $y = (x-2)e^{-1/x}$. **4.106.** $y = (2x-1)e^{2/x}$.
4.107. $y = (x^2+1)^{-x^2/2}$. **4.108.** $y = x^2 e^{2/x}$.
4.109. $y = x^3 e^{x^2-x/2}$.

4.110. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. **4.111.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

4.112. $y = \dfrac{1}{x \ln x}$. **4.113.** $y = x^2 \ln x$.

4.114. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$. **4.115.** $y = x^2 \ln^2 x$.

4.116. $y = x^2/\ln|x|$. **4.117.** $y = x \ln^2 |x|$.

4.118. $y = \ln|x^2-1|$. **4.119.** $y = \dfrac{1}{x^2} \ln^2 |x|$.

4.120. $y = x^x$, $x > 0$. **4.121*.** $y = x^{1/x}$, $x > 0$.

4.122. $y = (1+x)^{1/x}$, $x > -1$. **4.123*.** $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Constrúyanse las curvas definidas en la forma paramétrica:

4.124. $x = te^t$, $y = te^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

◀ Realicemos ciertos cálculos auxiliares:

$$x'_t = (1+t)\,e^t, \quad y'_t = (1-t)\,e^{-t}, \quad y'_x = \frac{1-t}{1+t}\,e^{-2t},$$

$$x''_{tt} = (2+t)\,e^t, \quad y''_{tt} = (t-2)\,e^{-t}, \quad y''_{xx} = 2\frac{t^2-2}{(1+t)^3}\,e^{-3t}.$$

Dado que, para $t=-1$ y $x''_{tt}(-1) = \frac{1}{e} > 0$, $x'_t = 0$, entonces $x_{\text{mín}} = -\frac{1}{e}$. Dado que, para $t=1$ e $y''_{tt}(1) = -\frac{1}{e} < 0$, $y'_t = 0$, entonces $y_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$. De aquí se deduce que la curva está dispuesta en el campo $\left\{(x, y) \mid x \in \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right), y \in \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]\right\}$. De la expresión para la derivada y'_x determinamos los puntos críticos $t_1 = 1$ ($y'_x(1) = 0$ y $t_2 = -1$ ($y'_x(-1)$ no existen). Los puntos críticos de la primera derivada los hallamos a partir de la expresión para la segunda derivada y''_{xx}: $t_3 = \sqrt{2}$ ($y''_{xx}(\sqrt{2}) = 0$), $t_4 = -\sqrt{2}$ ($y''_{xx}(-\sqrt{2}) = 0$) y $t_5 = -1$ ($y''_{xx}(-1)$ no existe). Por consiguiente, $A(-\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$ y $B(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}/e^{\sqrt{2}})$ son los puntos de inflexión.

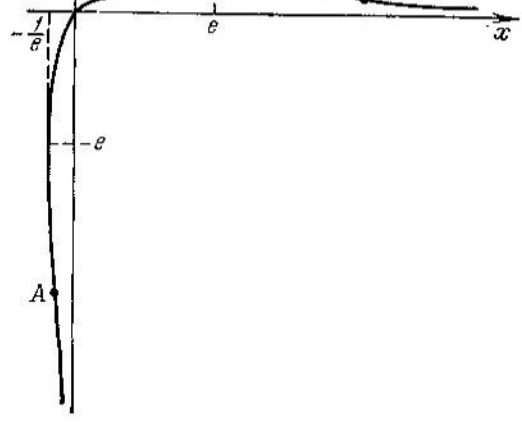


Fig. 54

Por fin, hallamos las asíntotas. Si $t \to -\infty$, entonces $x \to 0$ e $y \to -\infty$, es decir, $x = 0$ es la asíntota vertical. Indiquemos que

Tabla 4.3

t	x	y	y'_x	y''_{xx}	Comportamiento de la curva
$(-\infty, -\sqrt{2})$	<0	<0	>0	<0	Es convexa hacia las y positivas, monótona decreciente; $x=0$ es la asíntota vertical
$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$	$-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$	—	>0	Punto de infloxión
$(-\sqrt{2}, -1)$	<0	<0	>0	>0	Es convexa hacia las y negativas, monótona decreciente
-1	$-\frac{1}{e}$	$-e$	no existe	no existe	Punto de retroceso
$(-1, 1)$	—	—	>0	<0	Es convexa hacia las y positivas, monótona creciente, el punto $(0, 0)$ se sitúa en la curva
1	e	$\frac{1}{e}$	0	—	Máximo
$(1, \sqrt{2})$	>0	>0	<0	<0	Es convexa hacia las y positivas, monótona decreciente
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$	—	0	Punto de reflexión
$(\sqrt{2}, +\infty)$	>0	>0	<0	>0	Ex convexa hacia las y negativas, monótona decreciente; $y=0$ es la asíntota horizontal

cuando los puntos de la curva se aproximan hacia dicha asíntota, sus coordenadas respecto de x quedan negativas. Si $t \to +\infty$, entonces $x \to +\infty$, mientras que $y \to 0$, es decir, $y = 0$ es la asíntota horizontal. Al aproximarse hacia esta asíntota, los puntos de la curva tienen coordenada positiva respecto de y.

Los resultados del análisis se reúnen en una tabla (tabla 4.3) y las deducciones necesarias se apuntan en su columna derecha.

Ha de notarse que la contradicción aparente entre el carácter positivo de la primera derivada y el decrecimiento monótono de la función para $t < -1$ se debe a que al variar el parámetro t de $-\infty$ hasta -1, los valores de x varían de 0 hasta $-1/e$ (es decir, decrecen). La curva se expone en la fig. 54. ▶

4.125. $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

4.126. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$.

4.127. $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $t \in [0, 2\pi)$.

4.128. $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6 \operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$.

Constrúyanse las siguientes curvas dadas en el sistema de coordenadas polares:

4.129. $r = a \operatorname{sen} 3\varphi$. **4.130.** $r = a(1 + \cos \varphi)$.

4.131. $r = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$, **4.132.** $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

§ 5. Funciones vectoriales y complejas de una variable real

1. Definición de la función vectorial de una variable real. Si a cada valor de la variable real $t \in D \subset \mathbb{R}$ se le ha puesto en correspondencia un vector $\boldsymbol{a}(t) \in \mathcal{V}_3$, se dice que sobre el conjunto D está dada una *función vectorial* de la variable real $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$.

La definición de una función vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ es equivalente a la definición de tres funciones escalares $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ que representan las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = a_x(t)\,\boldsymbol{i} + a_y(t)\,\boldsymbol{j} + a(t)\,\boldsymbol{k},$$

o bien, en la forma más breve, $\boldsymbol{a} = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$. Si $\boldsymbol{a}$ es el radio vector del punto $M(x, y, z)$, entonces la función vectorial correspondiente se designará:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}.$$

Se denomina *hodógrafo* de la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ una línea circunscrita en el espacio por el extremo del vector $\boldsymbol{r}$. Cualquier línea en el espacio puede considerarse como hodógrafo de cierto vector. Las ecuaciones paramétricas de un hodógrafo son:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

EJEMPLO 1. Hállese el hodógrafo de la función vectorial

$$r(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,i+\frac{2t}{1+t^2}\,j+k, t\in\mathbb{R}.$$

◀ Tenemos las ecuaciones paramétricas del hodógrafo

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2},\quad z=1.$$

Eliminando el parámetro t, obtendremos

$$x^2+y^2=\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=1.$$

Por consiguiente, el hodógrafo de la función vectorial $r(t)$ es la circunferencia

$$x^2+y^2=1,\quad z=1,$$

de la que está excluido el punto (—1, 0, 1). Al variar t de $-\infty$ hasta $+\infty$, el punto $M(x, y, z)$ en el hodógrafo se desplaza desde el punto (—1, 0, 1) en sentido antihorario (si se observa de un punto dispuesto por arriba del plano $z=1$), siendo en este caso $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x=-1$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y=0$. ▶

Hállense los hodógrafos de las funciones vectoriales:

5.1. $r=(2t-1)i+(-3t+2)j+4tk$, $t\in\mathbb{R}$.

5.2. $r=\sqrt{1-t^2}\,i+\sqrt{1+t^2}\,j$, $t\in[0, 1]$.

5.3. $r=4\operatorname{ch} t\cdot i-j+3\operatorname{sh} t\cdot k$, $t\in\mathbb{R}$.

5.4. $r=3ti+(2t-t^2)j$, $t\in\mathbb{R}$.

5.5. $r=\cos t\cdot i+\operatorname{sen} t\cdot j+tk$, $t\in\mathbb{R}$.

5.6. $r=2\cos^3 t\cdot i+2\operatorname{sen}^3 t\cdot j$, $t\in[0, 2\pi]$.

5.7. $r=ti+t^2j+t^3k$, $t\in\mathbb{R}$.

5.8. $r=\cos^2 t\cdot i+\operatorname{sen} t\cos t\cdot j+\operatorname{sen} t\cdot k$, $t\in[0, 2\pi]$.

5.9. $r=5\cos t\cdot i+4\operatorname{sen} t\cdot j+2k$, $t\in[0, 2\pi]$.

5.10. $r=(\operatorname{sh} t-1)\,i+\operatorname{ch}^2 t\cdot j+3k$, $t\in\mathbb{R}$.

2. **Derivación de la función vectorial.** Se denomina *derivada de la función vectorial* $a=a(t)$ respecto del argumento t la nueva función vectorial

$$\frac{da}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a(t+\Delta t)-a(t)}{\Delta t}$$

Si $a(t)=(a_x(t), a_y(t), a_z(t))$, entonces

$$\frac{da}{dt}=\left(\frac{da_x(t)}{dt},\ \frac{da_y(t)}{dt},\ \frac{da_z(t)}{dt}\right).$$

Si $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces la derivada $\frac{dr}{dt}$ será un vector dirigido a lo largo de la tangente al hodógrafo de la función vectorial $r(t)$ hacia el lado de crecimiento del argumento t.

Si t es el tiempo, $\frac{dr}{dt} = v$ será un vector de la velocidad del extremo del vector r.

REGLAS DE DERIVACIÓN DE LA FUNCIÓN VECTORIAL. ($a = a(t)$, $b = b(t)$).

1) $\frac{d}{dt}(a \pm b) = = \frac{da}{dt} \pm \frac{db}{dt}$.

2) $\frac{d}{dt}(\alpha a) = \alpha \frac{da}{dt}$, donde α es un escalar constante.

3) $\frac{dc}{dt} = 0$. donde c es un vector constante.

4) $\frac{d}{dt}(\varphi a) = \frac{d\varphi}{dt} a + \varphi \frac{da}{dt}$, donde $\varphi = \varphi(t)$ es una función escalar de t.

5) $\frac{d}{dt}(a, b) = \left(\frac{da}{dt}, b\right) + \left(a \frac{db}{dt}\right)$.

6) $\frac{d}{dt}[a, b] = \left[\frac{da}{dt}, b\right] + \left[a, \frac{db}{dt}\right]$.

7) $\frac{d}{dt} a(\varphi(t)) = \frac{da}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, donde $\varphi = \varphi(t)$ es una función escalar de t.

8) $\left(a, \frac{da}{dt}\right) = 0$, si $|a| = \text{const}$.

5.11. Dada la ecuación de movimiento $r = 3ti - 4tj$, determínense la trayectoria y la velocidad del movimiento.

5.12. Sea dada la ecuación de movimiento $r = 3ti + (4t - t^2)j$. Determínense la trayectoria y la velocidad del movimiento. Constrúyanse los vectores de la velocidad para los instantes $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$.

5.13. Sea dada la ecuación de movimiento $r = 2(t - \text{sen } t)\, i + 2(1 - \cos t)\, j$. Determínense la trayectoria y la velocidad del movimiento. Constrúyanse los vectores de la velocidad para los instantes $t = \pi/2$, $t = \pi$.

5.14. Hállese el vector tangente unidad del hodógrafo de la función vectorial $r = e^{2t} i - (t + 8)^{4/3} j$ para $t = 0$.

5.15. Hállese el vector tangente unidad del hodógrafo de la función vectorial $r = (t^3 + t)i + t^2 j$ para $t = -1$.

5.16. Hállense las derivadas de las funciones vectoriales:

a) $r = \text{sen } t \cdot i + \cos^2 t \cdot j + \text{sen } t \cos t \cdot k$;

b) $r = t \cos t \cdot i + t \text{ sen } t \cdot j + tk$;

c) $\boldsymbol{r} = (t + \cos t)\,\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{k}$.

5.17. Hállense las derivadas de las funciones vectoriales:

a) $\boldsymbol{r} = e^t\,\boldsymbol{i} + \cos t \cdot \boldsymbol{j} + (t^2 + 1)\,\boldsymbol{k}$ en el punto (1, 1, 1);

b) $\boldsymbol{r} = t^3\boldsymbol{i} + (t+1)^2\,\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\,\boldsymbol{k}$ para $t = -2$.

5.18. Hállese $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, si

$\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$.

5.19. Hállese $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$.

5.20. Hállese $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, si $\boldsymbol{a} = u\boldsymbol{i} + u^2\boldsymbol{j} + u^3\boldsymbol{k}$, donde $u = \operatorname{sen} t$.

3. Tangente a una curva espacial y a un plano normal. La ecuación de la tangente a una curva espacial $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, al cual corresponde el valor del parámetro t_0, tiene la forma

$$\frac{x - x_0}{\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}}$$

donde x, y, z son las coordenadas corrientes del punto de tangencia. La ecuación del plano normal en el mismo punto es:

$$(x - x_0)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} + (y - y_0)\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} + (z - z_0)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} = 0.$$

EJEMPLO 2. Demuéstrese que una tangente a la línea helicoidal $\boldsymbol{r} = (a\cos t,\ a\operatorname{sen} t,\ bt)$ forma con el eje Oz un ángulo constante.

◀ Hallemos el vector que sea tangente al hodógrafo del vector $\boldsymbol{r}$:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-a\operatorname{sen} t,\ a\cos t,\ b).$$

De aquí

$$\cos\gamma = \frac{z'(t)}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

es decir, $\gamma = \text{const}$. ▶

EJEMPLO 3. Escríbanse las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva $x = t^2 - 1$, $y = t + 1$, $z = t^3$ en el punto $M_0(0, 2, 1)$.

◀ Al punto dado le corresponde el valor del parámetro $t = 1$. Tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 3t^2.$$

Sustituyendo el valor de $t=1$, obtenemos

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=1,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}=1,\quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1}=3.$$

La ecuación de la tangente:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}$$

La ecuación del plano normal:

$$2(x-0)+1\cdot(y-2)+3(z-1)=0,$$

o bien

$$2x+y+3z-5=0. \blacktriangleright$$

Para cada una de las curvas que siguen escríbanse la ecuación de la tangente y la del plano normal en el punto dado:

5.21. $x=4\operatorname{sen}^2 t$, $y=4\operatorname{sen} t\cos t$, $z=2\cos^2 t$ para $t=\pi/4$.

5.22. $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=\frac{1}{3}t^3$, $z=\frac{1}{4}t^4$ para $t=2$.

5.23. $x=a\operatorname{ch} t$, $y=a\operatorname{sh} t$, $z=at$ para $t=0$.

5.24. $x^2+y^2=10$, $y^2+z^2=25$ en el punto $M_0(1, 3, 4)$.

5.25. $2x^2+3y^2+z^2=9$, $3x^2+y^2-z^2=0$ en el punto $M_0(1, -1, 2)$.

4. Segunda derivada de la función vectorial. Si

$$r=r(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t)),$$

se tiene

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Si t es el tiempo, entonces $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=w$ es el vector de la aceleración del extremo del vector r.

Supongamos que una curva en el plano Oxy representa el hodógrafo de la función vectorial $r=r(s)=(x(s),\ y(s))$, donde s es la longitud del arco de la curva.

Se llama *curvatura* de la curva en el punto M_0 el número

$$K=\left|\lim_{M\to M_0}\frac{\varphi}{\Delta s}\right|,$$

donde φ es el ángulo de giro de la tangente correspondiente al arco $\overset{\frown}{M_0M}$ (fig. 55) de la curva dada, y Δs es la longitud de dicho arco. La magnitud $R=1/K$ se denomina *radio de curvatura*.

La curvatura K se define por la relación

$$K = \left| \frac{d^2 r}{ds^2} \right|.$$

Las fórmulas para calcular la curvatura son: 1) si una curva viene definida mediante la ecuación en la forma explícita $y = f(x)$, entonces

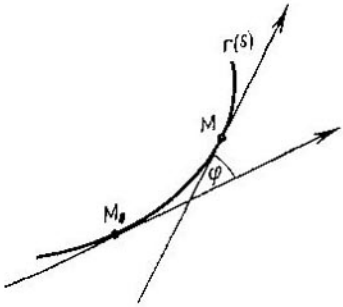


Fig. 55

$$K = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right|;$$

2) si una curva está dada mediante la ecuación en la forma implícita*) $F(x, y) = 0$, entonces

$$K = \left| \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}} \right|;$$

3) si una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, entonces

$$K = \left| \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \right|;$$

4) si una curva está dada en las coordenadas polares por la ecuación $r = r(\varphi)$, entonces

$$K = \left| \frac{r^2 + 2r'^2 - rr'}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \right|.$$

Se denomina *círculo osculador* de una curva en su punto M una posición límite de la circunferencia trazada por el punto M y otros dos puntos de la curva P y Q, cuando $P \to M$ y $Q \to M$.

El radio del círculo osculador es igual al radio de curvatura y el centro del círculo osculador (*centro de curvatura*), correspondiente al punto M, se encuentra en la normal a la recta trazada en el punto M en dirección de la convexidad de la curva.

Las coordenadas X e Y del centro de curvatura son

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Se llama *evoluta* de una curva una línea circunscrita por el centro de curvatura cuando dicho punto se mueve por la curva. Las fórmulas para las coordenadas del centro de curvatura determinan las ecuaciones paramétricas de la evoluta.

*) Aquí se usan las derivadas parciales de una función de dos variables; véase la definición en el p. 3, § 1, Cap. 7.

EJEMPLO 4. Hállese la ecuación de la evoluta de una parábola $y^2 = 2(x + 1)$.

◀ Tenemos $2yy' = 2$, es decir, $y' = \frac{1}{y}$. Luego de realizar la derivación reiterada, obtenemos $y'^2 + yy' = 0$, de donde $y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{y^3}$. Hallamos las coordenadas del centro de curvatura:

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{y^2}{2} - 1 - \frac{\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}{-1/y^3} = \frac{3}{2}y^2,$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{y^2}}{-1/y^3} = -y^3;$$

de modo que quedan determinadas las ecuaciones paramétricas de la evoluta:

$$X = \frac{3}{2}y^2, \quad Y = -y^3.$$

Eliminando el parámetro y, hallamos la ecuación de la evoluta en la forma

$$Y^2 = \frac{8}{27}X^3. \blacktriangleright$$

5.26. Hállense las segundas derivadas de las funciones vectoriales:

a) $\boldsymbol{r} = \cos t \cdot \boldsymbol{i} + e^t \boldsymbol{j} + (t^2 + 1)\boldsymbol{k}$.

b) $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t \cos t \cdot \boldsymbol{j} + t \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{k}$

para t arbitrario y $t = 0$.

5.27. Sea dada la ecuación de movimiento: $\boldsymbol{r} = 2(t - \operatorname{sen} t)\,\boldsymbol{i} + 2(1 - \cos t)\,\boldsymbol{j}$. Determínese la aceleración del movimiento. Constrúyanse los vectores de la aceleración para los instantes $t = \pi/2$, $t = \pi$.

5.28*. Sea dada la ecuación de movimiento: $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} + (4t - t^2)\boldsymbol{j}$. Determínense la aceleración $\boldsymbol{w}$ de movimiento y los componentes de ésta, tangencial w_τ y normal w_n, en cualquier instante t y para $t = 0$.

5.29. Sea dada la ecuación de movimiento: $\boldsymbol{r} = {}^1/_2\, t^2\boldsymbol{i} + {}^1/_3\,(2t + 1)^{3/2}\,\boldsymbol{j}$. Determínense la aceleración de movimiento y sus componentes tangencial y normal en cualquier instante t y para $t = 0$.

Calcúlese la curvatura de la curva dada:

5.30. $y = x^2$ en el origen de coordenadas y en el punto M (1, 1).

5.31. $x^2 + 9y^2 = 9$ en los vértices de una elipse A (3, 0) y B (0, 1).

5.32. $x^2 - xy + y^2 = 1$ en el punto M (1, 1).

5.33. $x = t^2$, $y = t - {}^1/_3\, t^3$ para $t = 1$.

5.34. $x = {}^1/_2\, t^2$, $y = {}^1/_3\, t^3$ en el punto M $({}^1/_2, {}^1/_3)$.

5.35. $r = a\,(1 - \cos\varphi)$ en cualquier punto y para $\varphi = \pi$.

5.36. $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi$ para $\varphi = \pi/4$.

Hállense los radios de curvatura (en cualquier punto) de las curvas dadas:

5.37. $y = \sqrt[3]{x}$. 5.38. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5.39. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. 5.40. $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$.

5.41. $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

5.42. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. 5.43. $y = a\,\varphi$.

5.44*. Se llama *vértice* de una curva un punto suyo tal que la curvatura en él alcanza su máximo o mínimo. Hállese el vértice de la curva $y = e^{-x}$.

5.45. Hállese el vértico de la curva $y = \ln x$.

Calcúlense las coordenadas de los centros de curvatura y escríbanse las ecuaciones de los círculos osculadores de las curvas dadas en los puntos indicados:

5.46. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ en el punto M (0, a).

5.47. $y = e^{-x^2}$ en el punto M (0, 1).

5.48. $y = xe^x$ en el punto M (—1, $-1/e$).

5.49. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto M ($\pi/2$, 1).

5.50. $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ en el punto M (πa, $2a$).

Hállense las evolutas de las curvas:

5.51. $y = x^3$. 5.52. $x^2 - y^2 = a^2$.

5.53. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

5.54. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

5.55. $x = 2t$, $y = t^2 - 2$.

5. **Características diferenciales de las curvas espaciales.** En todo punto regular M (x, y, z) de una curva espacial $r = r\,(t)$ se pueden construir tres vectores recíprocamente perpendiculares:

$$T = \frac{dr}{dt} \text{ (vector director de la } \textit{tangente}\text{)},$$

$$B = \left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}\right] \text{ (vector director de la } \textit{binormal}\text{)},$$

$N = [B, T]$ (vector de la *normal principal*)
o bien *vectores unidad* básicos que les corresponden:

$$\tau = \frac{T}{|T|}, \quad \beta = \frac{B}{|B|}, \quad \nu = \frac{N}{|N|},$$

que pueden calcularse también según las fórmulas:

$$\tau = \frac{dr}{ds}, \quad \nu = \frac{d\tau}{ds} \Big/ \left| \frac{d\tau}{ds} \right|, \quad \beta = [\tau, \nu]$$

Un triedro que tiene su vértice en el punto M_0 y cuyas aristas están representadas por la tangente, la binormal y la normal principal, lleva el nombre de *triedro intrínseco* de una curva espacial. Las caras de dicho triedro son los planos: *osculador* (pasa por los vectores T y N), *normal* (pasa por los vectores N y B), *rectificante* (pasa por los vectores B y T).

Las ecuaciones de la normal principal son de la forma

$$\frac{x - x_0}{N_x} = \frac{y - y_0}{N_y} = \frac{z - z_0}{N_z},$$

donde x, y, z son coordenadas corrientes del punto de la normal principal; N_x, N_y, N_z son las coordenadas del vector N.

La ecuación de la binormal es:

$$\frac{x - x_0}{B_x} = \frac{y - y_0}{B_y} = \frac{z - z_0}{B_z}.$$

La ecuación del plano osculador es:

$$B_x (x - x_0) + B_y (y - y_0) + B_z (z - z_0) = 0.$$

La ecuación del plano rectificante es:

$$N_x (x - x_0) + N_y (y - y_0) + N_z (z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 5. Hállense los vectores unidad básicos τ, ν y β de la curva $x = 1 - \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = t$ en el punto M, al cual corresponde el valor del parámetro $t = 0$. Escríbanse las ecuaciones de la tangente, de la normal principal y de la binormal en el punto citado.

◀ Tenemos

$$r = (1 - \operatorname{sen} t)\, i + \cos t \cdot j + tk,$$

$$\frac{dr}{dt} = -\cos t \cdot i - \operatorname{sen} t \cdot j + k,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \operatorname{sen} t \cdot i - \cos t \cdot j.$$

Para $t = 0$ obtendremos

$$T = \frac{dr}{dt} = -i + k, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -j,$$

$$B = \left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = i + k,$$

$$N = [B, T] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2j.$$

Por consiguiente,

$$\tau + \frac{-i+k}{\sqrt{2}}, \quad \nu = -j, \quad \beta = \frac{i+k}{\sqrt{2}}.$$

Por cuanto, para $t = 0$, tenemos $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, entonces:

$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$ es la ecuación de la tangente;

$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$ es la ecuación de la normal principal;

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$ es la ecuación de la binormal. ▶

Si una curva espacial viene dada como una intersección de dos superficies

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

entonces resulta más cómodo operar con los vectores $dr = (dx, dy, dz)$ y $d^2r = (d^2x, d^2y, d^2z)$ en lugar de los vectores $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{d^2r}{dt^2}$, además una de las variables x, y, z puede considerarse independiente y su segunda diferencial, igual a cero.

EJEMPLO 6. Escríbanse las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante de la curva

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

en su punto M (1, 1, 2).

◀ Derivando las ecuaciones dadas y considerando x como una variable independiente, obtendremos:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

$$x\,dx - y\,dy + z\,dz = 0$$

y

$$dx^2 + dy^2 + yd^2y + dz^2 + zd^2z = 0,$$
$$dx^2 - dy^2 - yd^2y + dz^2 + zd^2z = 0.$$

Para $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ tenemos:

$$dy = 0, \qquad dz = -\frac{1}{2}\,dx,$$

$$d^2y = 0, \qquad d^2z = -\frac{3}{8}\,dx^2.$$

Por consiguiente,

$$dr = \left(dx,\ 0,\ -\frac{1}{2}\,dx\right), \qquad d^2r = \left(0,\ 0,\ -\frac{3}{8}\,dx^2\right).$$

Sustituyamos estos vectores por los vectores que les son colineale (2, 0, —1) y (0, 0, —1), de donde

$$T = (2,\ 0,\ -1)$$

$$B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2j, \qquad N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(-i - 2k).$$

De aquí hallamos:

$y - 1 = 0$, la ecuación del plano osculador;

$2x - z = 0$, la ecuación del plano normal;

$x + 2z - 5 = 0$, la ecuación del plano rectificante. ▶

Hállense los vectores unidad básicos τ, ν, β y fórmense las ecuaciones de la tangente, de la normal principal y de la binormal de las curvas dadas:

5.56. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t$ para $t = 0$.

5.57. $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \operatorname{sen} \frac{t}{2}$ para $t = t = \pi$.

5.58. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ para $t = 1$.

5.59. $y = x$, $z = 2x^2$ en el punto $x = 1$.

5.60. Escríbanse las ecuaciones de los planos que forman un triedro intrínseco de la curva $x = t^2 + 1$, $y = \cos t$, $z = e^t$ en el punto (1, 1, 1).

5.61. Escríbanse las ecuaciones de los planos que forman un triedro intrínseco de la curva $x = t/\sqrt{2}$, $y = t/\sqrt{2}$, $z = \ln \operatorname{sen} t$ para $t = \pi/2$.

5.62. Hállense los vectores τ, ν, β y escríbanse las ecuaciones de todas las aristas y de todos los planos que forman

un triedro intrínseco de la curva $x = (t+1)^2$, $y = t^3$, $z = \sqrt{t^2+1}$ en el punto (1, 0, 1).

5.63. Hállense los vectores, τ, ν, β y escríbanse las ecuaciones de todas las aristas y de todos los planos que forman un triedro intrínseco de la curva

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ x+2y-z=2 \end{cases}$$ en el punto (1, 2, 3).

La *curvatura* de una curva espacial se determina igual que la de una curva plana. Si la curva viene dada mediante la ecuación $r = r(s)$, entonces

$$K=\frac{1}{R}=\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|$$

En el caso de la definición paramétrica general de una curva tenemos

$$K=\frac{1}{R}=\frac{\left|\left[\frac{dr}{dt},\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{dr}{dt}\right|^3}$$

Se llama *torsión* (*curvatura de torsión*) de una curva espacial en el punto M el número

$$\sigma=\frac{1}{\rho}=\lim_{N\to M}\frac{\theta}{\Delta s},$$

donde θ es el ángulo de giro de la binormal, correspondiente al arco, $\overset{\frown}{MN}$. La magnitud ρ se denomina *radio de torsión* o *radio de la curvatura de torsión*.

Si $r = r(s)$, se tiene

$$\sigma=\mp\left|\frac{d\beta}{ds}\right|=\frac{\frac{dr}{ds}\cdot\frac{d^2r}{ds^2}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}}{\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|^2},$$

donde el signo menos se eligo en el caso, cuando los vectores $\frac{d\beta}{ds}$ y ν tienen orientación igual y el signo más, en el caso contrario.

Si $r = r(t)$, donde t es un parámetro arbitrario, entonces

$$\sigma=\frac{\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\cdot\frac{d^3r}{dt^3}}{\left|\left[\frac{dr}{dt},\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right|^2}.$$

Ejemplo 7. Hállense la curvatura y la torsión de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ en cualquier punto

◀ Tenemos

$$r = (e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t),$$

$$\frac{dr}{dt} = (e^t (\cos t - \operatorname{sen} t),\ e^t (\operatorname{sen} t + \cos t),\ e^t),$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = (-2e^t \operatorname{sen} t,\ 2e^t \cos t,\ e^t),$$

$$\frac{d^3r}{dt^3} = (2e^t (\operatorname{sen} t + \cos t),\ 2e^t (\cos t - \operatorname{sen} t),\ e^t).$$

De aquí

$$\left[\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ e^t (\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t (\operatorname{sen} t + \cos t) & e^t \\ -2e^t \operatorname{sen} t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2t} (\operatorname{sen} t - \cos t,\ -(\operatorname{sen} t + \cos t),\ 2),$$

$$\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \cdot \frac{d^3r}{dt^3} = \begin{vmatrix} e^t (\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t (\operatorname{sen} t + \cos t) & e^t \\ -2e^t \operatorname{sen} t & 2e^t \cos t & e^t \\ -2e^t (\operatorname{sen} t + \cos t) & 2e^t (\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t \end{vmatrix} = 2e^{3t}.$$

Por consiguiente,

$$K = \frac{e^{2t} \sqrt{(\operatorname{sen} t - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 4}}{e^{3t} \sqrt{((\operatorname{sen} t - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 1)^3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-t},$$

$$\sigma = \frac{2e^{3t}}{e^{3t} ((\operatorname{sen} t - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 4)} = \frac{e^{-t}}{3}. \ ▶$$

Calcúlense la curvatura y la torsión de las curvas:

5.64. $x = e^t$ $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ en cualquier punto y para $t = 0$.

5.65. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en cualquier punto y para $t = 0$.

5.66. $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z\ 3t + t^3$, en cualquier punto y para $t = 1$.

5.67. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$, en cualquier punto y para $t = 1$.

5.68. $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{3}$ para $x = 1$.

5.69. $2x = y^2$, $z = x^2$ en cualquier punto y para $y = 1$.

5.70*. Sea dada la ecuación de movimiento $r = ti + t^2 j + \frac{2}{3} t^3 k$.

Hállense la aceleración w del movimiento, los componentes tangencial w_τ y normal w_ν de la aceleración en cualquier instante t y $t = 1$.

6. **Funciones complejas de una variable real.** Si a cada valor de la variable real $t \in D \subset \mathbb{R}$ se le ha puesto en correspondencia determinado número complejo $z = x + iy$, entonces $z(t)$ se llamará *función compleja de la variable real* t con el campo de definición D:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t).$$

La definición de la función compleja $z = z(t)$ es equivalente a la definición de dos funciones reales $x = x(t)$, $y = y(t)$, o bien a la definición de una función vectorial $r(t) = (x(t), y(t))$.

Se denomina *derivada* de la función compleja $z(t)$ una función compleja $z'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta z(t, \Delta t)}{\Delta t} = x'(t) + iy'(t)$. Para las funciones complejas de una variable real son válidas las reglas corrientes de derivación (véase el p. 1, § 1).

EJEMPLO 8. Hállense una curva, que se define por la función $z = t^2 + it$, $t \in (-\infty, +\infty)$, y la derivada de dicha función.

◀ Si $z = x + iy$, se tiene $x = t^2$, $y = t$. La curva buscada será una parábola $y^2 = x$. Hallamos la derivada de la función dada $z' = 2t + i$. ▶

Constrúyanse las curvas, definidas por las ecuaciones $z = z(t)$, y hállese $z'(t)$:

5.71.* $z = 1 - i + te^{i\frac{\pi}{4}}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

5.72. $z = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

5.73. $z = 3e^{it} + e^{-it}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

5.74. $z = (2 + i)e^t + (2 - i)e^{-t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

5.75. $z = t^2 + it^4$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

5.76. $z = t + i - ie^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

5.77. $z = ae^{it}(1 - it)$, $a \in \mathbb{R}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

5.78. $z = e^{(\alpha+i\beta)t}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

5.79.* Se sabe que $z = z(t)$ define la ley del movimiento de un punto en un plano. Hállense los componentes de la velocidad y de la aceleración en dirección de la tangente a la curva $z = z(t)$ y en dirección perpendicular a la primera.

5.80.* Un punto z recorre una circunferencia $|z| = R$ a la velocidad angular constante igual a la unidad. Hállese el vector de la velocidad del punto w que se mueve junto con z según la ley $w = f(z)$.

§ 6. Métodos numéricos de la función de una sola variable

1. Resolución numérica de las ecuaciones. Una raíz $\xi \in (a, b)$ de la ecuación $f(x) = 0$ *está aislado* en el segmento $[a, b]$, si en dicho segmento no hay otras raíces de la ecuación mencionada. El segmento $[a, b]$ recibe el nombre de *segmento de aislación de la raíz.*

MÉTODO DE CUERDAS. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ de aislación de la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ se cumplen las condiciones:

a) las funciones $f(x)$, $f'(x)$, y $f''(x)$ son continuas;

b) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

c) las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ no cambian de signo.

Definamos los números x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) mediante las igualdades

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} - \dfrac{(x_{n-1} - a)\, f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}, & x_0 = b, \quad \text{si} \quad f(a) \cdot f(x_1) < 0, \\ x_{n-1} - \dfrac{(b - x_{n-1})\, f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}, & x_0 = a, \quad \text{si} \quad f(a) \cdot f(x_1) \geqslant 0. \end{cases}$$

Entonces, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia la raíz ξ cuando $n \to \infty$, y para todos los números naturales n se cumplen las desigualdades

$$| x_n - \xi | \leqslant \frac{| f(x_n) |}{m},$$

$$| x_n - \xi | \leqslant \frac{M - m}{m} | x_n - x_{n-1} |,$$

donde $m = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} | f'(x) |$ y $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} | f'(x) |$.

EJEMPLO 1. Hállense las raíces de la ecuación

$$x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$$

empleando el método de cuerdas con una exactitud de hasta 0,0001.

◀ Habiendo construido las gráficas de las funciones $y = \operatorname{arctg} x$ e $y = 1/x$, concluimos, según la disposición de los puntos de intersección, que la citada ecuación tiene dos raíces ξ_1 y ξ_2, iguales en valor absoluto y distintos por su signo. Hallemos la raíz positiva ξ_1, eligiendo el segmento $[1, \sqrt{3}]$ como segmento de aislación de dicha raíz. Para la función $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - 1$ tenemos

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2}, \qquad f''(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}$$

y

$$f(1) \cdot f(\sqrt{3}) = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right) = -0{,}2146019 \cdot 0{,}8137992 < 0,$$

por lo cual las condiciones a), b) y c) quedan cumplidas. Por cuanto $f''(x) > 0$ cuando $x \in [1, \sqrt{3}]$, entonces $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, donde

$$m = f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = 1{,}2853981,$$

$$M = f'(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1{,}4802102,$$

y $\frac{M-m}{m} = 0{,}1515577$. Con el fin de determinar el signo del producto $f(1) \cdot f(x_1)$, hallemos x_1. Dado que

$$x_1 = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1) f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1{,}1527608,$$

los números x_n se deben calcular según la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(\sqrt{3} - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(\sqrt{3}) - f(x_{n-1})}.$$

Reunamos los cálculos en una tabla:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n	$\frac{M-m}{m}(x_n - x_{n-1})$
1	1	−0,2146019	−0,1527608	1,1527608	0,023152
2	1,1527608	−0,0129601	−0,0090807	1,1618415	0,0013762
3	1,1618415	−0,0006758	−0,000473	1,1623145	0,0000716

La última columna determina el error absoluto límite*). De este modo, $\xi_1 = 1{,}1623 \pm 0{,}0001$ y $\xi_2 = -1{,}1623 \pm 0{,}0001$. ▶

MÉTODO DE LAS TANGENTES. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ de aislación de la raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ se cumplen las condiciones a), b) y c), mencionadas más arriba, y los números x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) se determinan por la ecuación

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

siendo

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{si } f(a) \cdot f(c) < 0, \\ b, & \text{si } f(a) \cdot f(c) > 0, \\ c, & \text{si } f(c) = 0, \end{cases}$$

*) Aquí y en todos los problemas de cálculo que se dan ulteriormente, los cálculos intermedios se realizan con un número de signos decimales asegurado por la computadora electrónica que se emplea.

donde

$$c = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}\,.$$

En este caso la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia la raíz ξ cuando $n \to \infty$, y para todos los números naturales n se verifican las desigualdades

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} \quad \text{y} \quad |x_n - \xi| \leqslant \frac{M_1}{2m}(x_n - x_{n-1})^2,$$

donde

$$m = \min_{a\leqslant x\leqslant b} |f'(x)|, \quad M_1 = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|.$$

EJEMPLO 2. Hállese la raíz positiva de la ecuación $x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$, empleando el método de las tangentes con una exactitud de hasta 0,0001.

◀ Al igual que en el ejemplo antecedente, el segmento $[1, \sqrt{3}]$ será el de aislación. Por cuanto para la función $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - 1$ tenemos $c = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1)f(1)}{f(\sqrt{3})-f(1)} = 1{,}1527608 > 0$, entonces los números x_n se calculan conforme a la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\,, \quad x_0 = \sqrt{3}.$$

Las funciones $f'(x)$, $f''(x)$ y el valor de $m = 1{,}2853981$ se han hallado en el ejemplo 1. Luego, $M_1 = f''(1) = 0{,}25$, puesto que $f'''(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^3} < 0$ en el segmento de aislación. Por fin, $\frac{M_1}{2m} = 0{,}0972461$.

Los resultados de los cálculos se reúnen en la tabla:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n	$\frac{M_1}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$
1	1,7320508	0,8137992	1,4802102	0,5497862	1,1822646	0,0534645
2	1,1822646	0,0270628	1,3617976	0,0198728	1,1623918	0,0000384

Por consiguiente, la raíz de la ecuación $\xi = 1{,}16239 \pm 0{,}00004$. ▶

Convénzase de que las ecuaciones no tienen raíces reales

6.1. $2^x - x - \frac{1}{2} = 0$. 6.2. $x^2 - \operatorname{arctg} x + 1 = 0$.

6.3. $(x^2 + 2x + 2)^2 = 0$. 6.4. $\sqrt{2x-1} + \lg\frac{1}{x} = 0$.

6.5. $x^4 - x^2 + 1 = 0$.

6.6.** La raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ está aislada en el segmento $[a, b]$, la función $f(x)$ es continua y $f(a) \cdot f(b) < 0$. Fórmese en FORTRAN el subprograma de reducción del segmento de aislación en 2^n veces, aprovechando la partición sucesiva del segmento por la mitad. Elíjanse en calidad de parámetros las magnitudes F, A, B, N, donde F es el identificador de la función-subprograma para el cálculo de valores de la función $f(x)$, A y B son los extremos del segmento de aislación inicial antes de los cálculos y los extremos del segmento de aislación obtenido después de los mismos, N es el exponente de potencia en la expresión para 2^n que caracteriza la disminución del segmento de aislación.

6.7. Resuélvase la ecuación $x^3 + x^2 - 3 = 0$ por el método combinado, empleando el método de cuerdas y el de las tangentes, compárense los resultados.

◀ Habiendo construido las gráficas de las funciones $y = x^3$ e $y = 3 - x^2$, llegamos a la conclusión de que la ecuación citada tiene en el segmento [1, 2] una raíz real ξ. Disminuyamos en cuatro veces el segmento de aislación, empleando el método de división por la mitad. Para $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ tenemos $f(1) = -1 < 0$, y $f(2) = 9 > 0$. Hallemos $f(1{,}5) = \frac{21}{8} > 0$, por lo cual el segmento de aislación más estrecho será [1, 1,5]. Hallado $f(1{,}25) = 0{,}515625 > 0$ obtenemos el segmento [1, 1,25]. Por cuanto

$$c = 1 - \frac{(1{,}25 - 1) f(1)}{f(1{,}25) - f(1)} = 1{,}1649484 > 0,$$

entonces, aplicando el método de cuerdas, se debe utilizar la fórmula

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} - \frac{(1{,}25 - \bar{x}_{n-1}) f(\bar{x}_{n-1})}{f(1{,}25) - f(\bar{x}_{n-1})} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

y, aplicando el método de tangentes, la fórmula

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} - \frac{f(\tilde{x}_{n-1})}{f'(\tilde{x}_{n-1})} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad \tilde{x}_0 = 1{,}25.$$

Los resultados de los cálculos se reúnen en dos tablas:
a) para el método de cuerdas:

n	$\bar{x}_{n-1}$	$f(\bar{x}_{n-1})$	$-(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1})$	$\bar{x}_n$
1	1	—1	—0,1649484	1,1649484
2	1,1649484	—0,0619384	—0,0091209	1,1740693
3	1,1740693	—0,0031786	—0,0004651	1,1745344

b) para el método de tangentes:

n	$\widetilde{x}_{n-1}$	$f(\widetilde{x}_{n-1})$	$f'(\widetilde{x}_{n-1})$	$-(\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1})$	$\widetilde{x}_n$
1	1,25	0,515625	7,1875	0,0717391	1,1782609
2	1,1782609	0,0240767	6,5214179	0,0036919	1,1745690

Calculando por el método de cuerdas, hemos obtenido una sucesión creciente $(\overline{x}_n)$ de las aproximaciones de la raíz ξ:

$$1 < 1{,}1649484 < 1{,}1740693 < 1{,}1745344 < \ldots < \xi,$$

y calculando por el método de las tangentes, una sucesión decreciente $(\widetilde{x}_n)$:

$$\xi < \ldots < 1{,}1745690 < 1{,}1782609 < 1{,}25.$$

Los signos decimales coincidentes de los términos de ambas sucesiones son exactos para la raíz ξ. Partiendo del error absoluto límite ε, el valor de n, para el cual se alcanza la exactitud requerida, se halla de la desigualdad

$$|\overline{x}_n - \widetilde{x}_n| < \varepsilon$$

siendo $\xi = \frac{1}{2}(\overline{x}_n + \widetilde{x}_n) \pm \varepsilon$. De este modo,

$$\xi = 1{,}17455 \pm 0{,}00003. \blacktriangleright$$

Empleando uno de los métodos mencionados, calcúlense con una exactitud de hasta 0,0001 las raíces reales de las ecuaciones: a) por el método de cuerdas, b) por el método de tangentes, c) por el método combinado:

6.8. $x^3 + 2x - 8 = 0$, **6.9.** $x^3 + x + 1 = 0$.
6.10. $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$, **6.11.** $x^3 + 2x - 30 = 0$.
6.12. $x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$. **6.13.** $x^3 - 2x - 5 = 0$.
6.14. $x^3 - 5x + 1 = 0$. **6.15.** $2x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$.
6.16. $(x + 1)^3 - x = 0$. **6.17.** $x^4 - 2x - 2 = 0$.
6.18. $x^4 - 4x + 1 = 0$. **6.19.** $x^5 + x + 1 = 0$.
6.20. $x = \sqrt[3]{5 - x}$. **6.21.** $x = 2 + \sqrt[4]{x}$.
6.22. $x^3 + 60x - 80 = 0$. **6.23.** $x^5 - x - 2 = 0$.
6.24. $x = 10 \lg x$. **6.25.** $x = 2 - \lg x$.
6.26. $x^2 = -\ln x$. **6.27.** $x^2 = \ln(x + 1)$.
6.28. $4x = 2^x$. **6.29.** $x^2 = e^x + 2$.
6.30. $x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$. **6.31.** $x - \cos x = 0$.
6.32. $x^2 = \cos x$. **6.33.** $x = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$.

6.34. $\ln x = \operatorname{arctg} x$. **6.35.** $x^2 + \ln x - 4 = 0$.
6.36. $x^2 \operatorname{arctg} x - 1 = 0$.

6.37. Fórmese en FORTRAN un programa para la resolución del siguiente problema: hállense, empleando el método de cuerdas, las raíces de la ecuación $e^{x-2} - x = 0$ con una exactitud de hasta 0,0001.

◀ Se debe representar el programa como un conjunto de tres unidades de programa: programa principal, función-subprograma para determinar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ por el método de cuerdas en el segmento de aislación de la raíz $[a, b]$, función-subprograma para calcular los valores de la función $f(x)$.

Función-subprograma para calcular los valores de la función:

```
FUNCTION F (X)
F = EXP (X - 2) - X
RETURN
END
```

Función-subprograma para determinar la raíz por el método de cuerdas. Los parámetros: F, A, B, S, EPS, F es el nombre de la función-subprograma para calcular los valores de la función $f(x)$, A y B son los extremos del segmento de aislación de la raíz, S es el valor mínimo de $|f'(x)|$ en el segmento de aislación, EPS es el error absoluto límite.

```
      FUNCTION CHORD (F, A, B, S, EPS)
      FA = F (A)
      FB = F (B)
      X = A - (B - A) * FA/(FB - FA)
      FX = F (X)
      IF (FA * FX.GT.0) GO TO 2
    1 X = X - (X - A) * FX/(FX - FA)
      FX = F (X)
      IF (FX/S.GT.EPS) GO TO 1
      CHORD = X
      RETURN
    2 X = X - (B - X) * FX/(FB - FX)
      FX = F (X)
      IF (FX/S.GT.EPS) GO TO 2
      CHORD = X
      RETURN
      END
```

Los operadores FA = F (A), FB = F (B) y FX = F (X) se emplean en el subprograma citado para evitar cálculos superfluos de los valores de la función $f(x)$; al realizarse el programa, la notación F (X) conlleva el acceso a la función-subprograma y el cálculo del valor correspondiente de esta función.

Programa principal. Analizando el comportamiento de la función $f(x) = e^{x-2} - x$ y de su derivada $f'(x) = e^{x-2} - 1$, concluimos que la ecuación $e^{x-2} - x = 0$ tiene dos raíces en los segmentos [0, 0,3] y [3, 3,2]. Por cuanto $f''(x) = e^{x-2} > 0$, entonces $f'(x)$ crece y se cumplen las desigualdades $0{,}864665 = e^{-2} - 1 \leqslant f'(x) \leqslant e^{-1,7} - 1 = -0{,}817316$ para $x \in [0, 0{,}3]$, $1{,}718281 = e - 1 \leqslant f'(x) \leqslant e^{1,2} - 1 = 2{,}320116$ para $x \in [3, 3{,}2]$. Por esta razón, $|f'(x)| > 0{,}8173$ en el primer caso y $|f'(x)| > 1{,}7182$, en el segundo. Estos números determinan, junto con los extremos de los segmentos de aislación y el error absoluto límite dado, los valores de los parámetros, esto es, como suele decirse, son parámetros verdaderos para el subprograma CHORD. El programa principal tiene la forma siguiente:

```
      EXTERNAL F
      ROOT 1 = CHORD (F, 0, 0, 0.3, 0.8173, 0.0001)
      ROOT 2 = CHORD (F, 3, 3.2, 1.7182, 0.0001)
      WRITE (3,1) ROOT 1, ROOT 2
    1 FORMAT ('RAÍCES DE LA ECUACIÓN', F6.4', y', F6.4)
      STOP
      END
```

▶

Fórmense en FORTRAN las funciones-subprogramas para hallar, mediante el método indicado, las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en el segmento de aislación $[a, b]$. Los parámetros: F, A, B, S, EPS; F es el nombre de la función-subprograma para calcular el valor de la función $f(x)$, A y B son extremos del segmento de aislación, S es un parámetro definido más abajo, EPS, el error absoluto límite. El parámetro FD es el nombre de la función-subprograma para el cálculo de $f'(x)$.

6.38. Método de las cuerdas. Parámetros: F, A, B, S, EPS, $S = \dfrac{M-m}{m}$, donde $M = \max |f'(x)|$ y $m = \min |f'(x)|$ para $x \in [a, b]$.

6.39. Método de las tangentes. Parámetros: F, FD, A, B, S, EPS, $S = \dfrac{M_1}{2m}$, donde $M_1 = \max |f''(x)|$ y $m = \min |f'(x)|$ para $x \in [a, b]$.

6.40. Método combinado. Parámetros: F, FD, A, B, EPS.

6.41. Fórmese en FORTRAN, para la ecuación $f(x) = 0$ en uno de los problemas 6.8—6.36, la función-subprograma para calcular los valores de la función $f(x)$.

Fórmense en FORTRAN los programas de resolución de uno de los probemas 6.8—6.36, aplicando el método indicado.

6.42. Método de cuerdas. Utilícense las soluciones de los problemas 6.38 y 6.41.

6.43. Método de tangentes. Hágase uso de las soluciones de los problemas 6.39 y 6.41.

6.44. Método combinado. Utilícense las soluciones de los problemas 6.40 y 6.41.

2. Interpolación de las funciones. Supongamos que la función $y = f(x)$ toma en los nudos de interpolación $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, los valores $f(x_k) = y_k$; entonces las *diferencias partidas* se determinan mediante las igualdades:

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_k - y_{k+1}}{x_k - x_{k+1}},$$

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{\Delta y(x_k, x_{k+1}) - \Delta y(x_{k+1}, x_{k+2})}{x_k - x_{k+2}}$$

. . . . . .

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l-1}, x_{k+l}) =$$

$$= \frac{\Delta y(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l-1}) - \Delta x(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})}{x_k - x_{k+l}},$$

y el *polinomio de interpolación* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ tiene por expresión

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) \Delta y(x_0, x_1, \ldots, x_k); \quad (1)$$

además, en el caso de existencia de la derivada continua $f^{(n+1)}(x)$ en $[a, b]$ se verifica la desigualdad

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|, \quad (2)$$

donde

$$M_{n+1} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

EJEMPLO 3. Hállese $\sqrt[3]{2}$ con una exactitud de hasta 0,0001, construyendo para la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ un polinomio de interpolación en el segmento $[1{,}69, 2{,}25]$.

◀ Elijamos $n = 2$ y los nudos de interpolación $x_0 = 1{,}69$, $x_1 = 1{,}96$, $x_2 = 2{,}25$. Estimemos la exactitud según la fórmula (2). Puesto que $f^{(IV)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-7/2} < 0$, la función $f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/3}$ va decreciendo en el segmento $l = [1{,}69, 2{,}25]$; por esta razón

$$M_3 = \max_{x \in l} f'''(x) = f'''(1{,}69) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(1{,}69)^{\frac{8}{3}} \cdot 1{,}3} = 0{,}1009984.$$

En este caso para la diferencia $r_2(x) = f(x) - p_2(x)$ obtendremos la desigualdad

$$|r_2(x)| < \frac{M_3}{3!} |(x-1{,}69)(x-1{,}96)(x-2{,}25)|,$$

de donde proviene el cumplimiento de la desigualdad

$$|r_2(x)| < \frac{0{,}1009984}{6} 0{,}31 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}25 = 0{,}0000521$$

y la obtención de la exactitud deseada.

Hallemos los coeficientes del polinomio de interpolación, calculando las diferencias partidas y reuniendo los resultados de los cálculos en la tabla:

k	x_k	y_k	$\Delta y(x_k, x_{k+1})$	$\Delta y(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$
0	1,69	1,3	$\frac{1{,}3-1{,}4}{1{,}69-1{,}96} = 0{,}3703703$	$\frac{0{,}3703703-0{,}3448275}{1{,}69-2{,}25} =$
1	1,96	1,4		$= -0{,}0456121$
2	2,25	1,5	$\frac{1{,}4-1{,}5}{1{,}96-2{,}25} = 0{,}3448275$	

El polinomio tiene la forma

$$p_2(x) = 1{,}3 + 0{,}3703703\,(x - 1{,}69) - 0{,}0456121\,(x - 1{,}69) \times (x - 1{,}96),$$

$$p_2(2) = 1{,}3 + 0{,}3703703 \cdot 0{,}31 - 0{,}0456121 \cdot 0{,}31 \cdot 0{,}04 = 1{,}3 + 0{,}1148147 - 0{,}0005655 = 1{,}4142492.$$

De aquí

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \pm 0{,}0001. \blacktriangleright$$

Las *diferencias finitas* $\Delta^k y_i$ ($k = 1, 2, \ldots$; $i = 0, 1, 2, \ldots$) se determinan por las igualdades

$$\Delta^1 y_i = \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$
$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i.$$

Para los *nudos equidistantes* $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) donde el paso de interpolación $h > 0$, el polinomio de interpolación (1)

adquiere la forma

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}\Delta^k y_0, \qquad (3)$$

donde $t = \frac{x - x_0}{h}$ y $\Delta^k y_0$ son diferencias finitas de k-ésimo orden, mientras que la desigualdad (2) toma la forma

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \left| \prod_{k=0}^{n} (t-k) \right|. \qquad (4)$$

EJEMPLO 4. La función $y = f(x)$ está dada por la tabla

x	1,0	1,1	1,2	1,3
y	2,7854	2,8330	2,8761	2,9151

Determínese la expresión analítica, por medio de la cual la función citada puede representarse en el segmento $[1, 1,3]$ y calcúlese $f(1,15)$.

◀ Una expresión analítica que permite calcular los valores de la función $f(x)$, que no se dan en la tabla, la buscaremos en forma de un polinomio cuyos valores coinciden con los valores dados de la función, es decir, en forma del polinomio $p_3(x)$ que satisface las correlaciones $p_3(x_k) = f(x_k)$ para $k = 0, 1, 2, 3$. Un único polinomio que posee estas propiedades es el polinomio de interpolación $p_3(x)$, definido por la igualdad (3). Hallemos las diferencias finitas, reuniendo los resultados de los cálculos en la siguiente tabla:

k	x_k	y_k	Δy_k	Δy_k^2	Δy_k^3
0	1	2,7854			
1	1,1	2,8330	0,0476	—0,0045	
2	1,2	2,8761	0,0431	—0,0041	0,0004
3	1,3	2,9151	0,0390		

Aplicando la fórmula (3) para $h = 0,1$, $n = 3$ y $x_0 = 1$, obtendremos

$$p_3(x) = 2,7854 + 0,476(x - 1) - 0,225(x - 1)(x - 1,1) + \\ + 0,0666(x - 1)(x - 1,1),(x - 1,2).$$

Entonces

$$p_3(1,15) = 2,7854 + 0,476 \cdot 0,15 - 0,225 \cdot 0,15 \cdot 0,05 + \\ + 0,0666 \cdot 0,15 \cdot 0,05(-0,05) = 2,7854 + 0,0714 - \\ - 0,0017 + 0,0000 = 2,8551.$$

Para calcular $f(1,15)$ observemos que $f(1,15) = p_3(1,15)$ y como error absoluto límite de la igualdad $f(x) = p_n(x)$ se considerará,

siempre que la derivada $f^{(n+1)}(x)$ sea desconocida, el módulo del último de los sumandos que figuran en la suma (3). Por eso $f(1{,}15) = 2{,}8551$. ▶

6.45*. Demuéstrese la igualdad

$$\Delta^k y_i = \sum_{\nu=0}^{k} C_k^{\nu} (-1)^{\nu} y_{k+i-\nu},$$

donde $C_k^{\nu} = \frac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!}$, $0! = 1$.

6.46*. Demuéstrese la igualdad

$$\Delta y(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{y_\nu}{w_k'(x_\nu)}$$

donde $w_k = \prod_{i=1}^{k} (x - y_i)$.

6.47. Para la función $f(x) = \cos \frac{\pi}{12} x$ constrúyase un polinomio de interpolación, eligiendo los nudos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Hállese $\cos \frac{\pi}{10}$ y estímese la exactitud.

6.48. Para la función $f(x) = \ln x$ constrúyase un polinomio de interpolación eligiendo los nudos $x_0 = 9$, $x_1 = 10$, $x_2 = 12$, $x_3 = 15$ y empleando los valores de $\ln 2 = 0{,}693147$, $\ln 3 = 1{,}098613$ y $\ln 5 = 1{,}609438$. Hállese $\ln 11$ y estímese la exactitud.

La función $y = f(x)$ viene dada por medio de una tabla. Hállense los valores de esta función para los valores indicados x_1 y x_2 del argumento x que no figuran en la tabla.

6.49.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y	1,0 2	1,061	1,087	1,119	1,160	1,212	1,274	1,350

$x_1 = 1{,}26$, $x_2 = 1{,}58$.

6.50.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
y	1,958	2,107	2,268	2,443	2,632	2,841	3,071	3,324

$x_1 = 1{,}89$, $x_2 = 2{,}43$.

6.51.

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
y	0,742	0,789	0,835	0,880	0,924	0,967	1,008	1,046

$x_1 = 0{,}83$, $x_2 = 0{,}97$.

6.52.

x	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
y	1,2322	1,2097	1,1789	1,1389	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1 = 1{,}74$, $x_2 = 1{,}97$.

6.53.

x	2,70	2,75	2,80	2,85	2,90	2,95	3,00	3,05
y	1,5827	1,4865	1,3721	1,2383	1,0838	0,9071	0,7069	0,4817

$x_1 = 2{,}72$, $x_2 = 2{,}93$.

6.54.

x	10	15	20	25	30	35	40	45
y	0,985	0,966	0,940	0,906	0,866	0,819	0,766	0,707

$x_1 = 23$, $x_2 = 41$.

6.55.

x	1,1	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6
y	1,029	1,389	1,649	1,800	1,852	1,822	1,739	1,632

$x_1 = 1{,}3$ $x_2 = 4{,}0$.

6.56.

x	0,13	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48
y	0,1296	0,1790	0,2280	0,2764	0,3242	0,3712	0,4173	0,4626

$x_1 = 0{,}20$, $x_2 = 0{,}41$.

6.57.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
y	0,1198	0,0897	0,0660	0,0477	0,0339	0,0236	0,0162	0,0109

$x_1 = 1{,}25$, $x_2 = 1{,}76$.

6.58.

x	50	55	60	65	70	75	80	85
y	0,285	0,319	0,223	0,042	—0,148	—0,273	—0,283	—0,178

$x_1 = 58$, $x_2 = 79$.

6.59. Calcúlese el valor del *seno integral* $\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ para $x = 0{,}26$ y $x = 0{,}45$, haciendo uso de la tabla de sus valores:

x	0,17	0,22	0,27	0,32	0,37	0,42	0,47	0,52
$\mathrm{Si}\,(x)$	0,16973	0,21941	0,26891	0,31819	0,36720	0,41591	0,46427	0,51225

6.60. Calcúlense los valores de la *integral de probabilidades* $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ para $x = 0{,}27$ y $x = 0{,}58$, haciendo uso de la tabla de sus valores:

x	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75
$\Phi(x)$	0,05637	0,16800	0,27633	0,37938	0,47548	0,56332	0,64203	0,71116

6.61. Empleando la interpolación, resuélvase la ecuación

$$x \cdot \ln x - 1 = 0.$$

◀ En un segmento de aislación de la raíz $I = [1{,}6,\ 1{,}9]$ para la función $y = x \ln x - 1$ tenemos:

x	1,6	1,7	1,8	1,9
y	—0,2479952	—0,0979324	0,0580148	0,2195226

La función $y = x \ln x - 1$ crece en el segmento I, puesto que $y' = \ln x + 1 > 0$ para $x \in I$. Por consiguiente, existe una función inversa $x = \varphi(y)$, para la cual, considerando ahora y como argumento y x, como valor de la función, construimos el polinomio de interpolación $x_3(y)$. Este procedimiento lleva el nombre de *interpolación in-*

versa. Reuniendo en la tabla los resultados de los cálculos obtenemos:

h	y	x	$\Delta x\,(y_h,\ y_{h+1})$	$\Delta x\,(y_h,\ y_{h+1},\ y_{h+2})$	$\Delta x\,(y_h,\ y_{h+2},\ y_{h+3})$
0	—0,2479952	1,6			
1	—0,0979324	1,7	0,6663876	—0,0821705	
2	0,0580148	1,8	0,6412426	—0,0695452	0,0270049
3	0,2195226	1,9	0,6191651		

De aquí el polinomio buscado tiene la forma

$$x_3(y) = 1{,}6 + 0{,}6663876\,(y + 0{,}2479952) - \\ - 0{,}0821705\,(y + 0{,}2479952)(y + 0{,}0979324) + \\ + 0{,}0270049\,(y + 0{,}2479952)(y + 0{,}0979324)(y - 0{,}0580148).$$

Para hallar la raíz, se debe poner $y = 0$. Obtenemos

$$x_3(0) = 1{,}6 + 0{,}1652609 - 0{,}0019956 - 0{,}000038 = 1{,}7632273.$$

Por consiguiente, la raíz es igual a $1{,}76323 \pm 0{,}00004$, donde el error absoluto límite se supone igual a la magnitud absoluta del último sumando en la expresión para $x_3(0)$. ▶

6.62. Haciendo uso de la tabla para los valores de la función $y = f(x)$, hállese el valor x_0, para el cual $f(x_0) = 0{,}569$:

x	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85
y	—1,125	—0,926	—0,704	—0,458	—0,187	0,109	0,432	0,782

6.63. Haciendo uso de la tabla para los valores de la función $y = f(x)$, hállese el valor x_0, para el cual $f(x_0) = 4{,}498$:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	2,431	2,928	3,497	4,144	4,875	5,696

6.64. Haciendo uso de la tabla resuélvase, por el método de la interpolación inversa, la ecuación $\operatorname{sh} x = 4{,}9370$:

x	2	2,2	2,4	2,6
y	3,6269	4,4571	5,4662	6,6947

6.65. Haciendo uso de la tabla, resuélvase por el método de la interpolación inversa la ecuación tg $x = 1{,}767$:

x	60°	61°	62°
y	1,732	1,804	1,881

Fórmense en FORTRAN los subprogramas siguientes:

6.66. El subprograma de cálculo de las diferencias partidas $\Delta y\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\Delta y\,(x_1) = y\,(x_1)$. Los parámetros: X, Y, N, donde N es el número de elementos de las tablas X e Y que contienen los valores del argumento y los de la función, respectivamente. El resultado de los cálculos se contiene en la tabla Y.

6.67. * El subprograma de cálculo de las diferencias finitas $\Delta^k_{y_i}$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Y y N son los parámetros (Y es una tabla que contiene N elementos) de los valores de la función a la entrada y las diferencias finitas, a la salida del subprograma.

6.68*. La función-subprograma de cálculo de los valores del polinomio de interpolación para una función dada por medio de una tabla. Los parámetros: X, Y, N, KEY, ARG, donde X es la tabla de valores del argumento, Y es la tabla de valores de la función, si KEY = 0, y la tabla de diferencias partidas, si KEY $\neq$ 0, N es la dimensión de las tablas X e Y, ARG es el valor del argumento del polinomio.

6.69. El subprograma de cálculo de los valores del polinomio de interpolación de una función dada por medio de una tabla. Los parámetros: X, Y, N, KEY, ARG, P, EPS, donde X es la tabla de valores del argumento, Y es la tabla de valores de la función, si KEY = 0, y la tabla de diferencias partidas, si KEY $\neq$ 0, N es la dimensión de las tablas X e Y, ARG es el valor del argumento del polinomio, P es el valor del polinomio, EPS es el módulo del último sumando que figura en el polinomio de interpolación.

6.70. La función-subprograma de cálculo de los valores del polinomio de interpolación de una función dada por medio de una tabla, siendo equidistantes los nudos de interpolación. Los parámetros: X, H, Y, N, KEY, ARG, donde X es el nudo de interpolación inicial, H es el paso, Y es la tabla de valores de la función, si KEY = 0, y la tabla de las diferencias finitas de coeficientes correspondientes, si KEY $\neq$ $\neq$ 0, N es la magnitud de la tabla, ARG es el valor del argumento del polinomio.

6.71. Haciendo uso de la función-subprograma obtenida en el problema 6.70, resuélvase con ayuda de una computadora electrónica uno de los problemas del 6.49 al 6.60.

6.72. Utilizando la función-subprograma obtenida en el problema 6.68, resuélvase con ayuda de una computadora electrónica uno de los problemas del 6.61 al 6.65.

6.73. Haciendo uso del subprograma obtenido en el problema 6.69, resuélvase con ayuda de una computadora electrónica uno de los problemas del 6.62 al 6.63.

3. Diferenciación numérica. Las fórmulas para la diferenciación numérica se obtienen como resultado de la derivación de las fórmulas de interpolación:

$$f'(x) \approx p_n'(x) = \Delta y(x_0, x_1) + ((x - x_0) + (x - x_1)) \times$$
$$\times \Delta y(x_0, x_1, x_2) + ((x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) +$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)) \Delta y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots,$$

con la particularidad de que el error de la igualdad aproximada $f'(x) = p_n'(x)$ es igual a la derivada del error $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

En el caso de los nudos equidistantes $x_k = x_{k-1} + h$ ($k = 1, \ldots, n$), $x_k \in [a, b]$ y $f(x_k) = y_k$ son válidas las relaciones

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right). \qquad (5)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2-18t+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right), \qquad (6)$$

donde $t = \frac{1}{h}(x - x_0)$. Las fórmulas (5) y (6) tienen cada una n y $n - 1$ sumandos, respectivamente.

EJEMPLO 5. Un punto material M se mueve rectilíneamente. La ley de movimiento $s = f(\tau)$ está representada por medio de una tabla (τ es el tiempo en segundos, s es el camino en metros):

τ	0	1	2	3	4	5	6
s	0	2	10	30	68	130	222

Hállese la velocidad v y la aceleración w del punto M en el instante de tiempo $\tau = 3{,}5$.

◀ Formemos la tabla de diferencias finitas de la función $s = f(\tau)$

τ	s	Δs	$\Delta^2 s$	$\Delta^3 s$	$\Delta^4 s$
0	0				
		2	6		
1	2			6	
		8	12		0
2	10			6	
		20	18		0
3	30			6	
		38			0
4	68		24	6	
		62			
5	130		30		
		92			
6	222				

Considerando $\tau = 3$ como el instante de tiempo inicial, más próximo a $\tau = 3{,}5$, tendremos $t = \frac{3{,}5 - 3}{1} = 0{,}5$. Aplicando las fórmulas (5) y (6), obtenemos:

$$v = f'(3{,}5) = \frac{1}{1}\left(38 + \frac{2 \cdot 0{,}5 - 1}{2}\,24 + \frac{3 \cdot (0{,}5)^2 - 6 \cdot 0{,}5 + 2}{6} \cdot 6\right) =$$

$$= 37{,}75 \text{ m/s}.$$

$$w = f''(3{,}5) = \frac{1}{1^2}\left(24 + (0{,}5 - 1) \cdot 6 + \frac{6 \cdot (0{,}5)^2 - 18 \cdot 0{,}5 + 11}{12} \cdot 0\right) =$$

$$= 21 \text{ m/s}^2. \blacktriangleright$$

La función $f(x)$ viene dada por la tabla. Calcúlense los valores de la derivada $f'(x)$ en los puntos indicados x_1 y x_2:

6.74.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f(x)$	1,44013	1,54722	1,67392	1,81973	1,98070	2,18547	2,40978	2,66557

$x_1 = 2{,}03$, $x_2 = 2{,}22$.

6.75.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$f(x)$	1,0083	1,1134	1,2208	1,3310	1,4449	1,5634	1,6876	1,8186

$x_1 = 1{,}14$, $x_2 = 1{,}42$.

6.76.

x	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$f(x)$	3,92847	4,41016	4,93838	5,51744	6,15213	6,84782	7,61045	8,44671

$x_1 = 3,02$, $x_2 = 3,31$.

6.77.

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
$f(x)$	0,2803	0,3186	0,3592	0,4021	0,4472	0,4945	0,5438	0, 5952

$x_1 = 0,82$, $x_2 = 1,03$

6.78.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x)$	0,8802	0,9103	0,9340	0,9523	0,9661	0,9764	0,9838	0,9891

$x_1 = 1,34$, $x_2 = 1,65$.

Calcúlense los valores de $f'(x)$ y $f''(x)$ en el punto que se indica:

6.79.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	5	21	55	113	201

$x = 2$.

6.80.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	19	85	261	631

$x = 2,5$.

Fórmense en FORTRAN las siguientes funciones-subprogramas:

6.81*. La función-subprograma de cálculo de los valores de la primera derivada del polinomio $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t-k)$. Los parámetros son: N, T.

6.82*. La función-subprograma de cálculo de los valores de la segunda derivada del polinomio $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t-k)$. Los parámetros son: N, T.

6.83. La función-subprograma de cálculo de los valores de la primera derivada del polinomio de interpolación

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!} \Delta^k y_0, \quad t = \frac{x-x_0}{h}.$$

Los parámetros: X, H, Y, N, KEY, ARG, donde X es el nudo de interpolación inicial, Y es la tabla de valores de la función para KEY = 0 y la tabla que contiene las magnitudes y_0, $\frac{1}{k!}\Delta^k y_0$ $(k = 1, \ldots, n)$ para KEY $\neq 0$, ARG es el valor del argumento, para el cual se calcula la derivada, N es $n + 1$.

6.84. La función-subprograma de cálculo de los valores de la segunda derivada del polinomio de interpolación $p_n(x)$. Los parámetros son los mismos que en el problema 6.83.

6.85. Haciendo uso de la función-subprograma formada en el problema 6.83, escríbase en FORTRAN el programa de resolución de uno de los problemas del 6.74 al 6.78.

6.86. Haciendo uso de las funciones-subprogramas formadas durante la resolución de los problemas 6.83 y 6.84, escríbanse en FORTRAN el programa de resolución de uno de los problemas 6.79, 6.80.

RESPUESTAS

1.1. 0,331. 1.2. 0,5. 1.3. -1. 1.5. $(\Delta x)^2 - 2\Delta x$. 1.6. $e(e^{\Delta x} - 1)$. 1.7. $\log_2(1 + \Delta x)$. 1.9. $-\frac{2}{x^3}$. 1.10. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 1.11. $2^x \ln 2$. 1.12. $\frac{1}{x} \times$ $\times \log_2 e$. 1.14. ● Utilícese la identidad: $xf(x_0) - x_0 f(x) = (xf(x_0) - x_0 f(x_0)) - (x_0 f(x) - x_0 f(x_0))$. 1.15. $f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = f'_-(1) = 0$, $f'_+(1) = 2$. 1.17. $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$.

1.18. $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. **1.19.** $f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = 0$.

1.20. ● La función $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no tiene límite para $x \to 0$.

1.21. $-2 + \frac{8}{3}x^3$. **1.22.** $-\frac{25x^4}{a^2}$ **1.23.** $\frac{\sqrt{x}\,(19x^5 + 9a)}{6\sqrt[3]{(x^5 + a)^2}}$.

1.24. $-\frac{3}{5}a\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}} + \frac{2}{3b\sqrt[3]{x}}$. **1.25.** $\frac{bc - ad}{(c + dx)^2}$. **1.26.** $\frac{1 - 4x}{x^2(2x-1)^2}$.

1.27. $\frac{2}{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})^2}$. **1.28.** $-\frac{2x}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^4}}$. **1.29.** $\frac{2\cos^3 x - 3}{\cos^2 x}$.

1.30. $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$. **1.31.** $-\frac{1}{(x^2 + 4)\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$.

1.32. $\frac{x^2 - 1}{3x^2 \cos^2\left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(1 + \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2}}$.

1.33. $-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} \cdot \operatorname{sen}\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right)$. **1.34.** $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}}$.

1.35. $\frac{1}{2(1 + x^2)}$. **1.36.** $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$. **1.37.** $\frac{e^{x/2}}{2\sqrt{x}} \times$

$\times (1 + x)$. **1.38.** $-e^{-x^2}\frac{1 + 2x^2}{2x^2}$. **1.39.** $2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\ln 2$.

1.40. $2^{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$. **1.41.** $3^{2^x} \cdot 2^x \ln 3 \cdot \ln 2$.

1.42. $\frac{1}{x}\lg\left(\frac{x^2}{10}\right)$. **1.43.** $\frac{1}{x^{\ln 2 \cdot \ln 2x}}$.

1.44. $\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2 + bx + c)}}(2ax + b)}{2\sqrt{\ln(ax^2 + bx + c)}(ax^2 + bx + c)}$.

1.45. $\frac{x}{(2 + x^2)\sqrt{1 + x^2}\operatorname{arctg}\sqrt{1 + x^2}}$. **1.46.** $\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

1.47. $\operatorname{ch} x$. **1.48.** $\operatorname{sh} x$. **1.49.** $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. **1.50.** $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

1.51. $\frac{(x - 3)(19x - 17)}{(x + 1)^4}$. **1.52.** $\frac{10 - 2x - 2x^2}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x + 2)^2(x - 1)}}$.

1.53. $-\frac{2x^2 + 9x + 1}{2\sqrt{x + 2}\sqrt[3]{(x - 1)^5(2x + 1)^4}}$.

1.54. $\frac{11x^5 - 7x^4 - 58x^3 + 48x^2}{4\sqrt{x - 1}\sqrt{(x + 2)^3}\sqrt[4]{(x - 2)^5}}$. **1.55.** $x^x(\ln x - 1)$.

1.56. $x^{2^x} \cdot 2^x\left(\frac{1}{x} + \ln x \cdot \ln 2\right)$. **1.57.** $(\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}\frac{3 + \ln x}{6\sqrt[3]{x^2}}$.

1.58. $(\ln x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x \cdot \ln \ln x}{x^2 \ln x}$. 1.59. $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arcsen} x} \left(\frac{\ln \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \right.$ $\left. + \operatorname{arcsen} x \cdot \operatorname{ctg} x \right)$. 1.60. $x^{x^x} \cdot x^{x-1} (1 + x \ln x (\ln x - 1))$. 1.61. $\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \times$ $\times \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$. 1.62. $x^{x^2+1} (1 + \ln x^2) + x^{2x} \cdot 2^x \times$ $\times \left(\frac{1}{x} + \ln 2 \cdot \ln x \right) + 2^{x^x} \ln 2 \cdot x^x (\ln x + 1)$, $x > 0$. ● Hállese la derivada de cada uno de los sumandos. 1.63. $-\operatorname{sen} 2x \times$ $\times \frac{1 + 2\sqrt{1+\cos^2 x}}{2\sqrt{1+\cos^2 x}\,(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^2 x})}$. ● A título de derivada intermedia se toma $u = \cos^2 x$, y, a continuación, se hace uso de la regla de derivación de una función compuesta. 1.64. $-\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \times$ $\times (2 \ln \arccos x + 1)$. 1.65. $-2xe^{-x^2} \frac{\operatorname{arcsen} e^{-x^2} + e^{-x^2}(1-e^{-2x^2})^{1/2}}{(1-e^{-2x^2})^{3/2}}$. 1.66. $-\frac{a^{-x} \ln a}{(1+a^{-2x})^2} (4a^{-x} \operatorname{arctg} a^{-x} + a^{-2x} - 1)$. 1.67. $a = 2$, $b = 0$. ● Las condiciones de continuidad $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} f(x)$ y las de derivabilidad $f'_-(0) = f'_+(0)$ constituyen en total un sistema de dos ecuaciones respecto de a y b. 1.68. $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. 1.69. $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2\,(1-x^3)^2}}$. 1.70. $\frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

1.71. $\frac{1}{m+n} \left(n \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{m}{m+n}} - m \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{n}{m+n}} \right)$. 1.72. $-\operatorname{sen} \times$ $\times 2x \cos(\cos 2x)$. 1.73. $\frac{m \operatorname{sen} mx}{\cos^{n+1} mx} = \frac{m \operatorname{tg} mx}{\cos^n mx}$. 1.74. $\left(\frac{a}{b} \right)^x \times$ $\times \left(\frac{b}{x} \right)^a \left(\frac{a}{x} \right)^b \left(\frac{b-a}{x} + \ln \frac{a}{b} \right)$, $x > 0$. 1.75. $\frac{n}{x \ln mx}$. 1.76. $\frac{1}{3x^2-2}$, $|x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$. 1.77. $2\pi \log_2 e \operatorname{ctg} \left(2\pi x + \frac{\pi}{2} \right)$.

1.78. $\frac{2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^4 x}$. 1.79. $-\frac{1}{x \ln^2 x}$. 1.80. $(\operatorname{sen} x)^{\cos x} \times$ $\times (\operatorname{ctg} x \cos x - \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x)$. 1.81. $\frac{1}{2} (\sqrt{x})^{\operatorname{sen} x} \left(\operatorname{sen} 2x \ln x + \right.$ $\left. + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \right)$. 1.82. $-\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}} a^{\sqrt{\cos x}} (1 + \sqrt{\cos x} \ln a)$.

1.83. $\operatorname{th}^3 x\left(1+\frac{1}{2\operatorname{sh} x}\right)$. **1.84.** $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. **1.85.** $e^{-x}(a\operatorname{ch} ax-\operatorname{sh} ax)$.

1.86. $\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$. **1.88.** $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **1.89.** $\cos(x-\pi k)$, si $x\in$ $\in(\pi k,\ \pi(k+1))$, si en cambio, $x=\pi k$, entonces $y'_-(\pi k)=-1$, $y'_+(\pi k)=1$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.90.** $\frac{1}{1+x^2}$, $x>0$; $-\frac{1}{1+x^2}$, $x<0$; $y'_-\times$ $\times(0)=-1$, $y'_+(0)=+1$. **1.92.** -1, $x\leqslant 0$; $-e^{-x}$, $x>0$. **1.93.** 1, $x\leqslant 0$; $\frac{1}{1+x}$, $x>0$. **1.94.** 0, $|x|\geqslant 1$; $2xe^{-x^2}(1-x^2)$, $|x|<1$. **1.95** $\frac{2x^4+4x^3-36x^2+54}{3(1-x)^2(9-x^2)}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$.

1.96. $y\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$. **1.97.** $a^{x^a}\cdot x^{a-1}\cdot a\ln a$. **1.98.** $(\log_x a)^x\left(-\frac{1}{\ln x}-\right.$ $\left.-\ln\log_a x\right)$. **1.99.** $\cos x\cos(\operatorname{sen} x)\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$. **1.100.** $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\frac{\ln x-1}{x^2}$. **1.101.** $-\frac{\operatorname{sen} x}{3^x}(1+\ln^2 3)$.

1.102. $\frac{a\cos ax\cos bx+b\operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx}{\cos^2 bx}\left(3^{\frac{\operatorname{sen} ax}{\cos bx}}\ln 3+\frac{\operatorname{sen}^2 ax}{\cos^2 bx}\right)$

1.105. $\varphi(x_0)$. ● Hágase uso de la definición de la derivada. **1.106.** $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$. **1.107.** $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$.

1.108. $\psi(x)^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln\psi(x)+\frac{\varphi(x)\psi'(x)}{\psi(x)}\right)$. **1.110.** $\frac{f'(\ln x)}{x}$.

1.111. $\frac{f'(x)}{f(x)}$. **1.113.** $f'(f(x))f'(x)$. **1.114.** $\frac{4}{3}$. **1.115.** $-\frac{1}{e}$.

1.116. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **1.117.** $\frac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}$. **1.118.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$

1.119. $\frac{1}{2(1+\ln y)}$. **1.120.** $\frac{e^x\operatorname{sen} y+e^y\operatorname{sen} x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$. **1.121.** $-\frac{y}{x}$.

1.122. $\frac{2^x(2y-1)}{2^y(1-2^x)}=-2^{y-x}$. **1.123.** $\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$.

1.124. $\frac{x+y}{x-y}$. **1.125.** $\frac{y}{x}\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. **1.126.** $\frac{y}{x}\cdot\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$.

1.127. $\frac{y}{x}$. **1.130.** $\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. ● La función $y=\operatorname{ch} x$, $x\in(-\infty,$ $+\infty)$, no tiene inversa, por lo cual se deben analizar dos intervalos $(-\infty,\ 0)$ y $(0,\ +\infty)$, en cada uno de los cuales la función

dada es monótona y, por consiguiente, tiene inversa. **1.131.** $\log_2 e \times$ $\times \operatorname{ctg} x$. **1.132.** $\frac{1}{\sqrt{1+8x}}$. **1.134.** $\frac{t}{1+e^{\alpha(x)}}$. **1.135.** $\frac{2}{1+6\alpha^2(x)}$. **1.136.** $\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\log_2 e}$. **1.137.** $\frac{1}{1+\ln \alpha(x)}$. **1.138.** $3t-\frac{5}{2}$. **1.139.** $\frac{1}{3t}$. **1.140.** $-\frac{2t}{t+1}$. **1.141.** -2^{3t+1}. **1.142.** $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. **1.143.** $2\cos^2 t\cdot(\cos 2t-2\operatorname{sen} 2t)$. **1.144.** 1. **1.145.** $\frac{t}{2}$. **1.146.** $\frac{2}{3}\ln \times$ $\times 2\operatorname{ctg} 2t$. **1.147.** $-\frac{\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{1-4t^2}}$. **1.148.** $\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^3}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$. **1.149.** $\frac{b}{a}\operatorname{th} t$. **1.150.** 1. **1.151.** -1. **1.152.** $2+\sqrt{3}$. **1.153.** $-\frac{4}{3}$. **1.154.** $-2\cos 2x$. **1.155.** $\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$. **1.156.** $-\frac{2}{3\ln 2}\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. **1.157.** $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **1.158.** $\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{5/2}}$. **1.159.** $x^{\sqrt{x}-1}(2+\ln x)\left(\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}(2+\ln x)}\right)$. ● Hágase uso de la derivada logarítmica. **1.160.** $y'(0)=3$, $y''(0)=12$, $y'''(0)=9$. **1.161.** 2. **1.162.** 6. **1.163.** $y(0)=1$, $y'(0)=$ $=\ln 2$, $y''(0)=\ln^2 2-1$. **1.164.** $y'=-\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $y''=\frac{6}{x^4}f'\times$ $\times\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{4}{x^6}f''\left(\frac{1}{x^2}\right)$. **1.165.** $y'=\frac{e^x f'(e^x)}{f(e^x)}$, $y''=e^{2x}\left(\frac{f'(e^x)}{e^x f(e^x)}+\right.$ $\left.+\frac{f''(e^x)}{f(e^x)}-\frac{f'^2(e^x)}{f^2(e^x)}\right)$. **1.167.** $y'=\frac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $y''=\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$. **1.168.** $y'=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}$, $y''=\frac{uu''-u'^2}{u^2}-\frac{vv''-v'^2}{v^2}$. **1.169.** $\frac{m!}{(m-n)!}\cdot x^{m-n}$, si $n\leqslant m$; 0, si $n>m$. **1.170.** $(k\ln a)^n a^{kx}$. **1.171.** $\operatorname{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. ● $y'=$ $=\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y''=\left(\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=$ $=\operatorname{sen}(x+\pi)$, etc. **1.172.** $(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$. **1.173.** $2^{n-1}\cos\times$ $\times\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. ● Hágase uso de la fórmula $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. **1.174.** $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$. **1.176.** $\frac{(x-1)^{50}-(x-2)^{50}}{(x^2-3x+2)^{51}}$.

1.177. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 37\,(79-x)}{2^{20}\,(1-x)^{20}\sqrt{1-x}}$. ● Hágase uso de la igualdad $1+x=2-(1-x)$. **1.178.** $\cos x\,(209-x-x^2)-15\operatorname{sen} x\,(2x+1)$. **1.179.** $e^x\,(x^2+39x+360)$. **1.180.** $4\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)e^{-x}$. **1.181.** $\dfrac{81\log_2 e}{x^9}$. **1.182.** $x\operatorname{sh} x+100\operatorname{ch} x$. **1.183.** ● Realícese la demostración por el método de la inducción matemática **1.186.** $-\dfrac{24c^3\,(ad-bc)}{d^5}$. **1.187.** -48. **1.193.** $-\dfrac{p^2}{y^3}$. **1.194.** $e^{2y}\dfrac{2-xe^y}{(1-xe^y)^3}$. **1.195.** $-\dfrac{2\,(1+y^2)}{y^5}$. **1.196.** $\dfrac{y\,((1+y)^2+(x-1)^2)}{x^2\,(1+y)^3}$. **1.197.** $-\dfrac{f''_{xx}}{(f'_x)^3}$. **1.200.** $-\operatorname{ctg}^3 t$ o bien $\dfrac{1}{(x^2-1)^{3/2}}$, $x\in(1,+\infty)$. **1.201.** $-\dfrac{2}{1-t^2}$ o bien $-2\sec^2 x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. **1.202.** $2\,(1+t^2)$ o bien $2\sec^2 x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. **1.203.** $\dfrac{1}{3a\cos^1 t\operatorname{sen} t}$ o bien $\dfrac{a^{2/3}}{3x^{1/3}\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}}$, $x\in(0,\ a)$. **1.205.** $7x+y-3=0$, $x-7t+71=0$. **1.206.** $y-5=0$, $x+2=0$. **1.207.** $x-4y+4=0$, $4x+y-18=0$. **1.208.** $y-2x=0$, $2y+x=0$. **1.209.** $x-y-1=0$, $x+y-1=0$. **1.210.** $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$. **1.211.** $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. **1.212.** $y=0$, $(\pi+4)\,x+(\pi-4)\,y-\pi^2\sqrt{2}/4=0$. **1.213.** $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$. **1.214.** $x+y-2=0$. **1.215.** $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{e}$. **1.216.** $M_0\,(1/8,\ -1/16)$. **1.217.** $y=x^2-x+1$. **1.219.** $2x-y-1=0$. **1.220.** $4x-4y-21=0$. **1.221.** 3,75. **1.224.** En el punto $M_1\,(0,0)$ el ángulo es igual a 0 (las tangentes se tocan) y en el punto $M_2\,(1,\ 1)$ el ángulo $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$. **1.225.** $\operatorname{arctg}\dfrac{8}{15}$. **1.226.** $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. **1.227.** $\pi/4$ y $\pi/2$. **1.230.** $2/\sqrt{5}$. **1.232.** ◀ Si la curva viene dada por la ecuación $r=r(\varphi)$, entonces las coordenadas cartesianas de los puntos M de dicha curva se dan en función del ángulo φ por las expresiones

$$x=r(\varphi)\cos\varphi,\quad y=r(\varphi)\operatorname{sen}\varphi.$$

De aquí $\overline{OM}=r(\varphi)\cos\varphi\cdot i+r\varphi)\operatorname{sen}\varphi\cdot j$, es decir, el vector $\rho\,(1,\ \operatorname{tg}\varphi)$ es colineal con el $\overline{OM}$. El vector $\tau\,(1,\ y'_x)$ es un vector director de la tangente TT', y como

$$y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{r'\operatorname{sen}\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\operatorname{sen}\varphi}=\frac{r+r'\operatorname{tg}\varphi}{r'-r\operatorname{tg}\varphi}$$

el vector $e\,(r' - r\operatorname{tg}\varphi,\ r + r'\operatorname{tg}\varphi)$ será colineal con τ. Por consiguiente,

$$\cos\theta = \frac{(\rho,\ e)}{|\rho|\cdot|e|} = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + (r')^2}},$$

de donde $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \dfrac{r}{r'}$. ▶ **1.233.** $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{k}$.

1.234. $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2\varphi$. **1.235.** a) $t_1 = 0$, $t_2 = 8$; b) $t \in (0, 4) \cup (8, +\infty)$; c) $t_1 = \dfrac{4}{3}(3 + \sqrt{3})$, $t_2 = \dfrac{4}{3}(3 - \sqrt{3})$. **1.236.** $-a\omega \operatorname{sen}\omega t$ **1.237.** 242. **1.238.** $\dfrac{7}{18}\pi$. **1.239.** $a\omega e^{a\varphi}$. **1.240.** $v_x = -2a\omega \operatorname{sen} 2\varphi$, $v_y = -2a\omega\cos 2\varphi$. **1.241.** En los puntos (3, 16/3) y (−3, −16/3). **1.242.** $4\pi r^2 v$ y $8\pi r v$. **1.243.** 2π radianes/seg.

2.2. $(\Delta y)_1 = 1{,}261$, $(dy)_1 = 1{,}2$, $(\Delta y)_2 = 0{,}120601$, $(dy)_2 = 0{,}12$. **2.3.** $\Delta s = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$, $ds = 2x\,\Delta x$. **2.4.** $ds = f'(t_1)\,\Delta t$ es el camino recorrido por el punto M durante el intervalo de tiempo Δt, con un movimiento uniforme a la velocidad $f'(t_1)$. **2.5.** $ds = 0{,}1$, $\Delta s = 0{,}08$. **2.6.** a) 0; b) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$. **2.7.** Las igualdades a) y c) no son posibles; la igualdad b) es posible, si la función es lineal (véase el problema 2.1). **2.8.** 2 cm. **2.9.** 3 cm. **2.10.** $2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

2.11. $x \operatorname{sen} x\,dx$. **2.12.** $\operatorname{arctg} x\,dx$. **2.13.** $\ln x\,dx$. **2.14.** $\operatorname{arcsen} x\,dx$. **2.15.** $\dfrac{2x\,dx}{1+5y^2}$. **2.16.** $\dfrac{x+y}{x-y}dx$. **2.17.** $\dfrac{dx}{e^y - 1}$. **2.18.** a) 0,05; b) 0,805; c) 0,2. **2.19.** 2,93. **2.20.** 1,2. **2.21.** $\Delta V \approx 2\pi r h\,\Delta r$. ● Como h es constante, la función v será la función de un solo argumento r: $v = \pi h r^2$. **2.22.** $\Delta V \approx -\dfrac{RT}{p^2}\Delta p$. ● Siendo T constante, el volumen V será la función de un solo argumento p: $V = RT\dfrac{1}{p}$.

2.23. $-ab^2(\operatorname{sen}(bx+c)\,dx^2 = -b^2 y\,dx^2$. **2.24.** $3^{-x^2}\ln 9\,(2x^2\ln 3 - 1)\,dx^2$. **2.25.** $\dfrac{(2-x^2)\operatorname{sen} x - 2x\cos x}{x^3}dx^2$. **2.26.** $2a\,dx^2$.

2.27. $\dfrac{2\,dx^2}{(x+2y)^3}$. **2.28.** $-\dfrac{R^2\,dx^2}{(y-b)^3}$. **2.29.** $6\dfrac{x(1+3y^2)\,dx^2}{(1-3y^2)^3}$.

2.30. $\dfrac{(x-y)\,dx^2}{(1-a\cos y)^3}$.

3.1. $f(x)$ es discontinua para $x = 0 \in [-1, 1]$. **3.2.** 0. **3.4.** ● Realícese la demostración por reducción al absurdo, habiendo previamente establecido que la derivada del primer miembro de la ecuación tiene una única raíz real $x = 1$. **3.5.** ● Realícese la demostración por reducción al absurdo, habiendo previamente establecido que la derivada del

primer miembro de la ecuación no tiene raíces reales. 3.6. ● $F(b) = F(a)$. 3.7. $\xi = 1/\sqrt{3}$. 3.11. ● Hágase uso del resultado del problema 3.8. 3.13. $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = 5/3$. 3.14. 2/3. 3.15. $\frac{2}{3\sqrt[3]{5}}$. 3.16. a^2/b^2. 3.17. 2. 3.18. 2/3. 3.19. $-1/2$. 3.20. 2. 3.21. 9/50. 3.22. 1/2. 3.23. 1/2. 3.24. 0. 3.25. 1/2. 3.26. $-\infty$. 3.27. cos 3. 3.28. -2. 3.29. 0. 3.30. $+\infty$. 3.31. $1/\pi$. 3.32. a. 3.33. 0. 3.34. -1. 3.35. 0. 3.36. 1/12. 3.37. -1. 3.38. 2/3. 3.39. 1. 3.40. 1. 3.41. 1. 3.42. e. 3.43. 1. 3.44. 2. 3.45. $1/e$. 3.46. 1. 3.47. $1/e$. 3.48. 1. 3.49. e^{-6}. 3.50. e^2. 3.51. $-9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3$. 3.52. $7 + 11(x-1) + 10(x-1)^2 + 4(1+\theta(x-1))(x-1)^3$; a) $\theta = 1/4$; b) θ es un número real cualquiera; c) $\theta = 1/4$. 3.53. $P(-1) = 143$, $P'(0) = -60$, $P''(1) = 26$.

3.54. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. 3.55. $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!} + \frac{\operatorname{sen}\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n es impar; $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\operatorname{sen}\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n es par. 3.56. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cos\frac{\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n es impar! $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!} + \frac{\cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n es par. 3.57. $x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $x > -1$. 3.58. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$, n es impar; $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_{n+1}(x)$, n es par. ● El término residual se escribirá en la forma general. 3.59. $1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} \times x^{n+1}$, $x > -1$. 3.60. $2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(1+\theta(x-2))^5}$. 3.61. $x + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1+2\operatorname{sen}^3\theta x}{\cos^4\theta x}$. 3.62. $x + \frac{x^3}{6} +$

$+\frac{x^4}{4!}\frac{90x+60^3x^3}{(1-0^2x^2)^{7/2}}$. 3.63. $1-\frac{(x-1)}{2}+\frac{3}{8}(x-1)^2-\frac{5}{16}(x-1)^3+$

$+\frac{35}{128}\frac{(x-1)^4}{(1+0(x-1))^{9/2}}$. 3.64. a) 0,842; b) 1.648; c) 0,049, d) 2,042.

3.65. El error: a) $\frac{1}{16}\frac{x^3}{(1+0x)^{5/2}}$; b) $\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+0x)^{8/3}}$. 3.67. a) 1;

b) 1/2; c) 1/2.

4.1. ● Hágase uso del desarrollo de la función según la fórmula de Taylor en el entorno del punto x_0 hasta un miembro de orden k inclusive. 4.2. $f(x_0)=0$ es el mínimo, si $\varphi(x_0)>0$ y n es par; $f(x_0)=0$ es el máximo, si $\varphi(x_0)<0$ y n es par; no hay extremo, si n es impar. 4.3. ● Hágase uso de la primera condición suficiente de extremo. 4.4. En $(-1, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, 1)$ va decreciendo, en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ va creciendo; $y_{\text{mín}}=y(-1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2}$, $y_{\text{máx}}=(=y(1/\sqrt{2})=1/2$. 4.5. En $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ va creciendo, en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ va decreciendo; $y_{\text{máx}}=y(-1)=y(1)=1$. 4.6. En $(0, 1) \cup (1, e)$ va decreciendo, en $(e, +\infty)$ va creciendo; $y_{\text{mín}}=y(e)=e$.

4.7. En $\left(\frac{\pi}{3}(6k-1), \frac{\pi}{3}(6k+1)\right)$ decrece en $\left(\frac{\pi}{3}(6k+\right.$ $\left.+1), \frac{\pi}{3}(6k+5)\right)$ crece; $y_{\text{mín}}=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi+\left(\frac{\pi}{3}-\right.$ $\left.-\sqrt{3}\right)\approx 2k\pi-0{,}685$, $y_{\text{máx}}=y\left(2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=2(k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\right.$ $\left.-\sqrt{3}\right)\approx(2k+1)\pi+0{,}685$, $k\in\mathbb{Z}$. 4.8. En $(0, 2)$ decrece, en $(2, +\infty)$ crece; $y_{\text{mín}}=y(2)=2(1-\ln 2)\approx 0{,}61$. 4.9. Va creciendo en todo el dominio de definición. 4.10. En $\left(\frac{\pi}{4}(8k-3), \frac{\pi}{4}\times\right.$ $\left.\times(8k+1)\right)$ crece, en $\left(\frac{\pi}{4}(8k+1), \frac{\pi}{4}(8k+5)\right.$ decrece, $y_{\text{máx}}=$ $=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{2k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 1{,}55e^{2k\pi}$, $y_{\text{mín}}=y\left(2k\pi+\right.$ $\left.+\frac{5\pi}{4}\right)=-e^{2k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx -1{,}55e^{2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$. 4.11. En $(0, 1/e)$ decrece, en $(1/e, +\infty)$ crece; $y_{\text{mín}}=y(1/e)=(1/e)^{\frac{1}{e}}\approx 0{,}69$.

4.12. En $(-\infty, 0)$ decrece, en $(0, +\infty)$ crece; $y_{\text{mín}}=y(0)=2$. 4.13. $M=3$, $m=-24$. 4.14. $M=8$, $m=0$. 4.15. $M=0{,}6$, $m=-1$. 4.16. $M=1$, $m=0{,}6$. 4.17. $M=2$, $m=\sqrt[3]{2}\approx 1{,}26$. 4.18. $M=\pi/4$, $m=0$. 4.19. $M=1$, $m=-1$. 4.20. $M=1/\sqrt{e}\approx 0{,}61$, $m=-1/\sqrt{e}\approx -0{,}61$. 4.21. ● Analícese la función $y=e^x-$

$-(1+x)$ y muéstrese que ella tiene un único mínimo: $y_{mín} = y(0) = 0$. 4.25. $\frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$. 4.26. $|AP| = \left(500 - \frac{100}{\sqrt{3}}\right)$ km $\approx$ $\approx$ 442,3 km. 4.27. $x = \frac{2p}{4+\pi}$; $y = \frac{1}{2}\left(p - x - \frac{\pi x}{2}\right)$. 4.28. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. 4.29. $\frac{ah}{4}$. 4.30. πa^3. 4.31. $\frac{4}{27}\pi r^2 h$. 4.32. $\frac{8}{3}\pi r^3$. 4.33. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}e^3$. 4.34. $2r^2$. 4.35. $N(1, 1)$. 4.36. $x = R\sqrt{2}$, $y = R/\sqrt{2}$, 4.37. Divídase el segmento en dos partes iguales.

4.38. $r = \frac{RH\sqrt{R^2+H^2}}{(\sqrt{R^2+H^2}-R)(\sqrt{R^2+H^2}+2R)}$. 4.39. $h = (e^{2/3} - d^{2/3})^{3/2}$. 4.40. En $(-\infty, 0)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(0, +\infty)$, la convexidad es hacia las y negativas, $M(0, 1)$ es el punto de inflexión, $k = 7$. 4.41. La gráfica es convexa hacia las y negativas en todos los puntos. 4.42. En $(-\infty, 2)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(2, +\infty)$, la convexidad es hacia las y negativas, $M(2, 0)$ es el punto de inflexión, $k = 0$. 4.43. En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, en $(-1, 1)$ la convexidad es hacia las y positivas, $M_1(-1, \sqrt[3]{2})$ y $M_2(1, \sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión, $k_1 = k_2 = \infty$. 4.44. La gráfica es convexa hacia las y positivas en todos los puntos. 4.45. En $(-\infty, -1)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(-1, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, $M(-1, 1 - e^{-2})$ es el punto de inflexión, $k = -e^{-2} \approx -0{,}14$. 4.46. En $(-\infty, 0)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(0, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, $M(0, 0)$ es el punto de inflexión, $k = \infty$.

4.47. En $(0, e^{-5/6})$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(e^{-5/6}, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, $M\left(e^{-5/6}, 1 - \frac{5}{6}e^{-5/6}\right)$ es el punto de inflexión, $k = -\frac{3}{2}e^{-5/3} \approx -0{,}28$. 4.48. $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$. 4.49. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. 4.51. ● Si x_0 es la abscisa del punto de inflexión, entonces $x_0 \operatorname{tg} x_0 = 2$. En este caso $y_0^2 = y^2(x_0) = x_0^2 \operatorname{sen}^2 x_0 = \frac{4x_0^2}{4+x_0^2}$. 4.52. $x = 2$, $y = 1$. 4.53. $y = x - \frac{1}{3}$. 4.54. $x = 0$, $y = 1$ (la derecha), $y = -1$ (la izquierda). 4.55. $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ (la derecha), $y = 3x - \frac{\pi}{2}$ (la izquierda). 4.56. $x = 0$, $y = 2x$, $x = -1$ (la derecha). 4.57. $y = 0$. 4.58. $x = -\frac{1}{e}$,

$y = x + \frac{1}{e}$. **4.59.** $y = \frac{\pi}{2} - x - 1$. **4.61.** $y_{\text{mín}} = y(0) = -1$; $\left(\pm 1, -\frac{64}{125}\right)$ y $(\pm\sqrt{5}, 0)$ son los puntos de inflexión. **4.62.** $y_{\text{máx}} = y(\pm 1) = 1$, $y_{\text{mín}} = (y \pm \sqrt{3}) = y(0) = 0$; $\left(\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{5}}, \frac{6-\sqrt{21}}{20}\left(\frac{6-\sqrt{21}}{5} - 3\right)^2\right)$ y $\left(\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{5}}, \frac{6+\sqrt{21}}{20}\left(\frac{6+\sqrt{21}}{5} - 3\right)^2\right)$ son los puntos de inflexión. **4.63.** $y_{\text{máx}} = y(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $y_{\text{mín}} = y(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$; $(0, 0)$ y $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}, \mp\frac{7\sqrt{6}}{16}\right)$ son los puntos de inflexión. **4.64.** $y_{\text{mín}} = y(3) = \frac{27}{8}$; $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x = 1$ e $y = \frac{x+2}{2}$ son asíntotas. **4.65.** $y_{\text{máx}} = y(0) = 0$, $y_{\text{mín}} = y(\sqrt[3]{4}) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$; $\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ es el punto de inflexión, $x = 1$ e $y = x$ son asíntotas. **4.66.** $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x = \pm 1$ $y = x$ son las asíntotas. **4.67.** $y_{\text{máx}} = y(\sqrt[3]{4}) = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$, $y_{\text{mín}} = y(0) = 0$; $\left(\sqrt[3]{2}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ es el punto de inflexión; $x = -1$ e $y = x$ son las asíntotas. **4.68.** $y_{\text{máx}} = y(1) = \frac{1}{3}$, $\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{6}\sqrt[3]{4}\right)$ es el punto de inflexión; $x = -\sqrt[3]{2}$ e $y = 0$ son las asíntotas. **4.69.** $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x = \pm 1$ e $y = 0$ son asíntotas. **4.70.** $y_{\text{máx}} = y(0) = 0$, $y_{\text{mín}} = y(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$; $\left(-\sqrt{\frac{7+\sqrt{45}}{2}}, -\frac{\sqrt[3]{2(7+\sqrt{45})^2}}{9+\sqrt{45}}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{7-\sqrt{45}}{2}}, -\frac{\sqrt[3]{2(7-\sqrt{45})^2}}{9-\sqrt{45}}\right)$ son los puntos de inflexión; $x = 1$ e $y = 0$ son asíntotas. **4.71.** $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ son las asíntotas. **4.72.** $y_{\text{máx}} = y(-3) = -4{,}5$, $y_{\text{mín}} = y(3) = 4{,}5$; $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $y = x$ son las asíntotas. **4.73.** $y_{\text{mín}} = y(-1) = -1/3$; $(-\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{4}/6)$ es el punto de inflexión; $x = \sqrt[3]{2}$ e $y = 0$ son asíntotas. **4.74.** $y_{\text{mín}} = y(0) = -1$, $(\pm\sqrt{3}/3, -1/2)$ son puntos de inflexión; $y = 1$ es la asíntota. **4.75.** $(0, 0)$ y $(\sqrt[3]{4}/2, 1/3)$ son los puntos de inflexión; $x = -1$ e $y = 1$ son las

asíntotas. 4.76. $y_{máx} = y(0) = 2$, $(\pm 1, \sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión; $y = 0$ es la asíntota. 4.77. $y_{mín} = y(1) = -1$; (0, 0) y (2, 0) son los puntos de inflexión. 4.78. $y_{máx} = y(0) = 2$, $y_{mín} = y(\pm 1) = \sqrt[3]{4}$. 4.79. (0, 0) es el punto de inflexión; $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ son asíntotas. 4.80. (0, 1) y (1, 0) son puntos de inflexión; $y = -x$ es la asíntota. 4.81. (0, 0), $(\pm 1, \pm \sqrt[3]{2})$ son puntos de inflexión. 4.82. (0, 0), $(\pm 1, \pm \sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión; $y = 2x$ es la asíntota. 4.83. (0, 0), $(\pm 1, \pm \sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión; $y = x$ es la asíntota. 4.84. (0, 0) es el punto de inflexión; $y = -1$ es la asíntota izquierda, $y = 1$ es la asíntota derecha. 4.85. $y_{mín} = y(-\sqrt[3]{3}) = 1$; (0, 0) es el punto de inflexión; $x = -\sqrt[3]{2}$ es la asíntota. 4.86. $y_{máx} = y(0) = 0$, $y_{mín} = y(2) = \sqrt[3]{16}$; $(-\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{2})$ es el punto de inflexión; $x = \sqrt[3]{4}$ e $y = x$ son las asíntotas. 4.87. $y_{máx} = y(-\sqrt[3]{6}) = -3/\sqrt[3]{2}$; (0, 0) y $(\sqrt[3]{3}, 3/\sqrt[3]{25})$ son los puntos de inflexión; $x = -\sqrt[3]{2}$ e $y = x$ son las asíntotas. 4.88. $y_{mín} = y(0) = 0$, $(\pm \sqrt{2}, 2/\sqrt{3})$ son los puntos de inflexión; $y = x$ es la asíntota derecha, $y = -x$ es la asíntota izquierda. 4.89. $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ y $(-1, -1)$ son los puntos de inflexión; $x = 0$ e $y = 1$ son las asíntotas. 4.90. $y_{máx} = y(1) = 1/\sqrt[3]{4}$, $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{0{,}16})$ es el punto de inflexión; $x = -1$, $y = 0$ son las asíntotas. 4.91. $y_{máx} = y(-\sqrt{3}) = 0$, $y_{mín} = y(\sqrt{3}) = 0$; $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ son los puntos de inflexión; $x = 0$ es una asíntota, $y = 1$ es la asíntota derecha, $y = -1$ es la asíntota izquierda. 4.92. $y_{mín} = y(0) = 0$, $y_{mín} = y(\pm \sqrt{2}) = 2$, $x = \pm 1$ son las asíntotas, $y = x$ es la asíntota derecha, $y = -x$ es la asíntota izquierda. 4.93. $y_{máx} = y(0) = 1$, $y_{mín} = y(\pm 1) = 0$. 4.94. $y_{máx} = y(0) = 2\sqrt{2}$, $y_{mín} = y(\pm \sqrt{2}) = 0$; $(\pm 1, 1)$ son los puntos de inflexión. 4.95. $y_{mín} = y\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\sqrt{2}$, $y_{máx} = y\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \sqrt{2}$, $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, 0\right)$ son los puntos de inflexión $k \in \mathbb{Z}$. 4.96. $y_{mín} = y\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{máx} = y\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ son las asíntotas, $k \in \mathbb{Z}$. 4.97. $y_{mín} = y(0) = 0$, $y = -\frac{\pi x}{2} - 1$ es la asíntota izquierda, $y = \frac{\pi x}{2} - 1$ es la asíntota derecha. 4.98. $y_{mín} = y(1) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$, $y_{máx} = y(-1) = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ son los puntos de inflexión; $y = \frac{x}{2} + \pi$ es la asíntota izquierda, $y = \frac{x}{2}$ es

la asíntota derecha. 4.99. $y_{\text{máx}} = y(1) = e$, $\left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}, e^{1/2}\right)$ son los puntos de inflexión; $y = 0$ es la asíntota 4.100. $y_{\text{máx}} = y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $y_{\text{mín}} = y(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$: (0, 0), $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$ son los puntos de inflexión; $y = 0$ es la asíntota. 4.101. $y_{\text{máx}} = y(1) = \frac{1}{e}$, $\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, (2 \pm \sqrt{2})\, e^{-(2 \mp \sqrt{2})}\right)$ son los puntos de inflexión; $x = 0$ es la asíntota izquierda, $y = 0$ es la asíntota. 4.102. $y_{\text{máx}} = y(\pm 1) = \frac{1}{e}$, $y_{\text{mín}} = y(0) = 0$; $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, 3e^{-3}\right)$ y $\left(\pm\sqrt{2}, \frac{1}{2}\, e^{-1/2}\right)$ son los puntos de inflexión; $y = 0$ es la asíntota. 4.103. $y_{\text{mín}} = y(1) = e$; $y = x + 1$ es la asíntota, $x = 0$ es la asíntota derecha. 4.104. $y_{\text{máx}} = y(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$, $y_{\text{mín}} = y(-\sqrt{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$, $\left(\pm\sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{2}}\right)$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{5 + \sqrt{17}}\, e^{-\frac{1}{4}(5 + \sqrt{17})}$ y $\left(\pm\sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{2}}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{5 - \sqrt{17}}\, e^{-\frac{1}{4}(5 - \sqrt{17})}\right)$ son los puntos de inflexión; $y = 0$ es la asíntota. 4.105. $y_{\text{máx}} = y(-2) = -4\sqrt{e}$, $y_{\text{mín}} = y(1) = -1/e$; $(0{,}4 - 1{,}6e^{-5/2})$ es el punto de inflexión; $x = 0$ es la asíntota izquierda, $y = x - 3$ es la asíntota. 4.106. $(1, e^2)$ es el punto de inflexión, $x = 0$ es la asíntota derecha, $y = 2x + 3$ es la asíntota. 4.107. $y_{\text{máx}} = y(\pm 1) = 2/\sqrt{e}$, $y_{\text{mín}} = y(0) = 1$; $\left(\pm\sqrt{2 - \sqrt{3}}, (3 - \sqrt{3})\, e^{-\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}\right)$ y $\left(\pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}, (3 + \sqrt{3})\, e^{-\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}\right)$ son los puntos de inflexión; $y = 0$ es la asíntota. 4.108. $y_{\text{mín}} = y(1) = e^2$, $x = 0$ es la asíntota derecha. 4.109. $y_{\text{máx}} = y(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}\, e^{-3/2}$, $y_{\text{mín}} = y(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}\, e^{-3/2}$; (0, 0), $(\pm 1, \pm e^{-1/2})$, $(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{6}\, e^{-3})$ son los puntos de inflexión; $y = 0$ es la asíntota. 4.110. (0, 0) es el punto de inflexión 4.111. $y_{\text{máx}} = y(e) = \frac{1}{e}$, $\left(e\sqrt{e}, \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ es el punto de inflexión; $x = 0$ e $y = 0$ son las asíntotas derechas. 4.112. $y_{\text{máx}} = y\left(\frac{1}{e}\right) = -e$; $x = 1$ es la asíntota, $x = 0$ e $y = 0$ son las asíntotas derechas. 4.113. $y_{\text{mín}} = y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$; $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$ es el punto de inflexión 4.114. $y_{\text{máx}} = y(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$; $\left(\sqrt[6]{e^5}, \frac{5}{6\sqrt[6]{e^5}}\right)$ es el punto de inflexión, $x = 0$ e $y = 0$ son las asíntotas derechas. 4.115. $y_{\text{máx}} = y(1/e) = 1/e^2$, $y_{\text{mín}} = y(1) = 0$;

$\left(e^{-1,5-\sqrt{1,25}}, \frac{7+3\sqrt{5}}{2}e^{-3-\sqrt{5}}\right)$ y $\left(e^{-1,5+\sqrt{1,25}}, \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\times\right.$ $\left.\times e^{-3+\sqrt{5}}\right)$ son los puntos de inflexión. **4.116.** $y_{\text{máx}} = y(0) = 0$, $y_{\text{mín}} = y(\pm\sqrt{e}) = 2e$; $x = \pm 1$ son las asíntotas. **4.117.** $y_{\text{máx}} = y(1/e^2) = 4/e^2$, $y_{\text{máx}} = y(-1) = 0$, $y_{\text{mín}} = y(-1/e^2) = -4/e^2$; $(0, 0)$, $(\pm 1/\sqrt{e}, \pm 1/\sqrt{e})$ son los puntos de inflexión. **4.118.** $y_{\text{máx}} = y(0) = 0$; $x = \pm 1$ son las asíntotas. **4.119.** $y_{\text{máx}} = y(\pm e) = 1/e^2$, $y_{\text{mín}} = y(\pm 1) = 0$; $\left(\pm e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}, \left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)^2 e^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\right)$, $\left(\pm e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}, \left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)^2 e^{-\frac{5+\sqrt{13}}{2}}\right)$ son los puntos de inflexión; $x = 0$ e $y = 0$ son las asíntotas. **4.120.** $y_{\text{mín}} = y(1/e) = (1/e)^{1/e} \approx$ $\approx 0{,}69$, es convexa hacia las y negativas, $y \to 1$ para $x \to +0$, es decir, $M(+0, 1)$ es el punto final. **4.121.** $y_{\text{máx}} = y(e) = e^{1/e} \approx 1{,}44$; $(0{,}58, 0{,}12)$ y $(4{,}35, 1{,}4)$ son los puntos de inflexión; $M(+0, 0)$ es el punto final; $y = 1$ es la asíntota. ● Se puede no hallar los puntos de inflexión, es suficiente probar que éstos se encuentran de la ecuación $\ln^2 \frac{x}{e} + 2x \ln \frac{x}{e} - x = 0$. **4.122.** $x = 0$ es el punto de discontinuidad evitable ($y_-(0) = y_+(0) = e$), la función es decreciente, convexa hacia las y negativas, $x = -1$ es la asíntota vertical, $y = 1$ es la asíntota. **4.123.** $x = 0$ es el punto de discontinuidad evitable, $y = 0$ es la asíntota. Los puntos de extremo satisfacen la ecuación $\operatorname{tg} x = x$. Los puntos de inflexión satisfacen la ecuación $\operatorname{tg} x = \frac{2x}{2-x^2}$. ● Se puede no hallar los puntos de extremo y de inflexión. **4.125.** $x_{\text{mín}} = -1$ para $t = 1$ ($y(1) = 3$), $y_{\text{mín}} = -1$ para $t = -1$ ($x(-1) = 3$); una parábola cuyo vértice se encuentra en el origen de coordenadas y cuyo eje es la recta $y = x$ ($x > 0$, $y > 0$). **4.126.** $x_{\text{mín}} = y_{\text{mín}} = 1$ para $t = 0$ (punto de retroceso); $y = 2x$ es la asíntota cuando $t \to +\infty$. **4.127.** Astroide (véase § 3, cap. 2, fig. 27). **4.128.** $(-1, -3\pi, -1 + \frac{3\pi}{2})$ es el máximo, $(1 - 3\pi, 1 - \frac{3\pi}{2})$ es el mínimo, $(-3\pi, 0)$ es el punto de inflexión, $y = x$ e $y = x + 6\pi$ son las asíntotas. **4.129.** Una rosácea de tres pétalos; $D = [0, \pi/3] \cup [2\pi/3, \pi] \cup [4\pi/3, 5\pi/3]$; los extremos tienen lugar para $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$, $\varphi = 3\pi/2$. **4.130.** Cardioide, el polo es un punto de retroceso, $r_{\text{máx}} = r(0) = 2a$, $r_{\text{mín}} = r(\pi) = 0$. **4.131.** $D = (0, +\infty)$; la línea da vueltas espiralmente en torno al polo, aproximándose hacia éste asintóticamente; $(\sqrt{2\pi}, 1/2)$ es el punto de inflexión; el eje polar ($\varphi = 0$) es una asíntota horizontal. **4.132.** Lemniscata de Bernoulli (véase § 3, cap. 2 fig. 24).

5.1. La recta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{4}$. **5.2.** En el plano Oxy un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ entre los puntos $(1, 1)$ y $(0, \sqrt{2})$ re-

corrido en sentido antihorario. 5.3. La rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{z}{9} = 1$, $y = -1$, recorrida de abajo arriba si se mira por la parte del origen de coordenadas. 5.4. En el plano Oxy una parábola $y = \frac{1}{9}(6x - x^2)$ recorrida de izquierda a derecha. 5.5. La línea helicoidal $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$. 5.6. Astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$, $z = 0$. 5.7. La línea de corte de los cilindros $y = x^2$, $z = x^3$, recorrida de abajo arriba. 5.8. La *curva de Viviani* es una línea, donde se cortan la esfera y el cilindro circular: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = x$. 5.9. Una elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 2$. 5.10. Una parábola $y = x^2 + x$, $z = 3$, recorrida dos veces. 5.11. Una recta $4x + 3y = 0$, $z = 0$; $v = 3i - 4j$. 5.12. Una parábola (en el plano Oxy) $y = \frac{1}{9}(12x - x^2)$; $v = 3i + (4 - 2t)\,j$, $v|_{t=0} = 3i + 4j$, $v|_{t=1} = 3i + 2j$, $v|_{t=2} = 3i$, $v|_{t=3} = 3i - 2j$. 5.13. Una cicloide (en el plano Oxy) $x = 2(t - \operatorname{sen} t)$, $y = 2(1 - \cos t)$; $v = 2(1 - \cos t)\,i + 2 \operatorname{sen} t \cdot j$; cuando $t = \frac{\pi}{2}$, $v = 2(i + j)$; cuando $t = \pi$, $v = 4i$. 5.14. $0{,}6i - 0{,}8j$. 5.15. $\frac{1}{\sqrt{5}}(2i - j)$. 5.16. a) $\cos t \cdot i - \operatorname{sen} 2t \cdot j + \cos 2t \cdot k$; b) $(\cos t - t \operatorname{sen} t)\,i + (\operatorname{sen} t + t \cos t)\,j + k$; c) $(1 - \operatorname{sen} t)\,i + j + \cos t \cdot k$. 5.17. a) i; b) $12i - 2j - \frac{2}{\sqrt{5}}k$. 5.18. $1 + 3t^2 + 5t^4$. 5.19. $(3t^2 - 2t)\,i + (3t^2 - 2t)\,j - 2tk$. 5.20. $\cos t\,(i + 2uj + 3u^2k)$. 5.21. $x + 2z = 4$, $y = 2$ (una tangente); $2x - z = 3$ (un plano normal). 5.22. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-\frac{8}{3}}{2} = \frac{z-4}{3}$ (una tangente); $3x + 6y + 12z - 70 = 0$ (un plano normal) 5.23. $y = z$, $x = a$ (una tangente); $y + z = 0$ (un plano normal). 5.24. $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$ (una tangente); $12x - 4y + 3z = 12$ (un plano normal). 5.25. $\frac{x-1}{8} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-2}{7}$ (una tangente); $8x + 10y + 7z = 12$ (un plano normal). 5.26. a) $\frac{d^2r}{dt^2} = -\cos t \cdot i + e^t j + 2k$, $\left.\frac{d^2r}{dt^2}\right|_{t=0} = -i + j + 2k$; b) $\frac{d^2r}{dt^2} = -(2 \operatorname{sen} t + t \cos t)\,j + (2 \cos t - t \operatorname{sen} t)\,k$; $\left.\frac{d^2r}{dt^2}\right|_{t=0} = 2k$. 5.27. $w = 2 \operatorname{sen} t \cdot i + 2 \cos t \cdot j$; $w|_{t=\pi/2} = 2i$; $w|_{t=\pi} = -2j$. 5.28. $w = -2j$, $w_\tau = \frac{4(t-2)}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$, $w_n = \frac{6}{\sqrt{4t^2 - 16t + 15}}$; para $t = 0$ $w_\tau = -1{,}6$, $w_n = 1{,}2$ ● $w_\tau = \frac{dv}{dt}$, $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}$. 5.29. $w = i + \frac{1}{\sqrt{2t+1}}j$, $w_\tau = 1$, $w_n =$

$= \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$; para $t=0$ $w=i+j$, $w_n=1$. 5.30. $K|_{x=0}=2$, $K|_{x=1}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$. 5.31. $K_A=3$, $K_B=1/9$. 5.32. $3/\sqrt{2}$. 5.33. $1/2$. 5.34. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 5.35. $K=\frac{3}{4a \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}$, $K|_{\varphi=\pi}=\frac{3}{4a}$. 5.36. $\frac{3}{a}$. 5.37. $\frac{(9x^{4/3}+1)^{3/2}}{6x^{1/3}}$. 5.38. $\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}$, 5.39. $\sqrt[3]{|axy|}$. 5.40. $\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}=\frac{(a^2 \operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$. 5.41. $4a\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|$, 5.42. $\frac{a^2}{3r}$. 5.43. $\frac{(a^2+r^2)^{3/2}}{2a^2+r^2}$. 5.44. $\left(\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ● Fórmese la expresión para la curvatura K y hállese su punto de extremo. 5.45. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$. 5.46. $\left(0, \frac{a}{2}\right)$; $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$. 5.47. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. 5.48. $\left(-1, e-\frac{1}{e}\right)$; $(x+1)^2+\left(y-e+\frac{1}{e}\right)^2=e^2$. 5.49. $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+y^2=1$. 5.50. $(\pi a, -2a)$; $(x-\pi a)^2+(y+2a)^2=16a^2$. 5.51. $X=\frac{x-9x^5}{2}$, $Y=\frac{15x^4+1}{6x}$. 5.52. $X^{2/3}-Y^{2/3}=(2a)^{2/3}$. 5.53. $(X+Y)^{2/3}+(X-Y)^{2/3}=2a^{2/3}$. 5.54. $Y=a \operatorname{ch}\frac{X}{a}$. 5.55. $X^2=\frac{4}{27}Y^3$. 5.56. $\tau=\frac{1}{\sqrt{3}}(i-j+k)$, $\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$; $\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}(-i+j+2k)$; $x-1=-(y-1)=z$ (una tangente); $x=y$, $z=0$ (normal principal); $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ (binormal). 5.57. $\tau=i$, $\nu=-\frac{1}{\sqrt{2}}(j+k)$, $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}(j-k)$; $y=2$, $z=4$ (una tangente); $y-z+2=0$ $x=\pi$ (normal principal); $y+z=6$, $x=\pi$ (binormal). 5.58. $\tau=\frac{1}{3}(2i+j+2k)$, $\nu=\frac{1}{3}(-i-2j+2k)$, $\beta=\frac{1}{3}(2i-2j-k)$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ (una tangente); $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{2}$ (normal principal); $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ (binormal). 5.59. $\tau=\frac{1}{\sqrt{18}}(i+j+4k)$, $\nu=-\frac{1}{3}(2i+2j-k)$, $\beta=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$; $x-1=y-1=\frac{z-2}{4}$ (tangente); $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ (normal principal); $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}$ (binormal). 5.60. $x+2y=3$ (plano osculador); $z=1$ (plano normal); $2x-y=1$ (plano rectificante). 5.61. $y=x$ (plano osculador); $x+y=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (plano normal); $z=0$ (plano rectificante). 5.62. $\tau=i$, $\nu=k$, $\beta=-j$, $y=0$, $z=1$. (tangente); $x=1$, $y=0$ (normal principal); $x=1$, $z=1$ (binormal); $y=0$ (plano osculador); $x=1$ (plano normal); $z=1$ (plano rectificante). 5.63. $\tau=\frac{1}{\sqrt{5}}(2i-j)$, $\nu=-\frac{1}{\sqrt{30}}(i+2j+5k)$, $\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}\times$ $\times(i+2j-k)$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{0}$ (una tangente); $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=$ $=\frac{z-3}{5}$ (normal principal); $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$ (binormal); $x+2y-$ $-z-2=0$ (plano osculador); $2x-y=0$ (plano normal); $x+2y+$ $+5z-20=0$ (plano rectificante). 5.64. $K=\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$, $\sigma=-\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$; para $t=0$ $K=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\sigma=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. 5.65. $K=2\sqrt{\frac{9t^4+9t^2+1}{(9t^4+4t^2+1)^3}}$, $\sigma=\frac{3}{9t^4+9t^2+1}$; para $t=0$, $K=2$, $\sigma=3$. 5.66. $K=\sigma=\frac{1}{3(t^2+1)^2}$; para $t=1$ $K=\sigma=\frac{1}{12}$. 5.67. $K=\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$, $\sigma=-\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$; para $t=1$ $K=\frac{2}{9}$, $\sigma=-\frac{2}{9}$. 5.68. $K=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sigma=\frac{1}{3}$. 5.69. $K=$ $=\sqrt{\frac{9y^4+4y^6+1}{(y^6+y^2+1)^3}}$, $\sigma=-\frac{6y}{9y^4+4y^6+1}$; para $y=1$ $K=\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$; $\sigma=-\frac{3}{7}$. 5.70. $w=2j+4tk$, $w_\tau=4t$, $w_\nu=2$; $w_\tau|_{t=1}=4$. ● $w_\tau=$ $=\frac{dV}{dt}$, $w_\nu=\frac{v^2}{R}$. 5.71. La recta $x-y=2$; $z'(t)=e^{i\frac{\pi}{4}}$.

● Utilícese la fórmula de Euler $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi$. 5.72. La semicircunferencia superior $y=\sqrt{4-x^2}$; $z'(t)=2ie^{it}$. 5.73. Una elipse $x=4\cos t$, $y=2\,\mathrm{sen}\,t$; $z'(t)=i(3e^{it}-e^{-it})$. 5.74. La rama derecha de una hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$; $z'(t)=(2+i)e^t-(2-$ $-i)e^{-t}$. 5.75. La rama «derecha» (recorrida dos veces) de la parábola $y=x^2$; $z'(t)=2t+4it^3$. 5.76. Un arco de la cicloide $x=t-$ $-\mathrm{sen}\,t$, $y=1-\cos t$; $z'(t)=1-e^{-it}$. 5.77. La evolvente de una circunferencia $x=a(\cos t+t\,\mathrm{sen}\,t)$, $y=a(\mathrm{sen}\,t-t\cos t)$;

$z'(t) = ate^{it}$. 5.78. La espiral logarítmica $r = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$, $\alpha\beta \neq 0$; si $\alpha = 0$, entonces la función $r = 1$; si $\beta = 0$, el rayo $\varphi = 0$; $z'(t) = (\alpha + i\beta) \times e^{(\alpha+i\beta)t}$. 5.79. r', $r\varphi'$; $r'' - r\varphi'^2$, $2r'\varphi' + r\varphi''$. ● Represéntese la ley de movimiento en la forma exponencial $z = re^{i\varphi}$ y hállense las derivadas z' y z''. Las magnitudes buscadas son coeficientes de $e^{i\varphi}$ e $ie^{i\varphi}$. 5.80. La velocidad $v = izf'(z)$. ● Hágase uso de la forma exponencial del número complejo: $z = Re^{i\varphi}$ y hállese la derivada $\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$.

6.6. ◀ Según la condición $f(a) \cdot f(b) < 0$. Definamos los números x_n ($n = 0, 1, \ldots$) mediante la igualdad

$$x_n = (a_n + b_n)/2,$$

donde $a_0 = a$, $b_0 = b$, $p_n = f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, y

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}, & \text{si } p_n < 0, \\ x_{n-1}, & \text{si } p_n \geqslant 0, \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{si } p_n \leqslant 0, \\ b_{n-1}, & \text{si } p_n > 0. \end{cases}$$

Obtendremos $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $n = 1, 2, \ldots$, con la particularidad de que $[a_n, b_n]$ es un segmento de aislación de la raíz, cuya longitud es 2^n veces menor que la del segmento inicial. En particular, $a_n = b_n = x_{n-1}$, si $f(x_{n-1}) = 0$.

El programa tiene la forma siguiente:

```
      SUBROUTINE FORK (F, A, B, N)
      K = 0
      AN = A
      BN = B
    1 X = (AN + BN)/2
      S + F (X)
      IF (S.EQ.0.) GO TO 4
      IF (F (AN) * S.GT.0) GO TO 2
      BN = X
      GO TO 3
    2 AN = X
    3 K = K + 1
      IF (K.LT.N) GO TO 1
      A = AN
      B = BN
      RETURN
    4 A = X
      B = X
      RETURN
      END
```

El programa dado puede emplearse también para hallar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el segmento $[a, b]$, tomando como valor de la raíz la magnitud $(a_n + b_n)/2$; en este caso el error absoluto límite es igual a $(b_n - a_n)/2^{n+1}$. ▶

6.8. 1,6702. 6.9. —0,6823. 6.10. —2,2340, 0,3276. 6.11. 2,8931. 6.12. —1,4305, 1,2963. 6.13. 2,0946. 6.14. —2,3300, 0,2016, 2,1284. 6.15. 0,3684. 6.16. —2,3247. 6.17. —0,7976, 1,4945. 6.18. 0,2510, 1,4934. 6.19. —0,7549. 6.20. 1,5160. 6.21. 3,3532. 6.22. 1,2970. 6.23. 1,2672. 6.24. 1,3713. 6.25. 1,7556. 6.26. 0,6529. 6.27. 0, 0,7469. 6.28. 4,0,3099. 6.29. —1,4916. 6.30. 0,5110. 6.31. 0,7391. 6.32. $\pm$0,8241. 6.33. $\pm$0,7339, 0. 6.34. 3,6926. 6.35. 1,8411. 6.36. 1,0967.

```
6.38. FUNCTION CHORD (F, A, B, S, EPS)
      FA = F (A)
      FB = F (B)
```

```
      X = A - (B - A) * FA/(FB - FA)
      X1 = X
      FX = F (X)
      IF (FA * FX.GT.0.) GO TO 2
    1 X = X - (X - A) * FX/(FX - FA)
      FX = F (X)
      DX = S * ABS (X - X1)
      X1 = X
      IF (DX.GT.EPS) GO TO 1
      CHORD = X
      RETURN
      2X = X - (B - X) * FX/(FB - FX)
      FX = F (X)
      DX = S * ABS (X - X1)
      X1 = X
      IF (DX.GT.EPS) GO TO 2
      CHORD = X
      RETURN
      END
```

6.39.
```
      FUNCTION TANGEN (F, FD, A, B, S, EPS)
      FA = F (A)
      C = A - (B - A) * FA/(F (B) - FA.
      P = FA * F (C)
      IF (P) 2, 1, 3
    1 TANGEN = C
      RETURN
    2 X = A
      GO TO 4
    3 X = B
    4 X1 = X
      X = X - F (X)/FD (X)
      IF (S * (X1 - X)** 2.GT.EPS) GO TO 4
      TANGEN = X
      RETURN
      END
```

6.40.
```
      FUNCTION COMBI (F, FD, A, B, EPS)
      FA = F (A)
      FB = F (B)
      X = A - (B - A) * FA/(FB - FA)
      FX = F (X)
      IF (FA * FX.GT.0) GO TO 2
      XT = A
```

```
1 X = X - (X - A) * FX/(FX - FA)
  FX = F (X)
  XT = XT - F (XT)/FD (XT)
  IF (ABS (X - XT).GT.EPS) GO TO 1
  COMBI = (X + XT)/2.
  RETURN
2 XT = B
3 X = X - (B - X) * FX/(FB - FX)
  FX = F (X)
  XT = XT - F (XT)/FD (XT)
  IF (ABS (X - XT).GT.EPS) GO TO 3
  COMBI = (X + XT)/2.
  RETURN
  END
```

6.41. Respuesta al problema 6.8:

```
FUNCTION F (X)
F = X** 3 + 2. * X - 8.
RETURN
END
```

Las respuestas a otros problemas difieren en segundos operadores.

6.42. El problema para una computadora electrónica consta de tres unidades de programa: función subprograma FUNCTION F (X), función subprograma FUNCTION CHORD (F, A, B, S, EPS) y programa principal que para el problema 6.17 tiene la forma siguiente:

```
  EXTERNAL F
  ROOT1 = CHORD (F, -1, -0.5, 1.4, 0.0001)
  ROOT2 = CHORD (F, 1.2, 1.8, 3.4, 0.0001)
  WRITE (3,1) ROOT1, ROOT2
1 FORMAT ('LAS RAICES DE LAS ECUACIONES', F8.4, Y', F8.4)
  STOP
  END
```

6.43. El problema para una computadora electrónica contiene 4 unidades de programa. La respuesta al problema 6.35 tiene la forma siguiente:

1) Función subprograma para el cálculo de los valores de la función:

```
FUNCTION F (X)
F = X** 2 + ALOG (X) - 4.
RETURN
END
```

2) función subprograma para el cálculo de los valores de la derivada:

```
FUNCTION FD (X)
FD = 2. * X + 1./X
RETURN
END
```

3) Función subprograma para el cálculo de la raíz, empleando el método de las tangentes:

```
FUNCTION TANGEN (F, D, A, B, S, EPS)
```

4) programa principal:

```
EXTERNAL F, FD
ROOT = TANGEN (F, FD). 1., 2., 0.3, 1E — 4)
WRITE (3,1) ROOT
1 FORMAT ('RAÍZ =', F6.4)
STOP
END
```

6.44. Véase la respuesta al problema 6.43. El programa principal para el problema 6.35 tiene la forma siguiente:

```
EXTERNAL F, FD
ROOT = COMBI (F, FD, 1., 2., IE — 4)
WRITE (3,1) ROOT
1 FORMAT (12H RAÍZ =, F6.4)
STOP
END
```

6.45. y 6.46. ● Hágase uso del método de inducción matemática. 6.47. $f\left(\frac{12}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{10} = 0{,}9511 \pm 0{,}0001$. 6.48. $\ln 11 = 2{,}3979 \pm$ $\pm$ 0,0003. ● Con el fin de hallar los valores de la función en los nudos de interpolación, hágase uso de las ecuaciones $\ln 9 = 2\ln 3$, $\ln 10 = \ln 5 + \ln 2$, $\ln 12 = 2\ln 2 + \ln 3$, $\ln 15 = \ln 5 + \ln 3$. 6.49. $f(1{,}26) = 1{,}105$, $f(1{,}58) = 1{,}261$. 6.50. $f(1{,}89) = 2{,}092$, $f(2{,}43) = 3{,}144$. 6.51. $f(0{,}83) = 0{,}817$, $f(0{,}97) = 0{,}942$. 6.52. $f(1{,}74) = 1{,}2148$, $f(1{,}97) = 1{,}0007$. 6.53. $f(2{,}72) = 1{,}5463$, $f(2{,}93) =$ $= 0{,}9805$. 6.54. $f(23) = 0{,}921$, $f(41) = 0{,}755$. 6.55. $f(1{,}3) = 1{,}184$ $f(4{,}0) = 1{,}758$. 6.56. $f(0{,}20) = 0{,}1987$, $f(0{,}41) = 0{,}3990$. 6.57. $f(1{,}25) = 0{,}0771$, $f(1{,}76) = 0{,}0128$. 6.58. $f(58) = 0{,}275$, $f(79) =$ $= -0{,}291$. 6.59. Si $(0{,}26) = 0{,}25903$, Si $(0{,}45) = 0{,}44497$. 6.60. $\Phi(0{,}27) = 0{,}29742$ $\Phi(0{,}58) = 0{,}58792$. 6.62. 1,82. 6.63. 1,45. 6.64. 2,3. 6.65. 60° 30'.

6.66.

```
SUBROUTINE DEL (X, Y, N)
DIMENSION X (N), Y (N)
N1 = N — 1
DO 2 I = 1, N1
A = Y (I)
DO 1 K = I, N1
C = X (K) — X (K + I)
B = (Y (K) — Y (K + 1))/C
Y (K) = A
```

6.67.

```
SUBROUTINE DELTA (Y, N)
DIMENSION Y (N)
N1 = N — 1
DO 2 I = 1, N1
A = Y (I)
DO 1 K = I, N1
B = Y (K + 1) — Y (K)
Y (K) = A
1 A = B
```

```
1 A = B                          2 Y (N) = A
2 Y (N) = A                        RETURN
  RETURN                           END
  END
```

El programa del problema 6.67 se aclara por el siguiente esquema ($N = 6$):

$$
\begin{array}{l}
y_1 \\
y_2 \ \Delta y_1 \\
y_3 \ \Delta y_2 \quad \Delta^2 y_1 \quad \Delta^3 y_1 \\
y_4 \ \Delta y_3 \quad \Delta^2 y_2 \quad \Delta^3 y_2 \ \Delta^4 y_1 \ \Delta^5 y_1 \\
y_5 \ \Delta y_4 \ \Delta^2 y_3 \quad \Delta^3 y_3 \ \Delta^4 y_2 \\
y_6 \ \Delta y_5 \ \Delta^2 y_4
\end{array}
$$

Al haberse realizado los operadores del ciclo exterior, para $I = 3$ la tabla Y contendrá las magnitudes y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^3 y_2$, $\Delta^3 y_3$, y finalizado todo el programa, las magnitudes y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^4 y_1$, $\Delta^5 y_1$.

6.68.
```
      FUNCTION POLINT (X, Y, N, KEY, ARG)
      DIMENSION X (N), Y (N)
      N1 = N — 1
      IF (KEY) 4, 1, 4
    1 DO 3 I = 1, N1
      A = Y (I)
      DO 2 K = I, N1
      B = (Y (K) — Y (K + 1))/(X (K) — X (K + 1))
      Y (K) = A
    2 A = B
    3 Y (N) = A
    4 POLINT = Y (N)
      DO 5 K = 1, N1
    5 POLINT = POLINT * (ARG — X (N — K)) + Y (N —
      — K)
      RETURN
      END
```

6.69.
```
      SUBROUTINE POLIN (X, Y, N, KEY, ARG, P, E, EPS)
      DIMENSION X (N), Y (N)
      N1 = N — 1
      IF (KEY) 4, 1, 4
    1 DO 3 I = 1, N1
      A = Y (I)
      DO 2 K = I, N1
```

```
      B = (Y (K) — Y (K + 1))/(X (K) — X (K + 1))
      Y (K) = A
    2 A = B
    3 Y (N) = A
    4 P = Y (I)
      EPS = 1
      DO 5 I = 1, N1
      EPS = EPS * (ARG — X (I))
    5 P = P + EPS * Y (I + 1)
      EPS = EPS * Y (N)
      EPS = ABS (EPS)
      RETURN
      END
```

El polinomio de interpolación se calcula según el esquema:

$$p_{n-1}(x) = (\ldots((Y(N)(x - X(N-1)) + Y(N-1))(x - \\ - X(N-2)) + Y(N-2))\ldots)(x - X(1)) + Y(1),$$

donde todas las expresiones entre paréntesis se calculan sucesivamente, partiendo de los paréntesis interiores.

6.70.

```
      FUNCTION POLIN (X, H, Y, N, KEY, ARG)
      DIMENSION Y (N)
      M = N — 1
      IF (KEY) 5, 1,5
    1 DO 3 I = 1, M
      A = Y (I)
      DO 2 K = I, M
      B = Y (K + 1) — Y (K)
      Y (K) = A
    2 A = B
    3 Y (N) = A
      F = 1.
      DO 4 I = 3, N
      FI = I — 1
      F = F * FI
    4 Y (I) = Y (I)/F
    5 T = (ARG — X)/H
      POLIN = Y (N)
      DO 6 K = 1, M
    6 POLIN = POLIN * (T — M + K) + Y (N — K)
      RETURN
      END
```

6.71. El problema para una computadora electrónica debe contener dos unidades de programa:

a) función subprograma

```
FUNCTION POLIN (X, H, Y, N, KEY, ARG)
```

b) programa principal que para el problema 6.50 tiene la forma:

```
DIMENSION  Y (8)
DATA Y/1.958, 2.107, 2.268, 2.443, 2.632, 2.841, 3.071, 3.324/
P1 = POLIN (1.8, 0.1, Y, 8, 0,1.89)
P2 = POLIN (1.8, 0.1, Y, 8, 1, 2.43)
WRITE (3,1) P1, P2
1 FORMAT ('F (1.89) =', F5.3', F (2.43) =' , F5.3)
STOP
END
```

6.72. a) La función subprograma:

```
FUNCTION  POLINT (X, Y, N, KEY, ARG)
```

b) programa principal (al 6.63):

```
DIMENSION X (6), Y (6)
DATA X/1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6/, Y/2.431, 2.928, 3.497, 4.144,
4.875, * 5.696/
XO = POLINT (Y, X, 6, 0, 4.498)
WRITE (3,1) XO
1 FORMAT (30X, 'F(',F3.2,') = 4.498')
STOP
END
```

En el acceso a la función subprograma POLINT el primer parámetro es, para las designaciones cualesquiera, una tabla de los nudos de interpolación, y el segundo, la tabla de los valores correspondientes de la función.

6.73. a) El subprograma:

```
SUBROUTINE POLYN (X, Y, N, KEY, ARG, P, EPS)
```

b) el programa principal (al 6.62):

```
DIMENSION  X (8), Y (8)
DATA X/1.5, 1.55, 1.6, 1.65, 1.7, 1.75, 1.8, 1.85/, Y/—1.125,
—0.926, *—0.704, —0.458, —0.187, 0.109, 0.432, 0.732/
CALL POLYN (Y, X, 8, 0, 0.569, POLY, EPSI)
WRITE  (3,1) POLY, EPSI
1 FORMAT  ('F (X) = 0.569, DONDE X =' , F4.2, *' CON EXA-
CTITUD  DE HASTA', F5.4)
STOP
END
```

6.74. $f'(2{,}03) = 1{,}42249$, $f'(2{,}22) = 1{,}87640$. **6.75.** $f'(1{,}14) = 1{,}0704$, $f'(1{,}42) = 1{,}1698$. **6.76.** $f'(3{,}02) = 5{,}63133$, $f'(3{,}31) = 7{,}34833$. **6.77.** $f'(0{,}82) = 0{,}8077$, $f'(1{,}03) = 0{,}9914$. **6.78.** $f'(1{,}34) = 0{,}1873$, $f'(1{,}65) = 0{,}0741$. **6.79.** $f'(2) = 9$, $f''(2) = 12$. **6.80.** $f'(2{,}5) = 63{,}5$, $f''(2{,}5) = 75$.

6.81.

```
      FUNCTION DW1 (T, N)
      TN = N
      S = 0.
      DW1 = 1.
      D = 0.
    1 IF ((T - S).EQ.0.) GO TO 3
      DW1 = DW1 * (T - S)
      D = D + 1./(T - S)
      S = S + 1
      IF (S.LE.TN) GO TO 1
      DW1 = DW1 * D
      RETURN
    2 DW1 = DW1 * (T - S)
    3 S = S + 1.
      IF (S.LE.TN) GO TO 2
      RETURN
      END
```

● Para $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t-k)$, $n = 0, 1, \ldots,$

$$w_n'(t) = \begin{cases} w_n(t) \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{t-k}, & t \neq \nu, \\ \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \nu}}^{n} (t-k), & t = \nu, \end{cases} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

6.82.

```
      FUNCTION DW2 (T, N)
      TN = N
      TK = 0.
      S1 = 0.
      S2 = 0.
      DW2 = 1.
      IF (T.EQ.0) GO TO 4
    1 S1 = S1 + .1/(T - TK)
      DW2 = DW2 * (T - TK)
      TK = TK + 1.
      IF ((T - TK).EQ.0) GO TO 5
      S2 = S2 + (1./T - TK)) * S1.
    2 IF (TK.LT.TN) GO TO 1
      DW2 = DW2 * (T - TN)
    3 DW2 = DW2 * S2
      RETURN
    4 TK = TK + 1.
      GO TO 1
    5 IF (T.EQ.TN) GO TO 3
      TK = TK + 1.
      S2 = (1./(T - TK)) * S1
      GO TO 2
      END
```

● Para $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t-k)$

$$w_n''(t) = \left(w_n(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}\right)' = w_n'(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k} + w_n(t) \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}\right)' =$$

$$= w_n(t)\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}\right)^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(t-k)^2}\right)=$$

$$=2w_n(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{t-j}=$$

$$=2w_n(t)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t-j}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{t-k} \qquad \text{para} \quad t\neq \nu,$$

$$w_n''(t)=2\prod_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{n}(t-k)\sum_{j=\nu+1}^{n}\frac{1}{t-j}\sum_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{j-1}\frac{1}{t-k}$$

para $t=\nu,\ \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n$

6.83.

```
      FUNCTION POLID1 (X, H, Y, N, KEY, ARG)
      DIMENSION Y (N)
      M = N - 1
      IF (KEY) 5, 1, 5
    1 DO 3 I = 1, M
      A = Y (I)
      DO 2 K = I, M
      B = Y (K + 1) - Y (K)
      Y (K) = A
    2 A = B
    3 Y (N) = B
      F = 1.
      DO 4 I = 3, N
      FI = I - 1
      F = F * FI
    4 Y (I) = Y (I)/F
    5 T = (ARG - X)/H
      POLID1 = Y (2)
      DO 6 I = 2, M
    6 POLID1 = POLID1 + DW1 (T, I - 1) * Y (I + 1)
      RETURN
      END
```

6.84. La función-subprograma

```
FUNCTION POLID2 (X, H, Y, N, KEY, ARG)
```

se diferencia del subprograma del problema 6.83 en los siguientes tres operadores (quinto, cuarto y tercero a contar del fin):

```
      POLID2 = Y (3)
      DO 6 I = 3, M
6     POLID2 = POLID2 + DW2 (T, I — 1) * Y (I + 1)
```

6.85. El problema para una computadora electrónica debe contener tres unidades de programa:

a) función-programa FUNCTION DW1 (T, N)

b) función-subprograma

FUNCTION POLID1 (X, H, Y, N, KEY, ARG)

c) programa principal que para el problema 6.75 tiene la forma siguiente:

```
      DIMENSION Y (8)
      DATA Y/1.0083, 1.1134, 1.2208, 1.331, 1.4449, 1.5634, 1.6876,
     1.8186/
      DX1 = POLID1 (1., 0.1, Y, 8,0, 1.14)
      DX2 = POLID1 (1., 0.1, Y, 8, 1, 1.42)
      WRITE (3,1) DX1.DX2
1     FORMAT ('VALORES DE LA DERIVADA', F7.4, *'PARAX =
     = 1.14 Y', F7.4, 'PARA X = 1.42')
      STOP
      END
```

6.86. El problema para una computadora electrónica debe contener cinco unidades de programa

funciones subprogramas:

a) FUNCTION DW1 (T, N)

b) FUNCTION DW2 (T, N)

c) FUNCTION POLID1 (X, H, Y, N, KEY, ARG)

d) FUNCTION POLID2 (X, H, Y, N, KEY, ARG)

e) programa principal que para el problema 6.79 tiene la forma siguiente:

```
      DIMENSION Y (6)
      DATA Y/1., 5., 21., 55., 113., 201./
      D1 = POLID1 (., 1., Y, 6, 0,2.)
      D2 = POLID2 (1., 1., Y, 6, 1, 2.)
      WRITE (3, 1) D1, D2
1     FORMAT ('PARA X = 2 1 raDERIVADA = ',  F4.1, *'2 — DA =
     = ', F4.1)
      STOP
      END
```

CAPÍTULO 6

CÁLCULO INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

§ 1. Métodos principales de cálculo de la integral indefenida

1. Función primitiva e integral indefenida. Una función $F(x)$ se denomina función *primitiva* $f(x)$, definida en cierto conjunto X, si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Si $\Phi(x)$ y $F(x)$ son dos primitivas de una misma función $f(x)$, entonces

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

donde $C = \text{const}$. Viceversa, si $F(x)$ es una función primitiva $f(x)$, entonces $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ es la totalidad de todas las primitivas suyas llamada *integral indefenida* de la función $f(x)$ y denotada por el símbolo $\int f(x)\,dx$. De este modo, por definición

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}, \tag{1}$$

donde $F(x)$ es una de las funciones primitivas de $f(x)$, y la constante C toma valores reales.

De acuerdo con la tradición, la igualdad (1) se anota sin una designación explícita del conjunto en el segundo miembro, es decir, en la forma

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

denominándose C constante arbitraria.

Propiedades de la integral indefenida

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
2. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$.
3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a \neq 0$.
4. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

Tabla de las integrales indefenidas principales

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0,\ a \neq 1); \quad \int e^x\,dx = e^x + C.$

4. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$

10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \ (a \neq 0).$

11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcson}\frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad |x| > |a|.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$

15. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

16. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Hállense las funciones primitivas de las siguientes funciones:

1.1. $2x^7$. **1.2.** $4\sqrt[3]{x}$. **1.3.** $\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}$.

1.4. $\frac{x^3+5x^2-1}{x}$. **1.5.** $\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}$.

1.6. $1-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$. **1.7.** $\frac{1}{\sqrt{a+bx}}$. **1.8.** e^{2-3x}.

1.9. $\frac{1}{\sqrt[3]{5x}}$. **1.10.** $\frac{1}{\cos^2 4x}$. **1.11.** $\frac{x^3+1}{x-1}$.

1.12. $1-8\operatorname{sen}^2 2x\cos^2 2x$.

1.13. $\left(\cos^2\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)^2$.

1.14. $\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)+\operatorname{sen}(\alpha+x)\operatorname{sen}(\alpha-x)$.

El proceso de búsqueda de una integral indefenida con ayuda de la tabla de integrales principales y transformaciones idénticas lleva el nombre de integración inmodiata.

EJEMPLO 1. Calcúlese $\int \frac{dx}{x^2-x^4}$.

◀ $\int \frac{dx}{x^2-x^4}=\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}=\int \frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}\,dx=$

$$=\int \frac{dx}{x^2}+\int \frac{dx}{1-x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$ ▶

Haciendo uso de la tabla de las integrales principales, hállense las siguientes integrales:

1.15. $\int \sqrt{mx}\,dx$. **1.16.** $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$. **1.17.** $\int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}dx$.

1.18. $\int \frac{x^3+2}{x}dx$. **1.19.** $\int 2^x e^x\,dx$.

1.20. $\int (2x+3\cos x)\,dx$. **1.21.** $\int \frac{2-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$.

1.22*. a) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$; b) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$. **1.23.** $\int \frac{dx}{x^2+4}$.

1.24. $\frac{dx}{5-x^2}$. **1.25.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

1.26. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2-9}}dx$. **1.27.** $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

1.28. $\int (x+a)(x+b)\,dx$. **1.29.** $\int (a^{1/3}+x^{1/3})^3\,dx$.

1.30. $\int \dfrac{\cos^2 x+3\cos x-2}{\cos^2 x}\,dx$.

1.31. a) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; b) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

1.32. $\int \dfrac{dx}{x^2-7}$. **1.33.** $\int \dfrac{x^2-9}{x^2-8}\,dx$.

2. Integración por cambio de variable. Existen dos variantes de este método.

a) *Método en el que una función se toma bajo el signo de la diferencial.* Sea que se requiere calcular la integral $\int f(x)\,dx$. Supongamos que existen las funciones derivables $u=\varphi(x)$ y $g(u)$ tales que la expresión subintegral $f(x)\,dx$ pueda ser escrita en la forma

$$f(x)\,dx = g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = g(u)\,du$$

(la transformación mencionada se denomina introducción de $u=\varphi(x)$ bajo el signo de la diferencial). Observemos que se verifica la relación

$$\int f(x)\,dx = \int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du\,\Big|_{u=\varphi(x)}.$$

Por ello, el cálculo de la integral $\int f(x)\,dx$ se reduce al cálculo de otra integral $\int g(u)\,du$ (la cual puede resultar más simple que la inicial) y a la sustitución ulterior de $u=\varphi(x)$.

EJEMPLO 2. Calcúlese la integral $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^3 x\,d(\operatorname{sen} x) = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4}\Big|_{u=\operatorname{sen} x} + C = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Calcúlese la integral $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \int \frac{d(x^2+x-3)}{x^2+x-3} = \int \frac{du}{u} = \ln|u|\,\Big|_{u=x^2+x-3} + C = \ln|x^2+x-3| + C. \blacktriangleright$$

La operación de introducción de la función $\varphi(x)$ bajo el signo de diferencial es equivalente a la sustitución de la variable x por una variable nueva $u = \varphi(x)$.

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$.

◀ Realicemos el cambio de la variable según la fórmula $u = 3x + 1$.

Entonces, $du = 3\,dx$, es decir, $dx = \frac{1}{3}\,du$ y

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{2/3}} = u^{1/3}\Big|_{u=3x+1} + C = \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

La transformación ejecutada es equivalente a la puesta de la función $u = 3x + 1$ bajo el signo de diferencial. ▶

Calcúlense las integrales con ayuda de un cambio adecuado:

1.34. $\int \sqrt{3+x}\,dx$. **1.35.** $\int (3 - 4\operatorname{sen} x)^{1/3} \cos x\,dx$.

1.36. $\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x\,dx$. **1.37.** $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^4 x}\,dx$.

1.38. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$. **1.39.** $\int \frac{dx}{a+bx}$.

1.40. $\int \frac{\sec^2 x}{a - b\operatorname{tg} x}\,dx$. **1.41.** $\int \frac{\cos \frac{x}{\sqrt{2}}}{2 - 3\operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}}\,dx$.

1.42. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$. **1.43.** $\int 3^{4x}\,dx$.

1.44. $\int \cos(ax+b)\,dx$. **1.45.** $\int \operatorname{sen}(\ln x)\frac{dx}{x}$.

1.46. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **1.47.** $\int \frac{dx}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$.

1.48. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 3x}$. **1.49.** $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$.

1.50. $\int x \cdot 5^{-x^2}\,dx$. **1.51.** $\int \frac{dx}{1-4x^2}$.

1.52. $\int \frac{e^{-ax}}{1+e^{-2ax}}\,dx$. **1.53.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5-3x^2}}$.

1.54. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$. 1.55. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$,

1.56. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$. 1.57. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

1.58. $\int \frac{dx}{a^2+b^2x}$. 1.59. $\int \frac{\operatorname{sen} ax}{\cos^3 ax}\,dx$.

1.60. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x\,dx$. 1.61. $\int \frac{e^x}{(7-e^x)^2}\,dx$.

1.62. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. 1.63. $\int \operatorname{cth} 4x\,dx$.

1.64. $\int \frac{a^{1/x}}{x^2}\,dx$. 1.65. $\frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2(x^2+1)}$.

1.66. $\int \frac{dx}{(a-b)x^2-(a+b)}$ $(0<b<a)$.

1.67. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$. 1.68. $\int \frac{x\,dx}{4x^2+7}$.

1.69. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+1}}$. 1.70. $\int \frac{a^x}{\sqrt{a^{2x}-1}}\,dx$.

Hállense las integrales indefenidas aplicando diferentes procedimientos:

1.71*. $\int \frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx$. 1.72. $\int \frac{x^2}{3+x^2}\,dx$.

1.73. $\int \frac{x^2-2x+3}{x^2+4}\,dx$. 1.74. $\int \frac{x\,dx}{a^2x^4-b^2}$.

1.75. $\int \frac{x^3}{9-4x^8}\,dx$. 1.76. $\int \frac{x^4+1}{x^5+5x-8}\,dx$.

1.77. $\int x^3\sqrt[4]{5x^4-3}\,dx$.

1.78. $\int \left(3-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.79. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$. 1.80. $\int \frac{a^2+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a^2+b^2x^2}\,dx$.

1.81. $\frac{dx}{\sqrt[5]{a^x}}$. 1.82. $\int e^x\sqrt[3]{4+e^x}\,dx$.

1.83. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx$. 1.84*. $\int \frac{dx}{2^x+1}$.

1.85. $\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}+x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

1.86. $\int \frac{xe\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$, **1.87.** $\int \sqrt{3-\operatorname{ch} x}\operatorname{sh} x\,dx.$

1.88. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}.$ **1.89.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}.$

1.90*. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$ **1.91*.** $\int \cos^2 x\,dx.$

1.92. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}}.$ **1.93.** $\int (\operatorname{sen} ax+\cos ax)^2\,dx.$

1.94. $\int \frac{x^2}{\cos(x^3)}\,dx.$ **1.95.** $\int \frac{(1+\cos 2x)^3}{\cos 2x}\,dx.$

1.96. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3-\cos^2 x}}\,dx.$ **1.97.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos^4 x+3}}\,dx.$

1.98*. $\frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}.$ **1.99.** $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}\sqrt{3}x}.$

1.100. $\int \operatorname{th} ax\,dx.$

1.101. $\int \operatorname{tg}^2(ax+b)\,dx.$

1.102. $\int x^2 \operatorname{ctg}^2(x^3-3)\,dx.$

1.103. $\int e^{\sec x}\operatorname{tg} x \sec x\,dx.$

b) *Método de sustitución.* Supongamos que se requiere calcular la integral $\int f(x)\,dx$, donde la función $f(x)$ está definida en cierto conjunto X. Introduzcamos una nueva variable u mediante la fórmula

$$x = \varphi(u)\colon U \to X,$$

donde la función $\varphi(u)$ es derivable en cierto conjunto U y realiza una aplicación biunívoca de U sobre X, es decir, tiene su inversa

$$u = \varphi^{-1}(x)\colon X \to U.$$

Al sustituir $x = \varphi(u)$ en la expresión subintegral inicial, obtenemos

$$f(x)\,dx = f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = g(u)\,du.$$

Luego, resulta válida la igualdad

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du\,|_{u=\varphi^{-1}(x)} = \int g(u)\,du\,|_{u=\varphi^{-1}(x)},$$

es decir, el cálculo de la integral $\int f(x)\,dx$ se reduce al cálculo de otra integral $\int g(u)\,du$ (la cual puede resultar más simple que la de partida) y la sustitución ulterior $u = \varphi^{-1}(x)$.

EJEMPLO 5. Calcúlese la integral $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

◀ En el caso que se considera el campo de definición de la función subintegral es $X = [0, +\infty)$. Realicemos la sustitución

$$x = \varphi(u) = u^2, \quad u \in [0, +\infty).$$

Entonces, $dx = 2u\,du$, $u = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$, de donde

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{u^3+u}{u+1}\,du = 2\int (u^2-u+2)\,du - 4\int \frac{du}{u+1} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 2u\right) - 4\ln(u+1) + C\,|_{u=\sqrt{x}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x + 2x^{1/2}\right) - 4\ln(\sqrt{x}+1) + C. \blacktriangleright$$

Empleando las sustituciones indicadas, hállense las integrales:

1.104. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$, $x = (1-t^2)^{1/3}$.

1.105. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, $x = \frac{2}{t}$.

1.106. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$, $x = t^2$.

1.107. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$, $x = \ln t$.

Aplicando las sustituciones adecuadas, hállense las integrales:

1.108. $\int x(5x-1)^{19}\,dx$. **1.109.** $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$.

1.110. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$. **1.111.** $\int \frac{x}{(3-x)^7}\,dx$.

1.112. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$. **1.113.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

3. **Integración por partes.** Si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones derivables, se verifica la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2}$$

Esta fórmula se usa en aquellos casos cuando la expresión subintegral $f(x)\,dx$ puede ser representada en la forma $u\,dv$ de modo tal que la integral en el segundo miembro de (2) pueda resultar más sencilla que la integral inicial, siempre que se elijan adecuadamente las expresiones de u y dv. En este caso se debe tomar en consideración que u ha de reunir los factores que se simplifican en la derivación. Por ejemplo, si bajo el signo de integral figura el producto de un polinomio por una función trigonométrica o exponencial, u debe incorporar el polinomio, mientras que la expresión restante debe formar parte de dv. La fórmula (2) puede aplicarse más de una vez.

Ejemplo 6. Hállese $\int x^2 \cos x\,dx$.

◀ Suponemos $u = x^2$ y $dv = \cos x\,dx$. En este caso $du = 2x\,dx$ y $v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ (la constante C aquí se supone igual a cero, es decir, a título de v se toma una de las primitivas). De acuerdo con la fórmula (2) se tiene

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Apliquemos otra vez la fórmula de integración por partes a la integral que figura en el segundo miembro, con la particularidad de que u nuevamente incorpora el polinomio (es decir, $2x$). Tenemos: $u = 2x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. De aquí

$$du = 2\,dx \text{ y } v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x.$$

Aplicando la fórmula (2), obtenemos en definitiva:

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - \left(-2x \cos x - \int (-\cos x)\,2\,dx\right) =$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C. \blacktriangleright$$

Si la función subintegral contiene en calidad de factor una función logarítmica o trigonométrica inversa, éstas últimas deben tomarse por u, puesto que se simplifican como resultado de la derivación.

Ejemplo 7. Hállese $\int \ln x\,dx$.

◀ Suponemos $u = \ln x$, $dv = dx$. Entonces, $du = \dfrac{dx}{x}$ y $v = \int dx = x$. Sustituyendo en la fórmula (2), hallamos

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C. \blacktriangleright$$

A veces, aplicada dos veces la fórmula de integración por partes, aparece en el segundo miembro una expresión que contiene la integral de partida, es decir, obtenemos una ecuación con la integral buscada a título de incógnita.

EJEMPLO 8. Hállese $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$.

◀ Suponemos $u = e^{ax}$, $dv = \operatorname{sen} bx\, dx$. Entonces, $du = ae^{ax}\, dx$, $v = -\frac{1}{b} \cos bx$. Sustituyendo en (2), tenemos

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Ahora suponemos $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\, dx$. Entonces, $du = ae^{ax}\, dx$, $v = \frac{1}{b} \operatorname{sen} bx$ y

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \left(\frac{e^{ax}}{b} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx \right).$$

De resultas se ha obtenido una ecuación respecto de la integral desconocida $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$. Resolviendo esta ecuación, hallamos

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = e^{ax} \frac{a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{b^2} + C_1,$$

o bien

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C. \blacktriangleright$$

Hállense las integrales aplicando la fórmula de integración por partes:

1.114. $\int \arccos x\, dx$. **1.115.** $\int x \cos x\, dx$.

1.116. $\int x \ln x\, dx$. **1.117.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

1.118. $\int (x^2 - x + 1) \ln x\, dx$. **1.119.** $\int x^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

1.120. $\int x^2 e^{-x}\, dx$. **1.121.** $\int x^3 e^x\, dx$.

1.122*. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$. **1.123.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$.

1.124. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$. **1.125.** $\int \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\, dx$.

1.126. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$. **1.127.** $\int e^{\arccos x}\, dx$.

1.128. $\int \ln (x + \sqrt{1 + x^2})\, dx$. **1.129.** $\int x^3 \ln x\, dx$.

1.130. $\int x3^x\,dx$. **1.131.** $\int (x^2-2x+3)\cos x\,dx$.

1.132. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. **1.133.** $\int \cos(\ln x)\,dx$.

Hállense las integrales, empleando métodos diferentes:

1.134*. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. **1.135.** $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$.

1.136. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}\,dx$. **1.137.** $\int x\operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

1.138. $\int \frac{\cos^2 x}{e^x}\,dx$. **1.139*.** $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$.

1.140.** Dedúzcase la fórmula recurrente para la integral $I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Hállense I_2 y I_3.

Hállense las integrales:

1.141.** $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$. **1.142**.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

1.143. $\int x\operatorname{arcsen} x\,dx$. **1.144.** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$.

1.145. $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$. **1.146.** $\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1.147*. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

§ 2. Integración de las clases principales de funciones elementales

1. Integrales elementales que contienen un trinomio de segundo grado. Las *integrales del tipo*

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

se reducen a las integrales tabulares 10—14 (véase el p. 1, § 1) *formando un cuadrado perfecto* en el trinomio de segundo grado.

EJEMPLO 1. Hállese $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$.

◀ Tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+2)^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C. \blacktriangleright$$

Las *integrales de la forma*

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx \quad \text{y} \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

se reducen a las del tipo

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

formando en el numerador la derivada $2ax+b$ del trinomio de segundo grado.

EJEMPLO 2. Hállese $\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}\,dx$.

◀ Por cuanto $(3x^2+2x+1)'=6x+2$, $x-1=\frac{1}{6}(6x^2+2)-\frac{4}{3}$, se tiene

$$\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}\,dx=\frac{1}{6}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1}\,dx-\frac{4}{3}\int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1)-\frac{4}{9}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{2}+C. \blacktriangleright$$

Las *integrales del tipo*

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (r=1,\ 2)$$

se reducen a las integrales examinadas más arriba con ayuda de la sustitución $mx+n=\frac{1}{t}$.

EJEMPLO 3. Hállese $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

◀ Suponemos $x=\frac{1}{t}$. Entonces, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-2x-1}=$

$$=\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}=\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t} \quad \text{y}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}=-\int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}}=$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}} = -\operatorname{arcsen}\frac{t+1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\operatorname{arcsen}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2}} + C = -\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{x\sqrt{2}} + C. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.1. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$. 2.2. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$.

2.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$ 2.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

2.5. $\int \frac{dx}{x^2-6x}$. 2.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$.

2.7. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+4}$. 2.8. $\int \frac{dx}{x^2-3x+3}$.

2.9. $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}\,dx$. 2.10. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}\,dx$.

2.11. $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+13}$. 2.12. $\int \frac{3^x\,dx}{3^{2x}-4\cdot 3^x+3}$.

2.13. $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6}\,dx$. 2.14. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

2.15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$. 2.16. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$.

2.17. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}$. 2.18. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}$.

2. Integración de fracciones racionales. Las fracciones del tipo $\frac{A}{x-\alpha}$, $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, donde $k = 2, 3, \ldots$; A, B, α, p, q son constantes, siendo $p^2 - 4q < 0$, llevan el nombre de fracciones *simples*.

Las integrales de las fracciones simples de los dos primeros tipos se calculan de un modo elemental, la integración de una fracción simple de tercer tipo se ha examinado en el ejemplo 2.

La integración de la fracción de cuarto tipo, después de hacer en el numerador una derivada del trinomio de segundo grado que figura en el denominador y formado un cuadrado perfecto en dicho trinomio, se reduce al cálculo de las integrales

$$\int (x^2+px+q)^{-k}\,d\,(x^2+px+q) = -\frac{1}{(k-1)\,(x^2+px+q)^{k-1}}$$

y

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}.$$

La última integral puede calcularse según la fórmula concurrente (véase el problema 1.140).

La integración de la fracción racional arbitraria $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0}$ con coeficientes reales se efectúa, en el caso general, del modo siguiente.

1) Si $m \geqslant n$, es decir, si la fracción inicial $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ es *impropia*, se debe separar previamente en esta fracción la *parte entera*, esto es, representarla en la forma

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}, \qquad (1)$$

donde $M_{m-n}(x)$ y $R_r(x)$ son polinomios de grados $m-n \geqslant 0$ y r, respectivamente, además $r < n$, es decir, la fracción $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ es *propia*.

La separación de la parte entera en la fracción $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se realiza mediante la división del numerador por el denominador.

EJEMPLO 4. Sepárese la parte entera de la fracción

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)}.$$

◀ La fracción es impropia, dado que $m = 6 > n = 3$. Con el fin de separar la parte entera escribamos el numerador y el denominador en la forma canónica:

$$(x^2+1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1,$$

$$x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x,$$

y, a continuación, realizando la división del primer polinomio por el segundo, obtenemos el cociente $x^3 + 2x^2 + 6x + 10$ y el resto $17x^2 - 10x + 1$. Por consiguiente,

$$\frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)} = x^3 + 2x^2 + 6x + 10 + \frac{17x^2 - 10x + 1}{x^3 - 2x^2 + x},$$

y la separación de la parte entera queda finalizada. ▶

2. Según muestra la fórmula (1), la operación de separación de la parte entera reduce la integración de una fracción racional arbitraria a la de un polinomio y de una fracción racional propia.

La integración de la fracción racional propia $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m < n$, se efectúa mediante el desarrollo de la fracción en una suma de fracciones simples de los cuatro tipos mencionados más arriba, seguido de una integración ulterior.

El desarrollo citado se lleva a cabo de la manera siguiente. Supongamos que el denominador $Q_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ tiene raíces reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ cuya multiplicidad es $s_1, \ldots, s_l$ y pares complejos conjugados de las raíces $\beta_1, \bar{\beta}_1, \ldots, \beta_h, \bar{\beta}_h$ cuya multiplicidad es $t_1, \ldots, t_h$, respectivamente, $(s_1 + \ldots + s_l + 2t_1 + \ldots + 2t_h = n)$, es decir, se verifica el desarrollo

$$Q_n(x) = a_n (x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1} \ldots \ldots (x^2 + p_h x + q_h)^{t_h},$$

donde

$$x^2 + p_\nu x + q_\nu = (x - \beta_\nu)(x - \bar{\beta}_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, k.$$

Entonces, el desarrollo de la fracción $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ en una suma de fracciones simples tendrá por expresión

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{s_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(l)}}{x-\alpha_l} + \ldots + \frac{A_{s_l}^{(l)}}{(x-\alpha_l)^{s_l}} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{B_{t_1}^{(1)}x + C_{t_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1}} + \ldots + \frac{B_1^{(h)}x + C_1^{(h)}}{x^2 + p_h x + q_h} + \ldots + \frac{B_{t_h}^{(h)}x + C_{t_h}^{(h)}}{(x^2 + p_h x + q_h)^{t_h}}. \qquad (2)$$

Los coeficientes A_i, B_i y C_i en este desarrollo se determinan igualando entre sí los coeficientes que tienen las mismas potencias de x del polinomio $P_m(x)$ y del que se obtiene en el numerador del segundo miembro (2) después de reducirlo a un denominador común (método de coeficientes indeterminados). Los coeficientes mencionados pueden determinarse también suponiendo x, en la igualdad (2) o alguna otra equivalente, igual a los números adecuadamente elegidos (en primer lugar, a los valores de las raíces reales del denominador $Q_n(x)$).

EJEMPLO 5. Calcúlese $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}\,dx$.

◀ La fracción $\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}$ es propia y su desarrollo en una suma de fracciones simples tiene la forma

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Reduciendo el segundo miembro a un denominador común, obtenemos

$$x^2 + 4x + 4 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \qquad (3)$$

(igualdad idéntica de los numeradores), de donde, igualando entre sí los coeficientes que tienen las mismas potencias de x, tenemos

$$A + B = 1, \quad -2A - B + C = 4, \quad A = 4,$$

y a continuación hallamos

$$B = -3, \quad C = 9.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2} \right) dx =$$

$$= 4 \ln |x| - 3 \ln |x-1| - \frac{9}{x-1} + C.$$

Se podrían determinar los coeficientes A, B, C suponiendo en la identidad (3) $x = 0$, $x = 1$, y, adicionalmente, $x = -1$. En este caso, para $x = 0$ hallamos $A = 4$; para $x = 1$ tenemos $C = 9$, y para $x = -1$ se tiene $4A + 2B - C = 1$, es decir, $B = -3$.

Al resolver el ejemplo en consideración sería mejor combinar ambos métodos mencionados, es decir, hallar $A = 4$ para $x = 0$, $C = 9$ para $x = 1$, y determinar B a partir de la condición de igualdad de los coeficientes que en (3) tienen x^2, es decir, de la igualdad $A + B = 1$. ▶

Ejemplo 6. Calcúlese $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

◀ La fracción $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ es propia y su desarrolo en una suma de fracciones simples tendrá la forma

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Tenemos

$$1 = A(x^2+1)^2 + Bx^2(x^2+1) + Cx(x^2+1) + Dx^2 + Ex.$$

Suponiendo $x = 0$, encontramos $A = 1$. Igualando entre sí los coeficientes que tienen las mismas potencias de x, obtenemos $0 = A + B$, $0 = C$, $0 = 2A + B + D$, $0 = C + E$, es decir, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$ y $E = 0$.

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx =$$

$$= \ln |x| - \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

Ha de notarse que el desarrollo de la fracción $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ en fracciones simples puede obtenerse también sin que se emplee el método de los coeficientes indeterminados, a saber

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=$$
$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.19. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$. **2.20.** $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

2.21. $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$. **2.22.** $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx$.

2.23. $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$. **2.24.** $\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^3}dx$.

2.25. $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$. **2.26.** $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

2.27*. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^3}$. **2.28*.** $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

2.29. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$. **2.30.** $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$.

2.31. $\int \frac{dx}{x^3+8}$. **2.32.** $\int \frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2}dx$.

2.33. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx$. **2.34.** $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$.

Calcúlense las integrales sin recurrir al método de los coeficientes indeterminados:

2.35*. $\int \frac{dx}{x^4+a^2x^2}$. **2.36*.** $\int \frac{dx}{x^4-a^4}$.

2.37. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+3}$. **2.38*.** $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$.

2.39. $\int \frac{dx}{x^7+x^5}$. **2.40*.** $\int \frac{x^7}{(x^4+1)(x^4-2)}dx$.

2.41. $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^9}dx$. **2.42.** $\int \frac{x^5+x^2}{x^9+x^3-2}dx$.

3. Integración de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

a) Integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$.

Si al menos uno de los números m ó n es entero positivo impar, entonces, separando de la potencia impar un factor y expresando con

ayuda de la fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ la potencia par restante en términos de una función complementaria, llegamos a una integral tabular.

EJEMPLO 7. Calcúlese $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \operatorname{sen} x\, dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, d\cos x =$$

$$= -\int \frac{d-\cos x}{\sqrt[4]{\cos x}} + \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, d\cos x =$$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x} + C. \blacktriangleright$$

Si m y n son números pares no negativos, las potencias se reducen pasando a un argumento doble con ayuda de las fórmulas trigonométricas:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

EJEMPLO 8. Calcúlese $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos^2 x\, dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^2 2x\, d \operatorname{sen} 2x = \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C. \blacktriangleright$$

Si $m + n = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, es decir, $m + n$ es un número no negativo par y entero, entonces resulta más conveniente utilizar las sustituciones $\operatorname{tg} x = t$ ó $\operatorname{ctg} x = t$.

EJEMPLO 9. Calcúlese $\int \operatorname{sen}^{1/3} x \cos^{-13/3} x\, dx$.

◀ Puesto que $\frac{1}{3}-\frac{13}{3}=-4$, el cálculo de la integral se reduce a la integración de las potencias de una tangente:

$$\int \operatorname{sen}^{1/3} x \cos^{-13/3} x\, dx = \int \operatorname{tg}^{1/3} x \frac{dx}{\cos^4 x} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{1/3} x (1+\operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^{1/3} x\, d \operatorname{tg} x +$$

$$+ \int \operatorname{tg}^{7/3} x\, d \operatorname{tg} x = \frac{3}{4} \operatorname{tg}^{4/3} x + \frac{3}{10} \operatorname{tg}^{10/3} x + C. \blacktriangleright$$

Para el cálculo de las integrales del tipo $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$, $\int \operatorname{ctg}^m x\, dx$, donde $m=2, 3, \ldots$, se usan las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

EJEMPLO 10. Calcúlese $\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx = \int \operatorname{ctg}^2 x (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx =$$

$$= -\int \operatorname{ctg}^2 x\, d \operatorname{ctg} x - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x + C. \blacktriangleright$$

En el caso general las integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, donde m y n son números enteros, se calculan con ayuda de las fórmulas recurrentes, las que se deducen mediante la integración por partes.

EJEMPLO 11. Dedúzcase la fórmula recurrente para $\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}$ y calcúlese con su ayuda $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

◀ Tenemos:

$$I_{2k+1} = \int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^{2k+1} x}\, dx =$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{2k+1} x}\, dx + \int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x} = \int \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2k+1} x}\, dx + I_{2k-1}.$$

Suponemos $u = \operatorname{sen} x$, $dv = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2k+1} x}\,dx$. Entonces, $du = \cos x\,dx$, $v = -\dfrac{1}{2k\cos^{2k} x}$, y mediante la integración por partes, obtenemos

$$I_{2k+1} = \frac{\operatorname{sen} x}{2k\cos^{2k} x} - \frac{1}{2k}\int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x} + I_{2k-1},$$

o bien

$$I_{2k+1} = \frac{\operatorname{sen} x}{2k\cos^{2k} x} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_{2k-1}$$

(fórmula recurrente).

En particular, para $k = 1$ tenemos

$$I_3 = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.43. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$. **2.44.** $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^8 x}\,dx$.

2.45. $\int \cos^7 x\,dx$. **2.46.** $\int \cos^4 \dfrac{x}{2}\,dx$.

2.47. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$. **2.48.** $\int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

2.49. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^6 x}$. **2.50.** $\int \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

2.51. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos^5 x}$. **2.52.** $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^4 x \cos^2 x}$.

2.53. $\int \dfrac{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$. **2.54.** $\dfrac{dx}{\cos^5 x}$.

2.55. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$. **2.56.** $\int \left(\operatorname{ctg}^3 \dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg}^4 \dfrac{x}{2}\right) dx$.

2.57. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\cos x \operatorname{sen}^3 x}}$. **2.58.** $\int \cos^5 x\,dx$.

2.59. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$. **2.60.** $\int \operatorname{sen}^6 2x\,dx$.

2.61. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. **2.62.** $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{3} \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3}}$.

2.63. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x}$. **2.64.** $\int \cos x \cos^2 2x \, dx$.

b) Para integrar los productos de los senos y cosenos de distintos argumentos se emplean las fórmulas trigonométricas:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)).$$

EJEMPLO 12. Hállese $\int \cos 9x \cos 5x \, dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \cos 9x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x + \cos 14x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{28}\operatorname{sen} 14x + C. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.65. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx$. **2.66.** $\int \operatorname{sen} 10x \operatorname{sen} 15x \, dx$.

2.67. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \, dx$. **2.68.** $\int \operatorname{sen} \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \, dx$.

2.69. $\int \cos x \cos^2 3x \, dx$. **2.70.** $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x \, dx$.

c) Las integrales del tipo

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx,$$

donde $R(u, v)$ es una función racional de dos variables, se reducen a las integrales de la función racional de un argumento nuevo t mediante la sustitución $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. En este caso se emplean las fórmulas

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

EJEMPLO 13. Calcúlese $\int \frac{dx}{4\cos x+3\operatorname{sen} x+5}$.

◀ Suponemos $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Entonces

$$\int \frac{dx}{4\cos x+3\operatorname{sen} x+5}=2\int \frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+5\right)(1+t^2)}=$$

$$=2\int \frac{dt}{t^2+6t+9}=2\int \frac{dt}{(t+3)^2}=-\frac{2}{t+3}+C=$$

$$=-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}+C. \blacktriangleright$$

Si sen x y cos x figuran bajo el signo de integral sólo en potencias pares, será más cómodo utilizar la sustitución $\operatorname{tg} x = t$.

EJEMPLO 14. Calcúlese $\int \frac{dx}{1-5\operatorname{sen}^2 x}$.

◀ Al dividir el numerador y el denominador por $\cos^2 x$ y hacer uso de la sustitución $\operatorname{tg} x = t$, obtendremos:

$$\int \frac{dx}{1-5\operatorname{sen}^2 x}=\int \frac{d\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg}^2 x}=\int \frac{dx}{1-4t^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\frac{1+2\operatorname{tg} x}{1-2\operatorname{tg} x}+C. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.71. $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$. **2.72.** $\int \frac{dx}{3-2\operatorname{sen} x+\cos x}$.

2.73*. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$. **2.74.** $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen}^2 x-7\cos^2 x}$.

2.75. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x-2\cos x+5}\,dx$.

2.76. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+4\cos^2 x}\,dx$. **2.77.** $\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen} x}$.

2.78*. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x+4)(\operatorname{sen} x-1)}$.

2.79. $\int \frac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x}\,dx$.

2.80. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+8\operatorname{sen} x\cos x+12\cos^2 x}$.

d) La integración de las funciones hiperbólicas se realiza igual que la de las funciones trigonométricas, con la particularidad de que se emplean las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1), \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1),$$

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \operatorname{sch}^2 x, \qquad 1 - \operatorname{cth}^2 x = \operatorname{csch}^2 x.$$

Calcúlense las integrales:

2.81. $\int \operatorname{ch}^2 3x\, dx$. **2.82.** $\int \operatorname{sh}^3 2x\, dx$.

2.83. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx$. **2.84.** $\int \operatorname{ch}^4 x\, dx$.

2.85. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 x}\, dx$. **2.86*.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4 \operatorname{sh}^2 x}$.

2.87*. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - 1}$. **2.88.** $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1}\, dx$.

2.89. $\int \operatorname{cth}^3 x\, dx$. **2.90.** $\int \operatorname{th}^4 x\, dx$.

4. Integración de ciertas funciones irracionales. a) Las integrales del tipo

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right) dx,$$

donde $R(x, y, z, \ldots)$ es una función racional de sus argumentos y m_1, n_1, m_2, n_2, son números enteros, se calculan con ayuda de la sustitución $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, donde s es el denominador común para las fracciones $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, ...

EJEMPLO 15. Calcúlese $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt[4]{x+3}}$.

◀ Hagamos una sustitución $x+3=t^4$. Entonces, $dx=4t^3\,dt$, y, por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+3}-1\sqrt{x+3}} = 4\int \frac{t^3\,dt}{(t-1)\,t^2} = 4\int \frac{t\,dt}{t-1} =$$

$$= 4\int \frac{(t-1)+1}{t-1}\, dt = 4(t + \ln|t-1|) + C =$$

$$= 4(\sqrt[4]{x+3} + \ln|\sqrt[4]{x+3}-1|) + C. \blacktriangleright$$

Hállense las integrales:

2.91. $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$. **2.92.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

2.93. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$. **2.94.** $\int \frac{\sqrt[6]{x+a-1}}{(x+a)\left(1+\sqrt[3]{x+a}\right)}\,dx$.

2.95. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3}$. **2.96** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$.

2.97. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$. **2.98.** $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

b) El cálculo de las integrales del tipo

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

donde R es una función racional de dos argumentos, se realiza con ayuda de sustituciones trigonométricas de la manera siguiente. Formando un cuadrado perfecto en el trinomio de segundo grado y realizando, a continuación, el cambio de variable $u = x + \frac{b}{2a}$, la integral de partida se reduce a la integral de uno de los tres tipos siguientes:

1) $\int R\left(u, \sqrt{l^2-u^2}\right)du$,

2) $\int R\left(u, \sqrt{l^2+u^2}\right)du$,

3) $\int R\left(u, \sqrt{u^2-l^2}\right)du$.

Las últimas integrales se reducen a las integrales del tipo $\int R\,(\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt$, o bien $\int R\,(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)\,dt$ por medio de las sustituciones trigonométrica o hiperbólica

1) $u = l \operatorname{sen} t$ ó $u = l \operatorname{th} t$,
2) $u = l \operatorname{tg} t$ ó $u = l \operatorname{sh} t$,
3) $u = l \sec t$ ó $u = l \operatorname{ch} t$, respectivamente.

Ejemplo 16. Calcúlese $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

◀ Formando un cuadrado perfecto en el trinomio de segundo grado, tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+4x+7)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u+3)^3}}, \quad \text{donde} \quad u = x+2.$$

Realizando la sustitución $u=\sqrt{3}\operatorname{tg} t$, $du=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt$, $\sqrt{u^2+3}=$

$=\sqrt{3}\sec t$, obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+3)^3}}=\int \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t\sqrt{3^3}\operatorname{sen}^3 t}\,dt=\frac{1}{3}\int \cos t\,dt=$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{sen} t+C=\frac{1}{3}\frac{u}{\sqrt{u^2+3}}=\frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}+C. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 17. Calcúlese $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

◀ Realizamos la sustitución $x=a\operatorname{ch} t$. Entonces, $dx=a\operatorname{sh} t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{sh} t$, y luego

$$\int \sqrt{x^2-a}\,dx=a^2\int \operatorname{sh}^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(\operatorname{ch} 2t-1)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{3}-t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t-t)+C=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.99. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$.

2.100. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$.

2.101. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$. **2.102.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

2.103. $\displaystyle\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$. **2.104.** $\displaystyle\int \sqrt{(3-2x-x^2)^3}\,dx$.

2.105. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$. **2.106.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$.

2.107. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx$. **2.108.** $\displaystyle\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

2.109. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}\,dx$. **2.110.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$.

2.111. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$. **2.112.** $\displaystyle\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$.

§ 3. Problemas mixtos de integración

Calcúlense las integrales

3.1. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}\,dx$. 3.2. $\int \frac{x^3}{x^2-x-1}\,dx$.

3.3. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}$. 3.4. $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$.

3.5. $\int \frac{dx}{x^5(x^4+1)^2}$. 3.6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

3.7. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}}$. 3.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x+4}}$.

3.9. $\int x\sqrt{x^2-4}dx$. 3.10. $\int x\sqrt{x^2+4x-5}\,dx$.

3.11. $\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx$. 3.12. $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{16-x^2}}$.

3.13. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+16}}$. 3.14 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$.

3.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}$. 3.16. $\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

3.17. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$. 3.18. $\int \frac{x\,dx}{1+\cos x}$.

3.19. $\int \frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^4}\,dx$. 3.20. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

3.21. $\int \frac{dx}{3-4\operatorname{sen}^2 x}$. 3.22. $\int \frac{2-\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

3.23. $\int \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x}{\sqrt{5-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$. 3.24. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x+5}\,dx$.

3.25. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^5 x}$. 3.26. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

3.27. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^6 x}$. 3.28. $\int x \operatorname{sen} x \cos 2x\,dx$.

3.29. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$. 3.30. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x}$.

3.31. $\int \operatorname{th}^5 x\,dx$. 3.32. $\int \frac{\operatorname{ch}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

3.33. $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}$. 3.34. $\int \operatorname{sen}^2(\ln x)\,dx$.

3.35. $\int xe^{2x}\,dx$. 3.36. $\int xe^{-x^2}\,dx$.

3.37. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4e^x-5}$. 3.38. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}\,dx$.

3.39. $\int e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx$. 3.40. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$.

3.41. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}\,\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 3.42. $\int \frac{\operatorname{arcsen} e^x}{e^x}\,dx$.

3.43. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. 3.44. $\int x(1+x^2)\operatorname{arctg} x\,dx$.

3.45. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx$. 3.46. $\int x \ln(4+x^4)\,dx$.

3.47. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$.

3.48. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3.49. $\int x^x(1+\ln x)\,dx$.

3.50. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\,dx$.

§ 4. Integral definida y métodos de su cálculo

1. **Integral definida como límite de una suma integral.** Si una función $f(x)$ está definida en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, y $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ es una partición arbitraria de este segmento en n partes (fig. 56), entonces la *suma integral* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ se denomina suma de la forma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

donde $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. En el lenguaje geométrico S_n es una suma algebraica de áreas de los rectángulos de base Δx_k y de altura $f(\xi_k)$.

Si la función $f(x)$, definida en el segmento $[a, b]$, es tal que existe un límite finito de la sucesión de sumas integrales S_n, a condición de que la máxima de las diferencias Δx_k tiende a cero, con la particularidad de que dicho límite no depende del modo de que el segmento $[a, b]$ se divide en segmentos $[x_{k-1}, x_k]$ ni tampoco de la elección de los puntos ξ_k en los segmentos mencionados, entonces la función $f(x)$ se denomina *integrable* en el segmento $[a, b]$, mientras que el propio límite lleva el nombre de *integral definida* de la función $f(x)$

dentro de los límites de a hasta b y se designa mediante el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$. De este modo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \qquad (1)$$

Una función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, es integrable en él.

Geométricamente la integral definida (1) representa la suma algebraica de las áreas de las figuras limitadas por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a$ y $x = b$, con la particula-

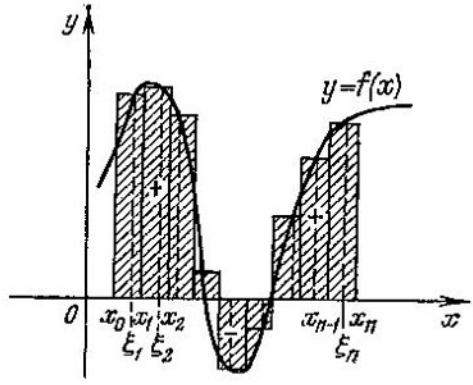


Fig. 56

ridad de que las áreas dispuestas por arriba del eje Ox figuran en dicha suma con el signo más, y las que se disponen por debajo del eje Ox, con el signo menos.

EJEMPLO 1. Calcúlese $\int_1^2 x^2\,dx$, considerando la integral definida como límite de las sumas integrales.

1er MÉTODO. Dividamos el segmento de integración $[1, 2]$ en n partes iguales de la longitud $\Delta x = \frac{1}{n}$. Los puntos de división:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad x_2 = 1 + \frac{2}{n}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n}, \quad x_n = 2.$$

A título de puntos ξ_k elijamos, por ejemplo, los extremos izquierdos de cada uno de los segmentos parciales. Entonces

$$f(x_0)=1,\ f(x_1)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2,\ f(x_2)=$$
$$=\left(1+\frac{2}{n}\right)^2,\ \ldots\ f(x_{n-1})=\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Por consiguiente,

$$S_n=\frac{1}{n}\left(1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{n^3}\left(n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(2n-1)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right).$$

Aplicando la fórmula para la suma de los cuadrados de números enteros

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

hallamos

$$S_n=\frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n-1)\,2n\,(4n-1)}{6}-\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\right)=\frac{14n^2-9n+1}{6n^2},$$

de donde

$$\int_1^2 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{14n^2-9n+1}{6n^2}=\frac{7}{3}.$$

2do MÉTODO. Dividamos el segmento $[1, 2]$ en partes de modo tal que las abscisas de los puntos de división formen una progresión geométrica:

$$x_0=1,\quad x_1=q,\quad x_2=q^2,\ \ldots,\ x_{n-1}=q^{n-1},\qquad x_n=q^n=2,$$

donde $q=2^{1/n}$. El punto ξ_k se eligirá en el extremo izquierdo del k-ésimo segmento. Entonces

$$f(x_0)=1,\quad f(x_1)=q^2,\quad f(x_2)=q^4,\ \ldots,\ f(x_{n-1})=q^{2(n-1)},$$
$$\Delta x_1=q-1,\ \Delta x_2=q^2-q=q(q-1),$$
$$\Delta x_3=q^2(q-1),\ \ldots,\ \Delta x_n=q^{n-1}(q-1),$$
$$S_n=1\cdot(q-1)+q^2(q-1)+q^4(q-1)+\ldots$$
$$\ldots+q^{2(n-1)}(q-1)=(q-1)(1+q^2+q^4+\ldots$$

$$\ldots + q^{3(n-1)} = (q-1)\frac{q^{3n}-1}{q^3-1} = \frac{q^{3n}-1}{q^2+q+1} =$$

$$= \frac{2^3-1}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1}.$$

Por consiguiente,

$$\int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{3}. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales definidas considerándolas como límites de las sumas integrales correspondientes:

4.1*. $\int_0^5 (1+x)\,dx$. **4.2*.** $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

4.3*. $\int_0^{10} e^x\,dx$. **4.4*.** $\int_0^3 \frac{dx}{x^2}$.

2. Cálculo de las integrales elementales con ayuda de la fórmula de Newton-Leibniz. Si $F(x)$ es una de las primitivas de la función $f(x)$, continua en $[a, b]$, resulta válida la siguiente *fórmula de Newton-Leibniz*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

EJEMPLO 2. Calcúlese $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

◀ Tenemos

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} =$$

$$= \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 \approx 0{,}69. \blacktriangleright$$

Haciendo uso de la fórmula de Newton — Leibniz, calcúlense las integrales:

4.5. $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$. **4.6.** $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

4.7. $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$. 4.8. $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})\,dx$.

4.9. $\int_1^8 \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx$. 4.10. $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$.

4.11. $\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$. 4.12. $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

4.13. $\int_1^2 e^x\,dx$. 4.14. $\int_0^3 2^x\,dx$.

4.15. $\int_2^5 \frac{dx}{x}$. 4.16. $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$.

4.17. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$. 4.18. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 \varphi\,d\varphi$.

4.19. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\,dx$. 4.20. $\int_0^2 \operatorname{sh}^3 x\,dx$.

4.21. $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. 4.22. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

4.23. $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$. 4.24. $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x+1}}{x^3-x^2}\,dx$.

4.25. $\int_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx$. 4.26. $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

4.27. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$. 4.28. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 \alpha\,d\alpha$.

4.29. $\int_0^{1/3} \operatorname{ch}^2 3x\,dx$. 4.30. $\int_2^3 \frac{dy}{y^2-2y-8}$.

4.31. $\int\limits_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. 4.32. $\int\limits_{0}^{2} \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$.

4.33. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

Hállense los límites de las sumas con ayuda de las integrales definidas:

4.34**. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

4.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\times$

$$\times\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos 2\frac{\pi}{2n}+\ldots+\cos(n-1)\frac{\pi}{2n}\right).$$

4.36. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

Calcúlense las áreas de las figuras limitadas por líneas:

4.37. $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=0$, $x=2$, $x=3$.

4.38. $y=\sqrt[3]{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=8$.

4.39. $y=6-x-2x^2$, $y=x+2$.

4.40. $y=\frac{x^2}{4}$, $y=2\sqrt{x}$.

4.41. $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{4}$.

4.42. $y=e^{-x}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

4.43. $y=\frac{2}{x}$, $y=0$, $x=2$, $x=3$.

4.44. $y=\frac{3}{x}$, $x+y=4$.

3. Propiedades de la integral definida.

1) Si $f(x)\geqslant 0$ en el segmento $[a, b]$, entonces $\int\limits_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$.

2) Si $f(x) \leqslant g(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$

4) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, m y M son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

(*teorema de la estimación de una integral indefenida*).

EJEMPLO 3. Estímese la integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

◀ Tenemos: $1 \leqslant 1+x^4 \leqslant 2$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant 1,$$

es decir, $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b-a = 1$. Por consiguiente, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant I \leqslant 1$. ▶

5) Si $f(x)$ es continua y $g(x)$ es integrable en $[a, b]$, $g(x) \geqslant 0$, mientras que m y M son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

(*teorema generalizado de la estimación de una integral definida*).

6) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, existe tal punto $c \in (a, b)$ que se verifica la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(*teorema del valor medio*).

El número

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

recibe el nombre de *valor medio* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

7) Si $f(x)$ es continua y $g(x)$ es integrable en $[a, b]$ y, además, $g(x) \geqslant 0$, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que se verifica la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx$$

(*teorema generalizado del valor medio*).

8) Si $f^2(x)$ y $g^2(x)$ son integrables en $[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx}$$

(*desigualdad de Cauchy—Buniakovski*).

9) Integración de las funciones *pares* e *impares* dentro de los límites simétricos. Si una función $f(x)$ es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. Si la función $f(x)$ es impar, se tiene $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

10) Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, la *integral de límite superior variable*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

será una primitiva para la función $f(x)$, es decir,

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x). \qquad x \in [a, b].$$

11) Si las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son derivables en el punto $x \in (a, b)$ y $f(t)$ es continua para $\varphi(a) \leqslant t \leqslant \psi(b)$, entonces

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt \right)'_x = f(\psi(x))\,\psi'(x) - f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

EJEMPLO 4. $I(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$. Hállese $I'(x)$.

◀ Haciendo uso de la propiedad 11) y tomando en consideración que $\varphi(x) = 0$, es decir, $\varphi'(x) = 0$, tenemos

$$I'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{-x^4}. \blacktriangleright$$

4.45. Determínense los signos de las integrales sin calcularlas:

a)* $\int_{-2}^{1} \sqrt[3]{x}\, dx$; b) $\int_{-1}^{1} x^3 e^x\, dx$; c) $\int_{1/3}^{1} x \ln x\, dx$.

4.46. Sin calcular las integrales, aclárese cuál de ellas es mayor:

a) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ó $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; b) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ ó $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$;

c) $\int_0^1 e^{-x} \cos^2 x\, dx$ ó $\int_0^1 e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$.

4.47. Hállese el valor medio de la función en el segmento dado:

a) x^3, $0 \leqslant x \leqslant 1$; b) $\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$;

c) $\sqrt[3]{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; d) $\cos^3 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

4.48. La intensidad de la corriente alterna varía de acuerdo con la ley $I = I_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$, donde T es el período. Hállese el valor medio de la intensidad de corriente por un semiciclo.

4.49. Estímese la integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}\, dx$.

4.50. Estímese la integral $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\operatorname{sen} x}}$.

4.51. Estímese la integral $\int_0^1 \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\, dx$,

haciendo uso:

a) del teorema generalizado de la estimación de una integral;

b) de la desigualdad de Cauchy — Buniakovski.

4.52. Estímese la integral $\int_0^1 \sqrt{(4+x^3)}\, x\, dx$, haciendo uso:

a) del teorema generalizado de la estimación de una integral;

b) desigualdad de Cauchy — Buniakovski.

4.53. Hállense: a) $\frac{dI}{d\beta}$, b) $\frac{dI}{d\alpha}$, si

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{e^x}{x}\, dx \quad (0 < \alpha < \beta).$$

4.54. Hállense los puntos de extremo de la función

$$\Phi(x) = \int_a^x \frac{\cos t}{t}\, dt \quad \left(x > 0,\ 0 < a < \frac{\pi}{2}\right).$$

Hállense las derivadas de las siguientes funciones:

4.55. $\Phi(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$

4.56. $\Phi(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\, dt.$

4.57. $\Phi(x) = \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}.$

4.58. $\Phi(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$ $(x > 0).$

4.59. Demuéstrese que

$$\int_{-3}^{3} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{1+x^4}\, dx = 0.$$

4. Cambio de variable en la integral definida. Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, y la función $x = \varphi(t)$ es continuamente derivable en el segmento $[t_1, t_2]$, además $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$,

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

EJEMPLO 5. Calcúlese $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$.

◀ Apliquemos la sustitución $x = \operatorname{sen} t$. Entonces $dx = \cos t\ t$, $t = \operatorname{arcsen} x$, $t_1 = \operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ y $t_2 = \operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2}$. Por consiguiente,

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}{\operatorname{sen}^2 t} \cos t\,dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt = (-\operatorname{ctg} t - t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}. \blacktriangleright$$

4.60. ¿Se podrá calcular la integral $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ con ayuda de la sustitución $x = \operatorname{sen} t$?

Calcúlense las integrales con ayuda de las sustituciones indicadas:

4.61. $\displaystyle\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$, $3x-2=t^2$.

4.62. $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$, $e^x+1=t^2$.

4.63. $\displaystyle\int_0^{\operatorname{sh} 1} \sqrt{x^2+1}\,dx$, $x = \operatorname{sh} t$.

4.64. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+2\cos x}$, $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$.

4.65. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\operatorname{sen}^2 x}$, $\operatorname{tg} x = t$.

4.66. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$, $x+1 = 2\operatorname{sen} t$.

Calcúlense las integrales con ayuda del cambio de variable:

4.67. $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **4.68.** $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$.

4.69. $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$. **4.70.** $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

4.71. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2}$. **4.72.** $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$.

4.73. $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$. **4.74.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

4.75. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\,dx$. **4.76.** $\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

4.77. Muéstrese que $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_{1}^{2} \frac{e^x}{x}\,dx$.

4.78. Muéstrese que $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{\operatorname{arcsen} x} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

4.79. Convénzase de que

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{3x^7-2x^5+x^3-x}{x^4+3x^2+1}\,dx = 0.$$

5. Integración por partes. Si las funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$, al igual que sus derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$, son continuas en el segmento $[a, b]$, entonces

$$\int\limits_{a}^{b} u\,dv = uv\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} v\,du$$

(fórmula de integración por partes).

EJEMPLO 6. Calcúlese $\int\limits_{1}^{e} \ln x\,dx$.

◀ Suponemos $u = \ln x$, $dv = dx$, entonces $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = x$. Tenemos

$$\int_1^e \ln x\, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales empleando el método de integración por partes:

4.80. $\displaystyle\int_0^1 xe^x\, dx$. **4.81.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1+x}}\, dx$.

4.82. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$. **4.83.** $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x\, dx$.

4.84. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 4x\, dx$. **4.85.** $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\, dx$.

4.86. $\displaystyle\int_1^e x \ln x\, dx$. **4.87.** $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$.

4.88. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x\, dx$. **4.89.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$.

4.90. Muéstrese que para la integral

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

es válida la fórmula recurrente $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. Calcúlense I_7 e I_8.

4.91. Muéstrese que para la integral

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

es válida la fórmula recurrente $I_n = -\dfrac{1}{e} + nI_{n-1}$. Calcúlese I_4.

§ 5. Integrales impropias

1. Integrales con límites infinitos. Si la función $f(x)$ es continua para $a \leqslant x < +\infty$, entonces, por definición

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Si existe un límite finito en el segundo miembro de la fórmula (1), la integral impropia se denomina *convergente*; si dicho límite no existe, la integral se llama *divergente*.

Geométricamente la integral impropia (1) es, en el caso cuando $f(x) > 0$, el área de una figura limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, por la recta $x = a$ y por el eje Ox (asíntota).

Análogamente se definen la integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,dx + \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,dx. \tag{2}$$

Los *criterios de convergencia y de divergencia* se dan a conocer sólo para las integrales del tipo (1)

1) Si $F(x)$ es una primitiva para $f(x)$ y existe un límite finito $\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$, entonces la integral (1) converge y es igual a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a);$$

en cambio, si $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ no existe, la integral (1) diverge.

2) Supongamos que para $a \leqslant x < +\infty$ se tiene $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, converge también $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, además $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, también diverge $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (*criterios de comparación*).

3) Si para $a \leqslant x < +\infty$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ y existe un límite finito $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, entonces las integrales $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ y

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergen o divergen simultáneamente (*criterio límite de comparación*).

4) Si converge $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, también converge $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (la última integral en este caso se denomina *absolutamente convergente*).

5. Si para $x \to +\infty$, la función $f(x) > 0$ es un infinitésimo de orden α en comparación con $1/x$, la integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge cuando $\alpha > 1$ y diverge, cuando $\alpha \leqslant 1$.

EJEMPLO 1. Calcúlese $\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \Big|_0^b \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} (1 - e^{-3b}) = \frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Analícese la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx.$$

◀ Tenemos

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La integral dada diverge, puesto que es divergente $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. ▶

Calcúlense las integrales impropias (o bien establézcase su divergencia):

5.1. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$. 5.2. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

5.3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$. 5.4. $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x\,dx$.

5.5. $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4}$. **5.6.** $\int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)}\,dx$.

5.7. $\int_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$. **5.8.** $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

5.9. $\int_0^{+\infty} x\cos x\,dx$.

Analícese la convergencia de las integrales:

5.10. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2+5x^3}$.

5.11. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx$.

5.12. $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5+1}}\,dx$.

5.13. $\int_1^{+\infty} \frac{3+\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

5.14. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$.

5.15. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx$. **5.16.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$.

2. Integrales de las funciones no acotadas. Si la función $f(x)$ es continua para $a \leqslant x < b$, y $f(b) = \infty$, entonces por definición

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma \to 0} \int_a^{b-\gamma} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Si existe un límite finito en el segundo miembro de la fórmula (3), la integral impropia se denomina *convergente*; si este límite no existe, se llama *divergente*.

La integral impropia (3) es geométricamente, en el caso en que $f(x) > 0$, el área de una figura limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, la recta $x = a$ y la asíntota vertical $x = b$.

La integral impropia se determina análogamente para el caso $f(a) = \infty$.

En el caso cuando $c \in (a, b)$ es un punto de discontinuidad y $f(c) = \infty$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma_1 \to 0} \int_a^{c-\gamma_1} f(x)\,dx + \lim_{\gamma_2 \to 0} \int_{c+\gamma_2}^b f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Si la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$ es continua para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces a las integrales (3) — (4) puede aplicarse la fórmula de Newton—Leibniz

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Los criterios de convergencia y divergencia de las integrales impropias de funciones no acotadas son semejantes a los mencionados en el p. 2.

Por lo común sirve de patrón de comparación la integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \qquad (\alpha > 0), \qquad (5)$$

la cual converge cuando $\alpha < 1$, y diverge cuando $\alpha \geqslant 1$.

EJEMPLO 3. Analícese la convergencia de la integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

◀ Cuando $x \to 1$, $\dfrac{1}{\ln x} \sim \dfrac{1}{x-1}$ (infinitos equivalentes), puesto que

$$\lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{1}{\ln x}}{\dfrac{1}{x-1}} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1/x} = 1.$$

La integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ diverge, como sucede con la integral del tipo (5) cuando $\alpha = 1$. Por lo tanto, diverge también $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$. ▶

Calcúlense las integrales impropias (o bien establézcase su divergencia):

5.17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4}$. **5.18.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{4/5}}$.

5.19. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$. **5.20.** $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

5.21. $\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$. **5.22.** $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

5.23. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **5.24.** $\int_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$.

5.25. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Analícese la convergencia de las integrales:

5.26. $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. **5.27.** $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

5.28. $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$. **5.29.** $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}\,dx$.

5.30. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

5.31. Demuéstrese que para $\alpha > 0$ la integral de Euler $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ que define la *función gamma* $\Gamma(\alpha)$, converge y establézcanse las siguientes relaciones:

a) si $\alpha = n$ (un número entero), entonces $\Gamma(n+1) = n!$;

b) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ para cualquier $\alpha > 0$;

c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;

d) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

e) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}$, n es un número entero.

§ 6. Aplicaciones geométricas de la integral definida

1. Área de una figura plana. El área de la figura limitada por la gráfica de la función continua $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$), por dos rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje Ox, o bien el área del *trapecio curvilíneo* limitado por el arco de la gráfica de la función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (fig. 57), se calcula según la fórmula

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

El área de una figura limitada por las gráficas de las funciones continuas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, y por dos rectas

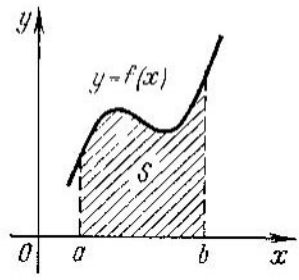


Fig. 57

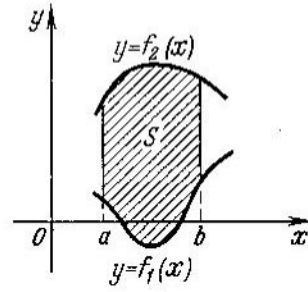


Fig. 58

$x = a$, $x = b$ (fig. 58) se determina según la fórmula

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \tag{2}$$

los problemas más simples en los cuales se emplean las fórmulas (1) y (2) han sido aducidos en el § 4 (problemas 4.37 — 4.44).

EJEMPLO 1. Hállese el área de la figura situada en el semiplano derecho y limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ y la parábola $y^2 = 2x$.

◀ Hallemos los puntos de intersección de las curvas (fig. 59) resolviendo el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 8,$$
$$y^2 = 2x.$$

Obtendremos los puntos (2, 2) y (2, −2). Utilizando la simetría respecto del eje Ox, hallamos el área buscada S como una suma duplicada de las áreas de los trapecios curvilíneos limitados por los arcos de la parábola $y = \sqrt{2x}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, y de la circunferencia $y = \sqrt{8 - x^2}$,

$2 \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$, respectivamente:

$$S = 2\left(\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx\right) = 2\left(\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2} + 4\arcsen\frac{4}{\sqrt{8}}\right)\Big|_2^{\sqrt{8}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} + 2\pi - 2 - \pi\right) = 2\pi + \frac{4}{3}. \blacktriangleright$$

A veces resulta cómodo utilizar las fórmulas, análogas a (1) y (2), pero respecto de la variable y (considerando x como función de y), en particular,

$$S = \int_c^d (f_2(y) - f_1(y))\,dy. \tag{3}$$

EJEMPLO 2. Hállese el área de la figura limitada por la parábola $(y-2)^2 = x-1$, por la tangente a esta parábola en el punto de ordenada $y_0 = 3$ y por el eje Ox.

◀ La forma de la figura (fig. 60) no permite utilizar directamente las fórmulas (1) ó (2). Sin embargo, si dicha figura se considera respecto del eje Oy, podemos aplicar la fórmula (3). Así pues, sea y la

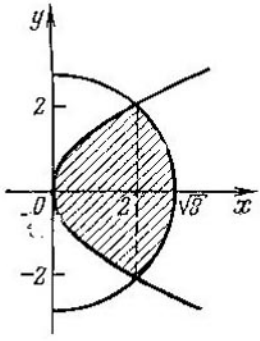


Fig. 59

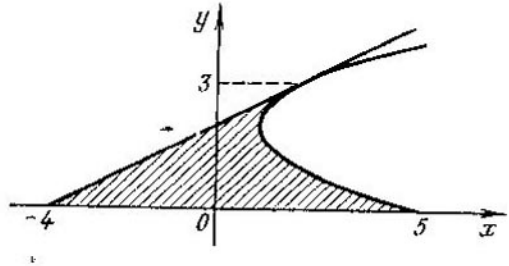


Fig. 60

variable independiente. La ecuación de la parábola se escribirá en la forma $x = y^2 - 4y + 5$.

Hallemos la ecuación de la tangente a la parábola. Esta se expresa: $x - x_0 = x'_0(y - y_0)$. Por cuanto $x'_y = 2(y-2)$, se tiene $x'_0 = x'|_{y=3} = 2$. Hallando, luego, la abscisa del punto de tangencia

$x_0 = 2$, obtenemos la ecuación de la tangente

$$x - 2 = 2(y - 3), \quad \text{o bien } x = 2y - 4.$$

Suponiendo en (3) $f_1(y) = 2y - 4$, $f_2(y) = y^2 - 4y + 5$, tenemos:

$$S = \int_0^3 ((y^2 - 4y + 5) - (2y - 4))\, dy = \int_0^3 (y^2 - 6y + 9)\, dy =$$

$$= \int_0^3 (y-3)^2\, dy = \frac{1}{3}(y-3)^3 \Big|_0^3 = 9. \blacktriangleright$$

Hemos de notar que el empleo de las fórmulas (1) y (2) en la resolución del ejemplo (2) exigiría el cálculo de la suma de tres integrales:

$$S = \int_{-4}^{1} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx + \int_1^2 \left(\left(\frac{1}{2}x + 2\right) - (2 + \sqrt{x-1})\right) dx +$$

$$+ \int_1^5 (2 - \sqrt{x-1})\, dx.$$

EJEMPLO 3. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y = 1/x^2$, el eje Ox y la recta $x = 1$, y situada más a la derecha de dicha recta.

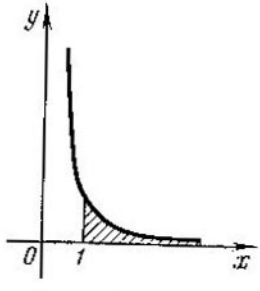


Fig. 61

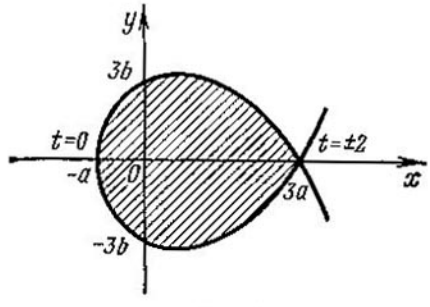


Fig. 62

◀ El área buscada (fig. 61) se expresa por medio de la integral impropia

$$S = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1. \blacktriangleright$$

Si la figura está limitada por una curva, que se expresa por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje Ox, el área de dicha figura se calcula según la fórmula

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, dx(t), \tag{4}$$

donde los límites de integración se hallan a partir de las ecuaciones $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ $y(t) \geqslant 0$ en el segmento $[t_1, t_2]$.

La fórmula (4) puede emplearse también para calcular el área de una figura limitada por una curva cerrada (la variación del parámetro t de t_1 hasta t_2, debe corresponder al recorrido del contorno en sentido horario).

EJEMPLO 4. Hállese el área del bucle de la curva

$$x = a(t^2 - 1),\ y = b(4t - t^3)$$
$$(a > 0,\ b > 0),$$

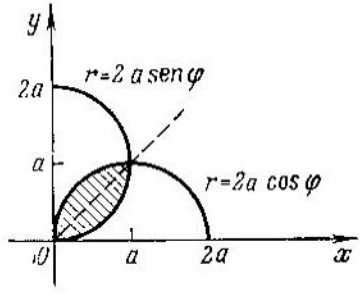


Fig. 63

◀ Hallemos los puntos de intersección de la curva con los ejes coordenados. Tenemos: $x = 0$ cuando $t = \pm 1$; $y = 0$ cuando $t = 0$, $t = \pm 2$. Por lo tanto, obtenemos los puntos siguientes: $(0, 3b)$ para $t = 1$; $(0, -3b)$ para $t = -1$; $(-a, 0)$ para $t = 0$; $(3a, 0)$ para $t = \pm 2$. El punto $(3a, 0)$ es el punto de autointersección de la curva. Para $0 \leqslant t \leqslant 2$ se tiene $y > 0$; para $-2 \leqslant t \leqslant 0$ se tiene $y \leqslant 0$ (fig. 62).

El área de la figura se halla como el área duplicada de su mitad superior:

$$S = 2\int_{-a}^{3a} y\, dx = 2\int_{0}^{2} y(t)\, x'(t)\, dt = 2\int_{0}^{2} b(4t - t^3)\, a \cdot 2t\, dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{2} (4t^2 - t^4)\, dt = 4ab\left(\frac{4}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{256}{15}ab. \blacktriangleright$$

El área de la figura limitada por la gráfica de una función continua $r = r(\varphi)$ y por dos rayos $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, donde φ y r son las coordenadas polares, o bien el área de un *sector curvilíneo* limitado por un arco de la gráfica de la función $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, se calcula según la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi. \tag{5}$$

EJEMPLO 5. Hállese el área de la lúnula limitada por los arcos de las circunferencias $r = 2a\cos\varphi$, $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ (fig. 63).

◀ Las circunferencias se cortan cuando $\varphi = \pi/4$; la figura examinada (fig. 63) es simétrica respecto del rayo $\varphi = \pi/4$. Por lo tanto, su área puede calcularse del modo siguiente:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= 2a^2 \left(\varphi - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a^2. \blacktriangleright$$

6.1. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y = \ln x$ y las rectas $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

6.2. Hállese el área de la figura limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6.3. Hállese el área de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$.

6.4. Hállese el área de la figura limitada por la parábola $y = x^2 + 2x$ y la recta $y = x + 2$.

6.5. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = \frac{27}{x^2 + 9}$ e $y = \frac{x^2}{6}$.

6.6. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = 2px$ e $y^2 = \frac{4}{p}(x - p)^3$ $(p > 0)$.

6.7. Hállese el área de la figura limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = a^2$ y la recta $y = a$.

6.8. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$ y el eje Oy.

6.9. Hállese el área de la figura limitada por el eje Oy, la parábola $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ y la tangente a ésta en el punto de abscisa $x = c$ $(c > a > 0, p > 0)$.

6.10. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.

6.11. Hállese el área de la figura limitada por la parábola $y = 3 + 2x - x^2$ y el eje Ox.

6.12. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y = \operatorname{arcsen} x$ y las rectas $x = 0$, $y = \pi/2$.

6.13. Hállese el área de la lúnula superior limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + 2ay = a^2$ $(a > 0)$.

6.14. Hállese el área de la figura limitada por las líneas $(x-1)(y+2)=2$ y $x+y=2$.

6.15. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y=\ln x$, la tangente a dicha curva en el punto $x=e$ y el eje Ox.

6.16. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y=\ln(x+2)$, $y=2\ln x$, $y=0$.

6.17. Hállese el área de cada una de las dos partes en las que el círculo $x^2+y^2\leqslant 2ax$ está dividido por la parábola $y^2=2ax-a^2$.

6.18. Hállese el área de la lúnula limitada por la hipérbola $x^2-y^2=a^2$ y la parábola $y^2=\frac{3}{2}ax$.

6.19. Hállese el área del segmento hiperbólico de altura h y base $2r$ (el semieje real de la hipérbola es igual a a).

6.20. Hállese el área de la figura limitada por la curva $a^2y^2=\frac{x^5}{2a-x}$ y su asíntota $(a>0)$.

6.21. Hállese el área de la figura limitada por las líneas $x^2-y^2=a^2$, $(x^2-a^2)^3y^2=a^8$ y el eje Ox $(x>0)$.

6.22. Hállese el área de cada una de las dos partes en las que el círculo $x^2+y^2\leqslant 2ax$ está dividido por la hipérbola $4x^2-3y^2=a^2$.

6.23. Hállese el área del segmento elíptico de altura h y base $2r$ (el semieje mayor de la elipse es igual a a, la base del segmento es paralela al eje menor).

6.24. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=\frac{a^2x}{a^2+x^2}$ y el eje Ox $(a>0)$.

6.25. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y^2=\frac{x^4}{a^2-x^2}$ y sus asíntotas.

6.26. Hállese el área de la figura limitada por la astroide $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$.

6.27. Hállese el área del bucle de la curva $x=\frac{1}{3}t(3-t^2)$, $y=t^2$.

6.28. Hállese el área de la figura limitada por el arco de la cicloide $x=2(t-\operatorname{sen} t)$, $y=2(1-\cos t)$ y el eje Ox.

6.29. Hállese el área del bucle de la curva $x=a(t^2+1)$, $y=b(t^3-3t)$.

6.30. Hállese el área del bucle de la curva $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$.

6.31. Hállese el área de la figura limitada por la cardioide $r = a\,(1 + \operatorname{sen}\varphi)$.

6.32. Hállese el área de un pétalo de la curva $r = a \operatorname{sen} 2\varphi$.

6.33. Hállese el área de la figura limitada por la curva $r = a \operatorname{sen} 5\varphi$.

6.34. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r = a \operatorname{tg}\varphi \sec\varphi$, $r = 2a\cos\varphi$ y el eje polar.

6.35. Hállese el área de la figura situada en el primer cuadrante y limitada por las curvas $r = a \operatorname{tg}\varphi$, $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ y el eje polar.

6.36. Hállese el área de la figura limitada por dos espiras sucesivas de la espiral logarítmica $r = e^{\varphi}$, partiendo de $\varphi = 0$.

6.37. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r^2 = 2\cos 2\varphi$, $r = 1$ $(r \geqslant 1)$.

6.38. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r = a\cos 3\varphi$.

6.39. Hállese el área de la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi$.

6.40. Hállese el área de al figura limitada por la circunferencia $r = \sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi$ y la cardioide $r = 1 - \cos\varphi$ (fuera de la cardioide).

2.2. Longitud del arco de una curva. Si una curva suave viene dada por la ecuación $y = f(x)$, entonces la longitud l de su arco es

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

donde a y b son abscisas de los extremos del arco.

Si la curva está definida mediante las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, entonces

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt.$$

De un modo análogo se expresa la longitud del arco de una curva espacial definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt.$$

En el caso en que se da la ecuación polar de una curva suave $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, se tiene

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

EJEMPLO 6. Hállese la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, desde el origen de coordenadas hasta el punto (4, 8).

◀ Tenemos:

$$y = x^{3/2}, \quad y' = \frac{3}{2} x^{1/2}.$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1). \blacktriangleright$$

EJEMPLO 7. Hállese la longitud de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

◀ Tenemos

$$x'_t = -3a \cos^2 t \operatorname{sen} t, \quad y'_t = 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t,$$

$$\frac{1}{4} l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9a^2 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t\, dt = 3a \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2},$$

de donde $l = 6a$. ▶

EJEMPLO 8. Hállese la longitud de la cardioide $r = a(1 - \cos \varphi)$.

◀ Tenemos:

$$r' = a \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\frac{1}{2} l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 (1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi =$$

$$= a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos \varphi)}\, d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a,$$

de donde $l = 8a$. ▶

6.41. Hállese la longitud del arco de la parábola $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

6.42. Hállese la longitud del arco de la curva $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ entre los puntos de su intersección con el eje Ox.

6.43. Hállese la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3$, situado dentro de la parábola $y^2 = 2px$.

6.44. Hállese la longitud del arco de la curva $y = a \ln (a^2 - x^2)$ $(a > 1)$, situado por arriba del eje Ox.

6.45. Hállese la longitud de la curva cerrada $8a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

6.46.* Hállese el perímetro de la lúnula formado por las circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$ y $x^2 + y^2 = 2by$ $(a > b > 0)$.

6.47. Hállese la longitud del arco de la catenaria $y = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 3$.

6.48. Hállese la longitud del arco de la curva $y = \frac{2}{\pi} \ln \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$ desde $x = \frac{1}{2}$ hasta $x = \frac{3}{2}$.

6.49. Hállese la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = \frac{5}{p}(x - p)^3$ que se obtiene al cortar la parábola por la recta $x = 2p$.

6.50. Hállese la longitud del arco de la curva $x = a(3 \cos t - \cos 3t)$, $y = a(3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t)$ comprendido entre $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$.

6.51. Hállese la longitud del arco de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

6.52. Hállese la longitud del bucle de la curva $x = t^2$, $y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$.

6.53. Hállese la longitud del arco de la curva $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ entre los puntos de su intersección con los ejes de coordenadas.

6.54. Hállese la longitud del bucle de la curva $x = a(t^2 + 1)$, $y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t)$.

6.55. Hállese en la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ un punto que divide la longitud de la primera onda de la cicloide citada en razón 1 : 3 (a partir del origen de coordenadas).

6.56. Hállese la longitud del arco de la espiral logarítmica $r = e^{a\varphi}$ que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 1$.

6.57. Hállese la longitud del arco de la cardioide $r = 2(1 - \cos\varphi)$ que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 1$.

6.58.*. Hállese la longitud total de la curva $r = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

6.59. Hállese la longitud del arco de la espiral de Arquímedes $r = 5\varphi$, que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 10\pi$.

6.60. Hállese la longitud total de la curva $r = a\,\mathrm{sen}^4\frac{\varphi}{4}$.

Hállense las longitudes de los arcos de las curvas espaciales:

6.61. $x = at^2$, $y = a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)$, $z = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$ desde $t = 0$ hasta $t = \sqrt{3}$.

6.62. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\,\mathrm{sen}\,t$, $z = e^t$ entre los planos $z = 0$ y $z = a$ $(a > 0)$.

6.63. $x^2 = 4y$, $9z^2 = 16xy$ entre los planos $x = 0$ y $x = 4$.

6.64. $x = a\sqrt{t}\cos t$, $y = a\sqrt{t}\,\mathrm{sen}\,t$, $z = at$, desde $t = 0$ hasta $t > 0$ arbitrario.

6.65. $x = t - \mathrm{sen}\,t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\cos\frac{t}{2}$ entre dos puntos de intersección de la curva con el plano Oxz.

3. Area de una superficie de revolución. El área de una superficie formada por la revolución, alrededor del eje Ox del arco de la curva definida por la función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, se calcula según la fórmula

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Si el arco viene dado por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, entonces

$$Q_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Si el arco está definido en coordenadas polares $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, entonces

$$Q_x = 2\pi\int_\alpha^\beta r\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

Si al arco de una curva gira alrededor de un eje arbitrario, el área de la superficie de revolución se expresa mediante la integral

$$Q = 2\pi \int_A^B R\, dl,$$

donde R es la distancia desde el punto en la curva hasta el eje de revolución, dl es la diferencial del arco, A y B, los límites de integración correspondientes a los extremos del arco. En este caso R y dl deben ser expresadas en términos de la variable de integración.

EJEMPLO 9. Hállese el área de la superficie formada por la revolución de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ en torno al eje Ox.

◀ Tenemos:

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2},$$

$$y' = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) =$$

$$= -\frac{(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}, \quad \sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}} = \frac{a^{1/3}}{|x|^{1/3}}.$$

Por consiguiente,

$$Q_x = 2 \cdot 2\pi \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \cdot \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\, dx =$$

$$= -4\pi a^{1/3} \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} x^{-1/3}\, dx =$$

$$= -4\pi a^{1/3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(a^{2/3} - x^{2/3})^{5/2}}{\frac{5}{2}} \Bigg|_0^a = \frac{12}{5}\pi a^2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 10. Hállese el área de una superficie formada por la revolución de una onda de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ alrededor del eje Ox.

◀ Tenemos:

$$x_t' = a(1 - \cos t), \qquad y_t' = a \operatorname{sen} t,$$

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 t} =$$

$$= a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2}.$$

De aquí

$$Q_x = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -16\pi a^2 \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 11. Hállese el área de una superficie formada por la revolución de la cardioide $r = 2a\,(1 + \cos\varphi)$ en torno al eje polar.

◀ Tenemos

$$r' = -2a \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{4a^2 (1 + \cos\varphi)^2 + 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = 4a \cos \frac{\varphi}{2},$$

y, luego,

$$Q_x = 2\pi \int_0^{\pi} 2a\,(1 + \cos\varphi) \operatorname{sen} \varphi \cdot 4a \cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 64\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{128}{5}\pi a^2. \blacktriangleright$$

6.66. Hállese el área de la superficie (llamada *catenoide*) engendrada por al revolución del arco de la catenaria $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, en torno al eje Ox.

6.67. Hállese el área de la superficie del elipsoide formado por la revolución de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en torno al: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.68. Hállese el área de la superficie formada por la revolución alrededor del eje Ox del arco de la curva $y = \frac{1}{3} x^3$ comprendido entre $x = -1$ y $x = 1$.

6.69. Hállese el área de la superficie formada por la revolución alrededor del eje Ox del arco de la curva $y = \frac{1}{6}\sqrt{x}\,(x - 12)$ entre los puntos de intersección de la curva citada con el eje Ox.

6.70. Hállese el área de una superficie engendrada por la revolución en torno al eje Oy del arco de la parábola semicúbica $9ay^2 = 4x^3$ que se obtiene al cortar la curva por la recta $x = a$.

6.71. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del bucle de la curva $9ay^2 = x\,(3a - x)^2$ en torno al: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.72. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la curva $y = e^{-x/2}$, $0 \leqslant x < +\infty$, alrededor del eje Ox.

6.73. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la curva $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, alrededor del: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.74. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del bucle de la curva $x = a(t^2 + 1)$, $y = \frac{at}{3}(3 - t^2)$ en torno al eje Ox.

6.75. Hállese el área de la superficie engendrada por la revolución de una onda de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ alrededor de su eje de simetría.

6.76. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la evolvente de la circunferencia $x = a(t \operatorname{sen} t + \cos t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, alrededor del eje Ox.

6.77. Hállese el área de la superficie formada por la revolución de la circunferencia $r = 2a \operatorname{sen} \varphi$ en torno al eje polar.

6.78. Hállese el área de la superficie formada por la revolución de la cardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$ en torno a la tangente en su vértice $(2a, 0)$.

6.79. Demuéstrese que el área de la superficie formada por la revolución de la lemniscata $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi$ en torno al eje polar es igual al área de la superficie de una esfera de radio a.

6.80. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la curva $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, en torno al eje polar.

4. **Volumen de un cuerpo.** Si el área $S(x)$ de la sección de un cuerpo por el plano perpendicular al eje Ox es una función continua en el segmento $[a, b]$, el volumen del cuerpo se calculará según la fórmula

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{6}$$

EJEMPLO 12. El plano de un triángulo isósceles se mueve perpendicularmente al diámetro fijo de un círculo de radio a. La base del triángulo es la cuerda de dicho círculo, mientras que el vértice está situado en una recta paralela al diámetro fijo a la distancia h del

plano del círculo. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por el movimiento del plano del triángulo desde un extremo del diámetro hasta el otro.

◀ Al elegir el sistema de coordenadas de modo tal que el centro del círculo esté en el origen de coordenadas (fig. 64) y el diámetro fijo, en el eje Ox, obtendremos la ecuación de una circunferencia en la forma $x^2 + y^2 = a^2$.

La sección del cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox es un triángulo isósceles de base $2y = 2\sqrt{a^2 - x^2}$ y altura h. Tenemos:

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2}\, h = h\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leqslant x \leqslant a),$$

$$V = h\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2h\int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= 2h\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a = 2h \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi a^2 h. \ ▶$$

La expresión para la función $S(x)$ se obtiene de una manera bastante simple en el caso de los cuerpos de revolución. Así, por ejemplo, si un trapecio curvilíneo, limitado por la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, gira alrededor del eje Ox o del eje Oy, los volúmenes de los cuerpos de revolución se calculan respectivamente conforme a las fórmulas:

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx, \tag{7}$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\, dx, \quad a \geqslant 0. \tag{8}$$

Si un sector curvilíneo, limitado por la curva $r = r(\varphi)$ y los rayos $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, gira alrededor del eje polar, el volumen del cuerpo de revolución es

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi.$$

El cálculo de los volúmenes de los cuerpos se realiza de un modo mucho más fácil con ayuda de las integrales múltiples. Por esta razón nos limitaremos aquí sólo a problemas simples.

EJEMPLO 13. Una figura, limitada por las curvas $y = \sqrt{2px}$ e $y = \frac{2}{\sqrt{p}}(x - p)^{3/2}$, gira alrededor del eje Ox. Hállese el volumen del cuerpo de revolución (fig. 65).

◀ Hallemos los puntos de intersección de las curvas:

$$\sqrt{2px} = \frac{2}{\sqrt{p}}(x - p)^{3/2}, \quad \text{o bien} \quad 2p^2x = 4(x - p)^3;$$

es evidente que la ecuación queda satisfecha por el valor de $x = 2p$, y en este caso $y = 2p$, es decir tenemos un punto de intersección $(2p, 2p)$. El volumen buscado es una diferencia entre los volúmenes:

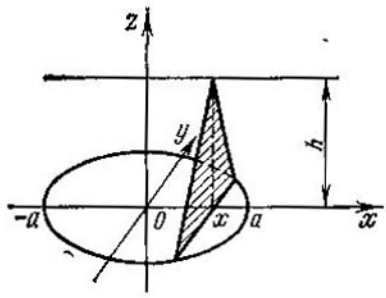


Fig. 64

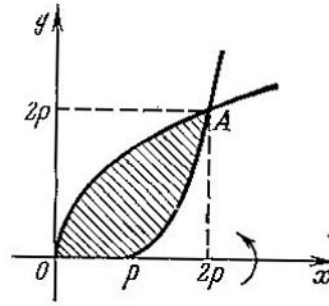


Fig. 65

el volumen V_1 obtenido mediante la revolución del trapecio curvilíneo limitado por la parábola $y = \sqrt{2px}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2p)$ y el volumen V_2, obtenido mediante la revolución del trapecio curvilíneo limitado por la parábola semicúbica $y = \frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}$ $(p \leqslant x \leqslant 2p)$.

Haciendo uso de la fórmula (7), obtenemos:

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi \int_0^{2p} y_1^2\,dx - \pi \int_p^{2p} y_2^2\,dx =$$

$$= \pi \cdot 2p \int_0^{2p} x\,dx - \pi \cdot \frac{4}{p} \int_p^{2p} (x-p)^3\,dx =$$

$$= 2\pi p \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{2p} - \frac{4\pi}{p} \cdot \frac{(x-p)^4}{4}\Big|_p^{2p} = 4\pi p^3 - \pi p^3 = 3\pi p^3. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 14. La figura, limitada por la curva $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} 2t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$ y el eje Ox, gira alrededor del eje Oy. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

◀ Es obvio que $0 \leqslant x \leqslant a$ y $0 \leqslant y \leqslant a$, así como que $y = 0$ cuando $t = 0$ y $t = \pi/2$, es decir, la figura en consideración es un trapecio curvilíneo. Luego, $x = a$ para $t = 0$, y $x = 0$ para $t = \pi/2$. Por consiguiente, el volumen que se busca se expresa mediante la fórmula (8). Tenemos:

$$V_y = 2\pi \int_0^a x(t)\,y(t) = 2\pi \int_{\pi/2}^0 a\cos t \cdot \operatorname{sen} 2t\,(-a \operatorname{sen} t)\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2t\, dt = \frac{\pi a^3}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t)\, dt =$$

$$= \frac{\pi a^3}{2} \left(t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2 a^3}{4}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 15. La cardioide $r = a\,(1 - \cos \varphi)$ gira alrededor del eje polar. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

$$\blacktriangleleft V = \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} a^3 (1 - \cos \varphi)^3 \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^3 \frac{(1 - \cos \varphi)^4}{4} \Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3} \pi a^3. \blacktriangleright$$

6.81. Sobre una cuerda de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, paralela al eje Ox, se ha construido un cuadrado cuyo lado es igual a la longitud de la cuerda, mientras que el plano del cuadrado es perpendicular al plano Oxy. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por el movimiento del plano del cuadrado, si la cuerda, que lo determina se desplaza a lo largo de la astroide.

6.82. Hállese el volumen de una cuña obtenida al cortar un cilindro circular recto de radio a por el plano que pasa por el diámetro de la base y que forma el ángulo α respecto al plano de la base.

6.83. Hállese el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox de la figura limitada por las líneas $2y = x^2$ y $2x + 2y - 3 = 0$.

6.84. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox de la figura limitada por las líneas $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$.

6.85. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Oy de la figura limitada por las líneas $y = x$, $y = x + \operatorname{sen}^2 x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

6.86. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Oy de la figura limitada por las líneas $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ e $y = 2$.

6.87. Hállese el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución del segmento parabólico de base $2a$ y altura h alrededor de la altura.

6.88. Hállense los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución de la figura limitada por la curva $x = at^2$,

$y = a \ln t$ $(a > 0)$ y los ejes coordenados en torno al: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.89. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox de la figura limitada por la curva $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} 2t$ y el eje Ox $(0 \leqslant x \leqslant a)$.

6.90. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ alrededor de la recta $x = a$.

6.91. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la curva $r = a \operatorname{sen}^2 \varphi$ en torno al eje polar.

6.92. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ en torno al eje polar.

§ 7. Aplicaciones de la integral definida a la resolución de ciertos problemas de mecánica y física

1. **Momentos y centros de masas de las curvas planas.** Si el arco de una curva viene dado mediante la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, y tiene densidad *) $\rho = \rho(x)$, los momentos estáticos de dicho arco M_x y M_y respecto de los ejes coordenados Ox y Oy serán

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx;$$

los momentos de inercia I_x e I_y respecto de los mismos ejes Ox y Oy se calculan según las fórmulas

$$I_x = \int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

*) En los problemas, donde la densidad no se especifica, se supone siempre que la curva es homogénea y $\rho = 1$.

y las coordenadas del centro de masas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, según las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l} = \frac{1}{l} \int_a^b \rho(x)\, x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{l} = \frac{1}{l} \int_a^b \rho(x)\, f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

donde l es la masa del arco, es decir,

$$l = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

EJEMPLO 1. Hállense los momentos estáticos y los momentos de inercia respecto de los ejes Ox y Oy del arco de la catenaria $y = \operatorname{ch} x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

◀ Tenemos: $y' = \operatorname{sh} x$, $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x$. Por consiguiente,

$$M_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \operatorname{ch} 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (2 + \operatorname{sh} 2),$$

$$M_y = \int_0^1 x \operatorname{ch} x\, dx = \int_0^1 x\, d(\operatorname{sh} x) = x \operatorname{sh} x \Big|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} x \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1,$$

$$I_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^3 x\, dx = \int_0^1 (1 + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch} x\, dx =$$

$$= \left(\operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} \right) \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 1,$$

$$I_y = \int_0^1 x^2 \operatorname{ch} x\, dx = \int_0^1 x^2\, d(\operatorname{sh} x) = x^2 \operatorname{sh} x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x \operatorname{sh} x\, dx =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - 2 \int_0^1 x\, d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} 1 - 2 \left(x \operatorname{ch} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{ch} x\, dx \right) =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - 2 \operatorname{ch} 1 + 2 \operatorname{sh} 1 = 3 \operatorname{sh} 1 - 2 \operatorname{ch} 1. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Hállense las coordenadas del centro de masas del arco de la circunferencia $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, situado en el primer cuadrante.

◀ Tenemos: $l = \frac{\pi a}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, $x'_t = -a \operatorname{sen} t$, $y'_t = a\cos t$,

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t} = a.$$

De aquí obtenemos:

$$M_x = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = a^2 \operatorname{sen} t \Big|_0^{\pi/2} = a^2,$$

$$M_y = a^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\, dt = -a^2 \cos t \Big|_0^{\pi/2} = a^2,$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l} = \frac{a^2}{\pi a/2} = \frac{2a}{\pi}, \qquad \bar{y} = \frac{a^2}{\pi a/2} = \frac{2a}{\pi}. \blacktriangleright$$

En las aplicaciones resulta útil con frecuencia el siguiente

TEOREMA DE GULDIN. *El área de la superficie engendrada por la revolución del arco de una curva plana en torno a un eje, situado en el mismo plano que el arco, pero que no lo interseca, es igual al producto de la longitud de dicho arco por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de ésta.*

EJEMPLO 3. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

◀ Debido a la simetría, $\bar{x} = 0$. Al girar la semicircunferencia alrededor del eje Ox se engendra una esfera; el área de la superficie de esta esfera es igual a $4\pi a^2$, y la longitud de la semicircunferencia es πa. De acuerdo con el teorema de Guldin, se tiene

$$4\pi a^2 = \pi a \cdot 2\pi \bar{y}.$$

De aquí $\bar{y} = \frac{2a}{\pi}$, es decir, el centro de masas tienen las coordenadas $C\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$. ▶

7.1. Hállese el momento estático de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ respecto del eje Ox.

7.2. Hállense el momento estático y el momento de inercia respecto del eje Ox del arco de la curva $y = e^x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

7.3. Hállense el momento estático y el momento de inercia respecto al eje Ox de una onda de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

7.4. Hállense el momento estático y el momento de inercia de la semicircunferencia de radio a respecto de su diámetro.

7.5. Hállense los momentos estáticos respecto de los ejes Ox y Oy del arco de la circunferencia $r = 2a \cos \varphi$, situado por arriba del eje polar.

7.6. Hállese el centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} (0 \leqslant x \leqslant a)$.

7.7. Hállese el centro de gravedad del arco de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, situado por arriba del eje Ox.

7.8. Hállense las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del un arco de la cardioide $r = a (1 + \cos \varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

7.9. Haciendo uso del teorema de Guldin, hállese el centro de gravedad del arco de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, situado en el primer cuadrante.

2. Problemas físicos. En los ejemplos 4—7 que se exponen más abajo se dan algunas aplicaciones de la integral definida en la resolución de problemas de física.

EJEMPLO 4. La velocidad del movimiento rectilíneo de un cuerpo se expresa mediante la fórmula $v = 2t + 3t^2$ (m/s). Hállese el camino recorrido por el cuerpo durante 5 segundos desde el comienzo de su movimiento.

◀ Dado que el camino recorrido por el cuerpo a la velocidad $v(t)$ durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ se expresa mediante la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt,$$

tenemos:

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2)\, dt = (t^2 + t^3)\Big|_0^5 = 150 \text{ (m)}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 5. ¿Qué trabajo hay que realizar para elevar un cuerpo de masa m d la superficie de la Tierra, cuyo radio es R, a una altura h? A qué es igual el trabajo, si el cuerpo se aleja al infinito?

El trabajo de una fuerza variable $f(x)$ que actúa a lo largo del eje Ox en el segmento $[a, b]$ se expresa mediante la integral

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

De acuerdo con la ley de la gravitación universal, la fuerza F que actúa sobre un cuerpo de masa m es igual a

$$F = k \frac{mM}{r^2},$$

donde M es la masa de la Tierra, r es la distancia de la masa m desde centro de la Tierra, k es la constante de la gravitación universal. Por cuanto en la superficie de la Tierra, es decir, cuando $r = R$, se tiene $F = mg$, podemos, por ende, escribir $mg = k\frac{mM}{R^2}$. De aquí hallamos $kM = gR^2$, razón por la cual

$$F = mg\frac{R^2}{r^2}.$$

Por consiguiente, el trabajo buscado es igual a

$$A = \int_R^{R+h} F\,dr = \int_R^{R+h} mgR^2\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^{R+h} = mgR\frac{h}{R+h}.$$

De aquí tenemos para $h \to \infty$

$$\lim_{h\to\infty} A = mgR. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Calcúlese la energía cinética de un cono circular homogéneo que gira con una velocidad angular ω en torno a su eje, si se conocen el radio de la base del cono R, su altura H y la densidad γ.

◀ La energía cinética de un cuerpo que gira alrededor de cierto eje con una velocidad angular ω es igual a $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto del eje de revolución. Tomemos como masa elemental dm la masa de un cilindro hueco de altura h que tiene un radio interior r y un espesor de la pared dr (fig. 66). Entonces, $dm = 2\pi rh\gamma\,dr$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$. Por cuanto los triángulos OCD y OAB son semejantes, tenemos

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}, \quad \text{es decir,} \quad h = H\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

Por consiguiente,

$$dm = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,dr,$$

y el momento de inercia elemental dI es

$$dI = dm\cdot r^2 = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^3\,dr.$$

De este modo, el momento de inercia de todo el cono es

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^3\,dr = 2\pi\gamma H\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\pi\gamma HR^4,$$

mientras que la energía cinética del cono es igual a

$$K=\frac{1}{20}\pi\gamma H R^4\omega^2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 7. Hállese la fuerza de presión que ejerce el agua sobre una placa triangular vertical de base a y altura h, sumergida en el agua con el vértice hacia abajo, de forma que su base se encuentra en la superficie del agua.

◀ Hagamos uso de la ley de Pascal, en virtud de la cual la fuerza de presión P que ejerce un líquido, con un peso específico γ, sobre un

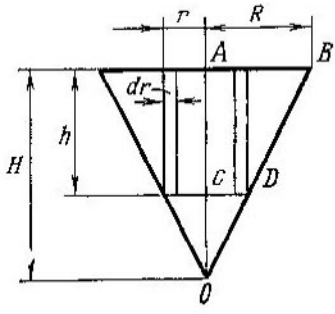


Fig. 66

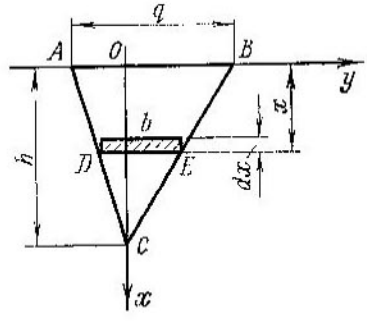


Fig. 67

área S sumergido a una profundidad H es igual a

$$P=\gamma HS.$$

Al introducir el sistema de coordenadas expuesto en la fig. 67, examinemos un área rectangular elemental que se encuentra a la profundidad x y cuyas base y altura son b y dx, respectivamente. De la semejanza de los triángulos CAB y CDE, tenemos

$$\frac{b}{a}=\frac{h-x}{h}, \quad \text{es decir,} \quad b=\frac{a}{h}(h-x),$$

por consiguiente

$$dS=b\,dx=\frac{a}{h}(h-x)\,dx \quad \text{y} \quad dP=x\,dS=\frac{ax}{h}(h-x)\,dx$$

(para el agua $\gamma=1$).

Así pues, la fuerza de presión que ejerce el agua sobre toda la placa es

$$P=\int_0^h x\,dS=\frac{a}{h}\int_0^h x(h-x)\,dx=\frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right)=\frac{ah^2}{6}. \blacktriangleright$$

7.10. La velocidad de un cuerpo lanzado hacia arriba verticalmente con una velocidad inicial v_0, despreciando la resistencia del aire, es igual a $v = v_0 - gt$, donde t es el tiempo transcurrido y g la aceleración de la gravedad. ¿A qué altura máxima se eleva el cuerpo?

7.11. Un punto del eje Ox efectúa oscilaciones armónicas alrededor del origen de coordenadas con una velocidad $v = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$, donde t es el tiempo; v_0, ω, φ son unas constantes. Hállese la ley que siguen las oscilaciones del punto y el valor medio de la magnitud absoluta de la velocidad durante el período de oscilaciones.

7.12. Dos cuerpos se mueven por una misma recta: el primer cuerpo con una velocidad $v_1 = 3t^2 - 4t$ (m/s) y el segundo, con una velocidad $v_2 = 4(t + 3)$ (m/s). Suponiendo que en el instante inicial los cuerpos estaban juntos, determínese en qué momento de tiempo y a qué distancia, desde el comienzo del movimiento, estarán juntos de nuevo.

7.13. La velocidad del movimiento de un punto $v = 0{,}1\, te^{-0{,}02t}$ (m/s). Determínese el trayecto recorrido por dicho punto desde el comienzo de su movimiento hasta que se pare por completo ($v(t_2) = 0$).

7.14*. Calcúlese el trabajo necesario para estirar un muelle en 5 cm, si se sabe que la fuerza de 1 N lo estira en 1 cm.

7.15. Calcúlese el trabajo necesario para amontonar la arena formando un cono de radio R y altura H. El peso específico de la arena es γ.

7.16. Calcúlese el trabajo necesario para sacar el agua de un recipiente que tiene forma de paraboloide de revolución con el vértice hacia arriba. El radio de la base es R, la altura es H.

7.17. Calcúlese el trabajo necesario para construir una pirámide de base cuadrada, si H es la altura de la pirámide y a, el lado de la base. El peso específico del material es γ.

7.18. Calcúlese el trabajo necesario para sacar el agua de un recipiente cónico con el vértice hacia arriba. El radio de la base es R, la altura H.

7.19. Calcúlese el trabajo necesario para sacar el agua de una cisterna limitada por las superficies: $y^2 = 2pz$, $x = \pm a$, $z = p$ $(r > 0)$.

7.20*. Una carga eléctrica e_0 concentrada en el origen de coordenadas repele la carga e del punto $(a, 0)$ al punto

$(b, 0)$. Determínese el trabajo A de la fuerza de repulsión F. ¿A qué es igual el trabajo, si la carga e se aleja al infinito?

7.21*. Un cilindro con un émbolo móvil, de volumen $V_0 = 0{,}2\text{m}^3$ y presión $p_0 = 10330\ \text{N/m}^2$, está lleno de vapor. ¿Cuál es el trabajo que hay que realizar para reducir el volumen del vapor en dos veces, si la temperatura es constante (proceso isotérmico)?

7.22*. Determínese el trabajo que se realiza al comprimir adiabáticamente el aire, cuyo volumen inicial es $V_0 = 8\text{m}^3$ y la presión $p_0 = 10000\ \text{N/m}^2$, hasta que se obtenga el volumen $V_1 = 2\text{m}^3$.

7.23. Hállese la energía cinética de una bola homogénea de radio R y densidad γ, que gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular ω.

7.24. Hállese la energía cinética de una placa que tiene forma de un segmento parabólico y que gira alrededor del eje de la parábola con una velocidad angular constante ω. La base del segmento es a, la altura h, el espesor de la placa d, la densidad del material γ.

7.25. Hállese la energía cinética de una placa triangular que gira alrededor de la base con una velocidad angular ω. La base de la placa es a, la altura h, el espesor l y la densidad γ.

7.26. Hállese la energía cinética de un cilindro circular homogéneo de densidad γ, radio de la base R y altura H, que gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω.

7.27. Hállese la presión que ejerce el agua sobre una placa triangular vertical de base a y altura h, sumergida en el agua de manera tal que el vértice se encuentra en la superificie y la base es paralela a la superficie del agua.

7.28. El extremo de un tubo sumergido en un líquido, cuyo peso específico es igual a γ, está cerrado con una mariposa redonda. Determínese la presión sobre la mariposa, si su radio es R y el centro se encuentra a la profundidad H.

7.29. Hállese la fuerza con la que un líquido de peso específico γ, presiona contra una pared vertical que tiene forma de semielipse, cuyo eje mayor se encuentra en la superficie del líquido. El eje mayor de la semielipse es a y el menor, b.

7.30. Hállese la presión de un líquido que llena un cilindro circular y cuyo peso específico es γ, sobre las paredes laterales del cilindro, si el radio de la base es R y la altura es H.

7.31. Hállese la masa de una barra de longitud $l = 5$ m, si su densidad lineal varía de acuerdo con la ley $\gamma = 1 + 0{,}1x^3$ (kg/m), donde x es la distancia desde uno de los extremos de la barra.

7.32*. Determínese la cantidad de calor que desprende una corriente alterna $I = I_0 \cos \omega t$ durante el período $2\pi/\omega$ en un conductor eléctrico cuya resistencia es igual a R.

7.33*. Determínese el lapso de tiempo durante el cual el agua que llena un recipiente cilíndrico de altura $H = 20$ cm y con un área de la base $S = 100$ cm^2, fluye por un orificio en el fondo de área $S_0 = 1$ cm^2.

7.34.** Una vez establecido el flujo laminar (de chorro) de un líquido a través de un tubo que tiene sección circular de radio a, la velocidad de la corriente v en un punto que se encuentra a la distancia r del eje del tubo se determina por medio de la fórmula $v = \frac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2)$, donde p es la diferencia de presión en los extremos del tubo, μ es el coeficiente de viscosidad, l es la longitud del tubo. Hállese el consumo de líquido Q, es decir, la cantidad de líquido que pasa a través de la sección transversal del tubo en la unidad de tiempo.

7.35*. ¿Con qué fuerza un semianillo de radio R y masa M atrae un punto material m que se encuentra en su centro?

7.36. Determínese el lapso de tiempo durante el cual el agua fluye de un embudo cónico, que tiene una altura $H = 50$ cm, el radio de la base superior $R = 5$ cm y el radio de la base inferior $r = 0{,}2$ cm

7.37. Determínese el consumo de líquido evacuado a través de un vertedero de sección rectangular. La altura del vertedero es h, el ancho a, el coeficiente de viscocidad μ.

§ 8. Integración numérica de las funciones de una variable

La integración numérica consiste en hallar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función continua $f(x)$ rigiéndose por la *fórmula de integración numérica*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(x_k),$$

donde los coeficientes a_{nk} son números reales y los nudos x_k pertenecen a $[a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. La forma de la suma

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(x_k)$$

determina el método de integración numérica, y la diferencia

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - S_n(f),$$

el error del método.

Para el método de rectángulos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=1}^{n} f(x_k), \tag{1}$$

$h = \dfrac{b-a}{n}$ (paso de partición), $x_0 = a - \dfrac{h}{2}$, $x_k = x_{k+1} + h$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Para el método de trapecios

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right), \tag{2}$$

$$h = \frac{b-a}{n},\quad x_0 = a,\quad x_k = x_{k-1} + h\ (k = 1, \ldots, n).$$

Para el método de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\right), \tag{3}$$

$$h = \frac{b-a}{2n},\quad x_0 = a,\quad x_k = x_{k-1} + h\ (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Los segundos miembros de las fórmulas de los rectángulos (1), los trapecios (2) y de Simpson (3) son sumas integrales y, para $h \to 0$, tienden hacia la integral dada. No obstante, para h fijo cada uno de ellos se diferencia de la integral correspondiente en la magnitud $R_n(f)$. De acuerdo con el error absoluto límite dado $\varepsilon > 0$ se elige el parámetro n, o bien, lo que es lo mismo, el paso h, para el cual se verifica la desigualdad

$$|R_n(f)| < \varepsilon.$$

Las magnitudes $R_n(f)$ se caracterizan (en la suposición de que existen las derivadas que figuran en ellas) por las igualdades

$R_n(f) = \dfrac{b-a}{24} f''(\xi)\, h^2$, $\xi \in [a, b]$ para el método de rectángulos,

$R_n(f) = \frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2$, $\xi \in [a, b]$ para el método de trapecios,

$R_n(f) = \frac{b-a}{180} f^{(IV)}(\xi) h^4$, $\xi \in [a, b]$ para el método de Simpson.

EJEMPLO 1. Hállese $\ln 2$ con una exactitud de hasta 10^{-4}, a partir de la relación $\ln 2 = \int_{0,5}^{1} \frac{dx}{x}$ calculando la integral por el método de Simpson.

◀ Para la función subintegral $f(x) = \frac{1}{x}$ en el segmento $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tenemos $f^{(IV)}(x) = \frac{24}{x^5}$, de donde $|f^{(IV)}(x)| < 24 \cdot 2^5$. Considerando que $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $h = \frac{1}{4n}$, obtenemos

$$|R_n(f)| < \frac{1}{2 \cdot 180} 24 \cdot 2^5 \left(\frac{1}{4n}\right)^4,$$

o bien

$$|R_n(f)| < \frac{1}{120n^4}.$$

Para que se logre la precisión prefijada es necesario el cumplimiento de la desigualdad

$$\frac{1}{120n^4} < 10^{-4}, \quad \text{o bien} \quad n^4 > \frac{10^3}{12},$$

lo que tendrá lugar para $n^4 > 100$. Por eso, se debe elegir $n = 4$. Hallando $h = \frac{1}{16} = 0{,}0625$, calculemos los valores de la función con una exactitud que supere a ciencia cierta *) 10^{-4}. Obtendremos la tabla siguiente: (véase la tabla en la pág. 425).

Calculando la suma

$$\sigma = \sigma_1 + 4\sigma_2 + 2\sigma_3 = 33{,}271415$$

y $\frac{h}{3} = 0{,}0208333$, obtenemos el resultado según la fórmula de Simpson (3):

$$\ln 2 = 0{,}6931.$$ ▶

Otro método para estimar el error del método de integración numérica consiste en que se usa la igualdad asintótica

$$\int_a^b f(x)\,dx - s_{n_{\nu+1}}(f) = \frac{S_{n_{\nu+1}}(f) - S_{n_\nu}(f)}{\lambda^m - 1} + o\left(n_{\nu+1}^{-m}\right),$$

*) Véase la llamada de la pág. 310.

$x_0 = 0,5$	$f(x_0) = 2$		
$x_1 = 0,5625$		$f(x_1) = 1,7777777$	
$x_2 = 0,6250$			$f(x_2) = 1,6$
$x_3 = 0,6875$		$f(x_3) = 1,4545454$	
$x_4 = 0,7500$			$f(x_4) = 1,3333333$
$x_5 = 0,8125$		$f(x_5) = 1,2307692$	
$x_6 = 0,8750$			$f(x_6) = 1,1428571$
$x_7 = 0,9375$		$f(x_7) = 1,0666666$	
$x_8 = 1$	$f(x_8) = 1$		
	$\sigma_1 = 3$	$\sigma_2 = 5,5297589$	$\sigma_3 = 4,0761904$

donde

$$n_{\nu+1} = \lambda n_\nu \qquad (\lambda > 1), \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

y $m = 2$ para los métodos de rectángulos y trapecios, $m = 4$ para el método de Simpson. El proceso de cálculo según las fórmulas para determinar las sumas $S_n(f)$ se realiza para $n = n_1, n_2, n_3, \ldots$ hasta que se cumpla la correlación

$$\frac{|S_{n_{\nu+1}}(f) - S_{n_\nu}(f)|}{\lambda^m - 1} < \varepsilon. \tag{4}$$

El método citado se denomina *regla de Runge*. Como criterio de su aplicación sirve la relación

$$\frac{|S_{n_{\nu+1}}(f) - S_{n_\nu}(f)|}{|S_{n_\nu}(f) - S_{n_{\nu-1}}(f)|} \approx \lambda^{-m}.$$

El número $\lambda > 1$ puede ser cualquiera, no obstante es preferible que sea igual a 2 ó 3.

EJEMPLO 2. Calcúlese empleando el método de trapecios, con una exactitud de hasta 10^{-4} la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

◀ Elijamos $n_1 = 10$, $n_2 = 20$ y calculemos los valores de la función subintegral $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ respectivamente en los nudos $x_k^{(1)} = x_0 + kh_1 = \dfrac{k}{10} (k = 1, 2, \ldots, 10)$ y $x_k^{(2)} = x_0 + kh_2 = \dfrac{k}{20}$ $(k = 1, 2, \ldots, 20)$ (véase la tabla 6.1)

Tabla 6.1

$x_0^{(1)} = 0$	$f(x_0^{(1)}) = 1$	$x_0^{(2)} = 0$	
		$x_1^{(2)} = 0{,}05$	$f(x_1^{(2)}) = 0{,}9999376$
$x_1^{(1)} = 0{,}1$	$f(x_1^{(1)}) = 0{,}9995004$	$x_2^{(2)} = 0{,}1$	
		$x_3^{(2)} = 0{,}15$	$f(x_3^{(2)}) = 0{,}9983168$
$x_2^{(1)} = 0{,}2$	$f(x_2^{(1)}) = 0{,}9960238$	$x_4^{(2)} = 0{,}2$	
		$x_5^{(2)} = 0{,}25$	$f(x_5^{(2)}) = 0{,}9922778$
$x_3^{(1)} = 0{,}3$	$f(x_3^{(1)}) = 0{,}9867674$	$x_6^{(2)} = 0{,}3$	
		$x_7^{(2)} = 0{,}35$	$f(x_7^{(2)}) = 0{,}9792281$
$x_4^{(1)} = 0{,}4$	$f(x_4^{(1)}) = 0{,}9694584$	$x_8^{(2)} = 0{,}4$	
		$x_9^{(2)} = 0{,}45$	$f(x_9^{(2)}) = 0{,}9573324$
$x_5^{(1)} = 0{,}5$	$f(x_5^{(1)}) = 0{,}9428091$	$x_{10}^{(2)} = 0{,}5$	
		$x_{11}^{(2)} = 0{,}55$	$f(x_{11}^{(2)}) = 0{,}9259358$
$x_6^{(1)} = 0{,}6$	$f(x_6^{(1)}) = 0{,}9068453$	$x_{12}^{(2)} = 0{,}6$	
		$x_{13}^{(2)} = 0{,}65$	$f(x_{13}^{(2)}) = 0{,}8857451$
$x_7^{(1)} = 0{,}7$	$f(x_7^{(1)}) = 0{,}8629030$	$x_{14}^{(2)} = 0{,}7$	
		$x_{15}^{(2)} = 0{,}75$	$f(x_{15}^{(2)}) = 0{,}8386278$
$x_8^{(1)} = 0{,}8$	$f(x_8^{(1)}) = 0{,}8132501$	$x_{16}^{(2)} = 0{,}8$	
		$x_{17}^{(2)} = 0{,}85$	$f(x_{17}^{(2)}) = 0{,}7871027$
$x_9^{(1)} = 0{,}9$	$f(x_9^{(1)}) = 0{,}7605057$	$x_{18}^{(2)} = 0{,}9$	
		$x_{19}^{(2)} = 0{,}95$	$f(x_{19}^{(2)}) = 0{,}7337535$
$x_{10}^{(1)} = 1$	$f(x_{10}^{(1)}) = 1{,}7071068$	$x_{20}^{(2)} = 1$	
	$\sigma_1 = 9{,}0916166$		$\sigma_2 = 9{,}0982576$

Hallamos primero la suma $S_{n_1} = \sigma_1 \cdot h_1 = 0{,}9091616$, donde

$$\sigma_1 = \frac{f(x_0^{(1)}) + f(x_{10}^{(1)})}{2} + \sum_{k=1}^{9} f(x_k^{(1)}) \quad \text{y} \quad h_1 = \frac{1}{10}.$$

Aplicando de nuevo la fórmula de trapecios (2), hallamos

$$S_{n_2} = (\sigma_1 + \sigma_2)\, h_2 = 0{,}9094937,$$

donde $h_2 = \dfrac{1}{20}$ y $\sigma_2 = \sum_{k=1}^{10} f(x_{2k-1}^{(2)})$. De la relación $x_k^{(1)} = x_{2k}^{(2)}$,

$k = 0, 1, \ldots, 10$, resulta obvio que para hallar S_{n_2} no hace falta calcular de nuevo cada uno de los 21 valores de la función, sino que se debe añadir a los valores hallados anteriormente, que figuran en la suma σ_1, 10 valores nuevos que forman la suma σ_2. Suponiendo en el primer miembro de la desigualdad (4) $\lambda = 2$, $m = 2$, y tomando en consideración los valores de S_{n_1} y S_{n_2}, obtenemos

$$\frac{S_{n_2} - S_{n_1}}{3} = 0{,}0001106.$$

Por eso, con la exactitud de hasta 10^{-4} tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = 0{,}9094. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Fórmese en FORTRAN el programa para calcular, por el método de rectángulos, la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

◀ La tarea para la computadora electrónica conviene componerla en forma de tres unidades de programa: programa principal, función subprograma que calcula los valores de la función subintegral y función subprograma que realiza el cálculo de la integral por el método de rectángulos.

Programa principal:

```
      EXTERNAL F
      S = RECT (0., 1., F,20)
      WRITE (3, 1) S
1 FORMAT (' INTEGRAL = ' F6.4)
      STOP
      END
```

Función subprograma para calcular los valores de la función subintegral:

```
      FUNCION F (X)
      F = 1./SQRT(1. +X** 3)
      RETURN
      END
```

Función subprograma para el cálculo de la integral definida por el método de rectángulos:

```
      FUNCION RECT(A, B, F, N)
      H = (B — A)/N
      RECT = 0.
      X = A — H/2.
      DO 1 I = 1,N
      X = X + H
```

```
1 RECT = RECT + F(X)
  RECT = RECT*H
  RETURN                    ▶
  END
```

En los problemas del 8.1 al 8.24 calcúlense las integrales definidas con una exactitud de hasta 10^{-4}, empleando uno de los siguientes métodos: a) método de rectángulos, b) método de trapecios, c) método de Simpson.

8.1. $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. 8.2. $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$.

8.3. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$. 8.4. $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

8.5. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$. 8.6. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$.

8.7. $\int_0^2 \sqrt{1+x^5}\,dx$. 8.8. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

8.9. $\int_0^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. 8.10. $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

8.11. $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$. 8.12. $\int_0^1 x \ln(1+x)\,dx$.

8.13. $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$. 8.14. $\int_0^1 e^{x^3}\,dx$.

8.15. $\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}}\,dx$. 8.16. $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$.

8.17. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$. 8.18. $\int_0^{3,1416} \ln(5+4\cos x)\,dx$.

8.19. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$. 8.20. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$.

8.21. $\int_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$. **8.22.** $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$.

8.23. $\int_{0,4}^{0,6} \frac{e^x}{x}\, dx$. **8.24.** $\int_0^{0,8} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

En los problemas del 8.25 al 8.28 fórmense en FORTRAN los subprogramas para calcular las integrales definidas, empleando los métodos indicados y eligiendo los parámetros nombrados, designando mediante A, B y F el origen del segmento de integración, el extremo del mismo y el identificador de la función subrograma que calcula los valores de la función subintegral, respectivamente.

8.25. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de rectángulos; los parámetros son A, B, F, N, donde N es el número de segmentos en los que se divide el segmento original [A, B].

8.26. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de trapecios; los parámetros son A, B, F, N.

8.27. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de trapecios; los parámetros son A, B, F, EPS, donde EPS es el error absoluto límite.

8.28. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de Simpson; los parámetros son A, B, F, N.

8.29. Fórmense en FORTRAN las funciones subprogramas para calcular los valores de las funciones subintegrales en los problemas del 8.1 al 8.24.

8.30. Fórmese en FORTRAN el programa de resolución de los problemas del 8.1 al 8.24, haciendo uso de los subprogramas obtenidos en la resolución de los problemas: a) 8.26 y 8.29; b)* 8.25 y 8.29; c) 8.28 y 8.29.

8.31. Fórmese en FORTRAN el programa de resolución de los problemas 8.1—8.24, haciendo uso de los subprogramas obtenidos en la resolución de los problemas 8.27 y 8.29.

RESPUESTAS

1.1. $\frac{x^8}{4}+C$, **1.2.** $3x\sqrt[3]{x}+C$, **1.3.** $3\ln|x|-\frac{5}{x}+C$. **1.4.** $\frac{x^3}{3}+$ $+\frac{5}{2}x^2-\ln|x|+C$. **1.5.** $x+6\sqrt{x}+3\ln x-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. **1.6.** $\operatorname{sen} x+$

$+C$. **1.7.** $\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}+C$. **1.8.** $-\frac{1}{3}e^{2-3x}+C$. **1.9.** $-\frac{3}{\ln 5}5^{-x/3}+$ $+C$. **1.10.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x+C$. **1.11.** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C$. **1.12.** $\frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x+C$. **1.13.** $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **1.14.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+C$. **1.15.** $\frac{2}{3}x\sqrt{mx}+C$. **1.16.** $\frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}+C$. **1.17.** $2\sqrt{ax}+2x+\frac{2}{3}\times$ $\times\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+C$. **1.18.** $\frac{x^3}{3}+2\ln|x|+C$. **1.19.** $\frac{2^x e^x}{\ln 2+1}+C$. **1.20.** x^2+ $+3\operatorname{sen} x+C$. **1.21** $-2\operatorname{ctg} x-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **1.22.** a) $-x+\operatorname{tg} x+C$, b) $x-\operatorname{th} x+C$. ● Hágase uso de las identidades: a) $\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-$ -1; b) $1-\operatorname{th}^2 x=\operatorname{sch}^2 x$. **1.23.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **1.24.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\times$ $\times\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right|+C$. **1.25.** $\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **1.26.** $\ln|x+\sqrt{x^2+3}|-$ $-\ln|x+\sqrt{x^2-3}|+C$. **1.27.** $\ln|x|+2\operatorname{arctg} x+C$. **1.28.** $\frac{x^2}{3}+$ $+(a+b)\frac{x^2}{2}+abx+C$. **1.29** $ax+\frac{9}{4}a^{2/3}x^{1/3}+\frac{9}{5}a^{1/3}x^{5/3}+\frac{x^3}{3}+C$. **1.30.** $x+3\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|-2\operatorname{tg} x+C$. **1.31.** a) $-\operatorname{ctg} x-x+C$; b) $x-\operatorname{cth} x+C$. **1.32.** $\ln|x+\sqrt{x^2-7}|+C$. **1.33.** $x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\times$ $\times\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right|+C$. **1.34.** $\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^2}+C$. **1.35.** $-\frac{3}{16}(3-$ $-4\operatorname{sen} x)^{4/3}+C$. **1.36.** $\frac{\operatorname{ch}^2 x}{2}+C$. **1.37.** $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$. **1.38.** $-\frac{1}{\ln x}+C$. **1.39.** $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$. **1.40.** $-\frac{1}{b}\ln|a-b\operatorname{tg} x|+C$. **1.41.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|2-3\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+C$. **1.42.** $\ln|\operatorname{sen} x|+C$. **1.43.** $\frac{3^{3x}}{4\ln 3}+C$. **1.44.** $\frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b)+C$. **1.45.** $-\cos(\ln x)+C$. **1.46.** $-2\cos\sqrt{x}+C$. **1.47.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$. **1.48.** $-\frac{1}{3}\operatorname{cth} 3x$ $+C$. **1.49.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+C$. **1.50.** $-\frac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{-x^2}+C$. **1.51.** $\frac{1}{4}\times$ $\times\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|+C$. **1.52.** $-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}(e^{-ax})+C$. **1.53.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}$ $\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+C$. **1.54.** $\frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2-1}|+C$. **1.55.** $-\ln(\cos x+$

$+\sqrt{\cos^2 x+4})+C$. 1.56. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)+C$. 1.57. $\frac{1}{2}\ln(x^2+$ $+\sqrt{x^4+1})+C$. 1.58. $\frac{1}{b^2}\ln|a^2+b^2x|+C$. 1.59. $\frac{1}{2a\cos^2 ax}+C$. 1.60. $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}+C$. 1.61. $\frac{1}{7-e^x}+C$. 1.62. $\ln|\cos x|+C$. 1.63. $\frac{1}{4}\times$ $\times\ln|\operatorname{sh} 4x|+C$. 1.64. $-\frac{a^{1/x}}{\ln a}+C$. 1.65. $\frac{1}{2}\operatorname{th}(x^2+1)+C$. 1.66. $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a-b}\,x-\sqrt{a+b}\,x}{\sqrt{a-b}\,x+\sqrt{a+b}\,x}\right|+C$. 1.67. $\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{2\sqrt{7}}+C$. 1.68. $\frac{1}{8}\ln(4x^2+7)+C$. 1.69. $\frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{x^6+1}|+C$. 1.70. $\frac{1}{\ln a}\ln(a^x+\sqrt{a^{2x}-1})+C$. 1.71. $\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}+C$. ● $\frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)-2}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$. 1.72. $x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+$ $+C$. 1.73. $x-\ln|x^2-4|+\frac{7}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$. 1.74. $\frac{1}{4ab}\ln\left|\frac{ax^2-b}{ax^2+b}\right|+$ $+C$. 1.75. $\frac{1}{48}\ln\left|\frac{3+2x^4}{3-2x^4}\right|+C$. 1.76. $\frac{1}{5}\ln|x^5+5x-8|+C$. 1.77. $\frac{1}{25}\sqrt[4]{(5x^4-3)^5}+C$. 1.78. $3\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+$ $+C$. 1.79. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x)+C$. 1.80. $\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+$ $+\frac{1}{b}\ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})+C$. 1.81. $-\frac{5}{\sqrt[5]{a^x\ln a}}+C$. 1.82. $\frac{3}{4}\times$ $\times\sqrt[3]{(4+e^x)^4}+C$. 1.83. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+4})+C$. 1.84. $x-\frac{1}{\ln 2}\ln(2^x+$ $+1)+C$. ● $\frac{1}{2^x+1}=\frac{(1+2^x)-2^x}{2^x+1}=1-\frac{2^x}{2^x+1}$. 1.85. $e^{\operatorname{arcsen} x}-$ $-\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen} x+C$. 1.86. $e^{\sqrt{x^2-1}}+C$. 1.87. $-\frac{2}{3}\sqrt{(3-\operatorname{ch} x)^3}+$ $+C$. 1.88. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln x}+C$. 1.89. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2\ln x)+C$. 1.90. $\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C$. ● $\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. 1.91. $\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C$. ● $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. 1.92. $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|+C$. 1.93. $x+\frac{1}{a}\times$ $\times\operatorname{sen}^2 ax+C$. 1.94. $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. 1.95. $\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}\ln\times$ $\times\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x+\frac{\operatorname{sen} 4x}{8}+C$. 1.96. $-2\sqrt{3-\cos^2 x}+$ $+C$. 1.97. $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{\cos^4 x+3})+C$. 1.98. $\ln|\operatorname{tg} x|+C$. ● $\frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$. 1.99. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\cos\sqrt{3}x|+C$. 1.100. $\frac{1}{a}\ln\times$

$\times \operatorname{ch} ax + C$. **1.101.** $\frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax+b) - x + C$. **1.102.** $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg}(x^3 - 3) - \frac{x^3}{3} + C$. **1.103.** $e^{\sec x} + C$. **1.104.** $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1} \right| + C$. **1.105.** $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}} \right| + C$. **1.106.** $2 \ln (\sqrt{x}+1) + C$. **1.107.** $e^x - \ln(e^x+1) + C$. **1.108.** $\frac{1}{25} \left(\frac{(5x-1)^{21}}{21} + \frac{(5x-1)^{20}}{20} \right) + C$. **1.109.** $-2\sqrt{1-e^x} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-e^x)^3} - \frac{2}{5}\sqrt{(1-e^x)^5} + C$. **1.110.** $2 \times \left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \frac{x+1}{2} + 2\sqrt{x+1} - 2 \ln(\sqrt{x+1}+1) \right) + C$. **1.111.** $\frac{1}{2(3-x)^6} - \frac{1}{5(3-x)^5} + C$. **1.112.** $\frac{\sqrt{3}}{3} \ln \frac{\sqrt{3+e^x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+e^x}+\sqrt{3}} + C$. **1.113.** $\ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{x^2-1}} \right| + C$. **1.114.** $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$. **1.115.** $x \operatorname{sen} x + \cos x + C$. **1.116.** $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$. **1.117.** $\frac{x}{3}\sqrt[3]{x^2} \times \ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + C$. **1.118.** $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - x + C$. **1.119.** $(2-x^2)\cos x + 2x \operatorname{sen} x + C$. **1.120.** $-(x^2+2x+2)e^{-x} + C$. **1.121.** $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$. **1.122.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1) + C$. ● Póngase $u = x^2$, $dv = xe^{-x^2}dx$. **1.123.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C$. **1.124.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$. **1.125.** $\frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$. **1.126.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b \operatorname{sen} bx + a \cos bx) + C$. **1.127.** $\frac{(x-\sqrt{1-x^2})\, e^{\arccos x}}{2} + C$. **1.128.** $x \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$. **1.129.** $\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$. **1.130.** $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x \ln 3 - 1) + C$. **1.131.** $(x^2-2x+1)\operatorname{sen} x + 2(x-1)\cos x + C$. **1.132.** $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$. **1.133.** $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$. **1.134.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$. ● Hágase la sustitución $x = t^2$ e intégrese por partes. **1.135.** $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$. **1.136.** $-\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} + \ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \right| + C$. **1.137.** $-x \operatorname{ctg} x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$. **1.138.** $e^{-x^2} \frac{\operatorname{sen} x - \cos 2x - 5}{10} + C$. **1.139.** $-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$. ● Póngase $u = x$, $dv =$

$= \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. **1.140.** ◀ $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx =$ $= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int x\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\right) = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right)$. De aquí $I_2 = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C$. $I_3 = \frac{1}{4a^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{3}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C$. ▶ **1.141.** ◀ Suponemos $u = \sqrt{x^2+a}$, $dv = dx$. Entonces $du = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}}$, $v = x$. Tenemos $\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - \int \times$ $\times \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. De aquí $\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C$. ▶ **1.142.** ◀ Suponemos $u = x$, $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Entonces $du = dx$, $v = -\sqrt{a^2-x^2}$. Tenemos $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = -x\sqrt{a^2-x^2} +$ $+ \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$. De aquí $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$. ▶ **1.143.** $\left(\frac{x^2}{1} - \frac{1}{4}\right)\operatorname{arcsen} x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$. **1.144.** $(\ln(\ln x) - 1) \times$ $\times \ln x + C$. **1.145.** $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + C$. **1.146.** $-2 \times$ $\times \sqrt{1-x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$. **1.147.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$.

● Véase la resolución del problema 1.141.

2.1. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C$. **2.2.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + C$. **2.3.** $\operatorname{arcsen}\frac{x-4}{4} + C$. **2.4.** $\ln\left|x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q}\right| + C$. **2.5.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-6}{x}\right| + C$. **2.6.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arcsen}\frac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + C$. **2.7.** $\frac{1}{2}\ln|x^2-5x+4| + \frac{5}{6}\ln \times$ $\times\left|\frac{x-4}{x-1}\right| + C$. **2.8.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-3x+3) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C$. **2.9.** $-$ $-\sqrt{2-x-x^2} + \frac{7}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2x+1}{3} + C$. **2.10.** $\sqrt{x^2-6x+1} + C$. **2.11.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+3}{2} + C$. **2.12.** $\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-3}{3^x-1}\right| + C$. **2.13.** $2\ln \times$

$(x^2-2x+6)+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C$. 2.14. $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\right.$
$\left.+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$. 2.15. $\ln\left|\frac{x}{1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}}\right|+C$.
2.16. $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}+C$. 2.17. $-\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x}-\frac{1}{2}\ln\times$
$\times\frac{2-x+\sqrt{2x^2-x+1}}{|x|}+C$. 2.18. $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)}-\frac{2}{27}\ln\times$
$\times\frac{5-2x+3\sqrt{x^2+5}}{|x+2|}+C$. 2.19. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C$. 2.20. $-\frac{1}{6}\ln|x|-$
$-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$. 2.21. $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+$
$+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$. 2.22. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C$. 2.23. $-$
$-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$. 2.24. $-$
$-\frac{1}{2(x^2-5x+4)^2}+C$. 2.25. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C$. 2.26. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\times$
$\times\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$. 2.27. $-\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{(x^2+1)^2}+\right.$
$\left.+\frac{3x}{2(x^2+1)^2}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x\right)+C$. ● $\int\frac{x-1}{(x^2+1)^3}dx=\int\frac{x}{(x^2+1)^3}dx-$
$-\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=-\frac{1}{4(x^2+1)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$. Luego, calcúlese $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$
según la fórmula recurrente obtenida en el problema 1.140.
2.28. $\frac{1}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{18}\ln(x^2+x+1)+\frac{x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}$
$\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. ● $\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$.
Aplicando el método de coeficientes indeterminados, obtenemos
$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{9(x-1)}-\frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{9}\frac{x+2}{x^2+x+1}$. Para
calcular $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}$ se recomienda la
sustitución $x+\frac{1}{2}=t$, y emplear, después, la fórmula recurrente
deducida en el problema 1.140. 2.29. $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$. 2.30. $\frac{1}{2}\times$
$\times\ln|x+1|-2\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C$. 2.31. $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2+2x+4}+$
$+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. 2.32. $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$.
2.33. $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\operatorname{arctg}x+C$. 2.34. $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+C$.

2.35. $-\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. ● $\frac{1}{x^2(x^2+a^2)}=\frac{1}{a^2}\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2(x^2+a^2)}$.

2.36. $\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.

● $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}=\frac{1}{2a^2}\frac{(x^2+a^2)-(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}$. 2.37. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\times$

$\times\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 2.38. $\ln|x|-\frac{1}{6}\ln(x^6+1)+$

$+\frac{1}{6(x^6+1)}+C$. ● $\frac{1}{x(x^6+1)^2}=\frac{(1+x^6)-x^6}{x(x^6+1)^2}$. 2.39. $\frac{1}{4x^4}+$

$+\frac{1}{2x^2}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. 2.40. $\frac{1}{12}\ln(x^4+1)(x^4-2)^2+C$.

● Póngase $x^4=t$. 2.41. $-\frac{1}{6(x+4)^6}+\frac{3}{7(x+4)^7}-\frac{1}{4(x+4)^8}+C$.

2.42. $\frac{1}{6}\ln|x^3-1|-\frac{1}{12}\ln(x^6+x^3+2)+\frac{1}{6\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^3+1}{\sqrt{7}}+C$.

2.43. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$. 2.44. $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{5\cos^5 x}+C$. 2.45.

$\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}^3 x+\frac{3}{5}\operatorname{sen}^5 x-\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x+C$. 2.46. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen}x}{2}+$

$+\frac{\operatorname{sen}2x}{16}+C$. 2.47. $\frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen}4x}{32}+C$. 2.48. $\frac{x}{16}-\frac{\operatorname{sen}4x}{64}-$

$-\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48}+C$. 2.49. $-\operatorname{ctg}x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+C$. 2.50.

$\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 2.51. $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+$

$+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$. 2.52. $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\frac{2}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x+C$. 2.53. $\frac{\sqrt{2}}{2}\times$

$\times\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)+C$. 2.54. $\frac{\operatorname{sen}x}{4\cos^4 x}+\frac{3}{8}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}+$

$+\frac{3}{8}\ln|\operatorname{tg}x+\sec x|+C$. 2.55. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$. 2.56. $x+$

$+2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}-2\ln\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|+C$. 2.57. $-2\sqrt{\operatorname{ctg}x}+$

$+C$. 2.58. $\operatorname{sen}x-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x+\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+C$. 2.59. $-2\sqrt{\cos x}+$

$+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$. 2.60. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{8}\operatorname{sen}4x+\frac{1}{96}\operatorname{sen}^3 4x+\frac{3}{128}\times$

$\times\operatorname{sen}8x+C$. 2.61. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 2.62. $3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}+$

$+C$. 2.63. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$. 2.64. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen}3x+$

$+\frac{1}{20}\operatorname{sen}5x+C$. 2.65. $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}+C$. 2.66. $-\frac{\operatorname{sen}25x}{50}+$

$+\frac{\operatorname{sen} 5x}{10}+C$. **2.67.** $\frac{3}{5}\operatorname{sen}\frac{5x}{6}+3\operatorname{sen}\frac{x}{6}+C$. **2.68.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-$

$-\frac{1}{2}\cos x+C$. **2.69.** $\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}+\frac{\operatorname{sen} 5x}{20}+\frac{\operatorname{sen} 7x}{28}+C$. **2.70.** $\frac{1}{24}\times$

$\times\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **2.71.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$.

2.72. $\operatorname{arct}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$. **2.73.** $\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x+x+C$. ● Multiplíquense por $(1-\operatorname{sen} x)$ el numerador y el denominador de la función subintegral. **2.74.** $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x-\sqrt{7}}{2\operatorname{tg} x+\sqrt{7}}\right|+C$. **2.75.** $-\frac{1}{2}\times$

$\times\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x-1}{2}\right)+C$. **2.76.** $-\frac{1}{4}\ln(1+4\cos^2 x)+C$.

2.77. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right)+C$. **2.78.** $\frac{2}{5\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}-\frac{2}{5\sqrt{15}}\times$

$\times\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C$. ● $\frac{1}{(\operatorname{sen} x+4)(\operatorname{sen} x-1)}=\frac{(\operatorname{sen} x+4)-(\operatorname{sen} x-1)}{5(\operatorname{sen} x+4)(\operatorname{sen} x-1)}$.

2.79. $\ln|\operatorname{sen} x-\cos x|+C$. **2.80.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+2}{\operatorname{tg} x+6}\right|+C$. **2.81.** $\frac{\operatorname{sh} 6x}{12}+$

$+\frac{x}{2}+C$. **2.82.** $\frac{\operatorname{ch}^3 2x}{6}-\frac{\operatorname{ch} 2x}{2}+C$. **2.83.** $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}-\frac{x}{8}+C$.

2.84. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}+C$. **2.85.** $-2\operatorname{cth} 2x+C$. **2.86.** $\frac{1}{4}\times$

$\times\ln\left|\frac{\operatorname{th} x-2}{\operatorname{th} x+2}\right|+C$. ● Divídanse por $\operatorname{ch}^2 x$ el numerador y el denominador de la fracción subintegral. **2.87.** $-\frac{1}{\operatorname{sh} x}-\operatorname{cth} x+C$.

● Multiplíquense el numerador y el denominador de la fracción subintegral por $\operatorname{ch} x+1$. **2.88.** $2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2}+C$. **2.89.** $\ln|\operatorname{sh} x|-$

$-\frac{\operatorname{cth}^2 x}{2}+C$. **2.90.** $x-\operatorname{th} x-\frac{\operatorname{th}^3 x}{3}+C$. **2.91.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C$.

2.92. $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C$. **2.93.** $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+$

$+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$. **2.94.** $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+a}-6\ln\sqrt[6]{x+a}+3\ln|1+$

$+\sqrt[3]{x+a}|+C$. **2.95.** $\frac{3}{16}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$.

2.96. $\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$. **2.97.** $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+C$.

2.98. $\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$. 2.99. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\times$
$\times\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}\right|+C$. 2.100. $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^3+1}}+C$.
2.101. $\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}+C$. 2.102. $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}-a^2\sqrt{a^2-x^2}+C$.
2.103. $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. 2.104. $6\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{2}-$
$-\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{4}(x^3+3x^2-7x-9)+C$. 2.105. $\frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}+C$.
2.106. $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$. 2.107. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+10}+$
$+\frac{9}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+10})+C$. 2.108. $\frac{x-2}{2}\sqrt{4x-x^2}+$
$+2\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{2}+C$. 2.109. $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+5})+C$.
2.110. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$. 2.111. $\frac{x}{9\sqrt{x^2+9}}+C$.
2.112. $\frac{1}{8}(2x^3-5x)\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln(x^2+\sqrt{x^2-1})+C$. 3.1. $\frac{1}{2}\times$
$\times\ln(x^2+2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$. 3.2. $\frac{x^2}{2}+x+\ln|x^3-$
$-x-1|+\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$. 3.3. $-\frac{1}{5(x-2)}+\frac{1}{25}\ln\times$
$\times\left|\frac{x+3}{x-2}\right|+C$. 3.4. $-\frac{2}{9}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+$
$+\frac{1}{3}\frac{x}{1-x^3}+C$. 3.5. $\frac{1}{4}\left(2\ln\frac{x^4+1}{x^4}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^4+1}\right)+C$.
3.6. $\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right)+C$.
3.7. $-\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}+2\operatorname{arcsen}\frac{\ln x-2}{\sqrt{10}}+C$. 3.8. $-\frac{1}{2}\ln\times$
$\times\left|\frac{2x+2+\sqrt{x^2+8x+4}}{x}\right|+C$. 3.9. $\frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{3}+C$.
3.10. $\frac{\sqrt{(x^2+4x-5)^3}}{3}-(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}+9\ln(x+2+$
$+\sqrt{x^2+4x-5})+C$. 3.11. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{1}{2}\ln(x+2+$
$+\sqrt{x^2+4x-5})+C$. 3.12. $\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{5x}{3\sqrt{16-x^2}}+C$. 3.13. $\frac{1}{2}\times$
$\times\ln(x^2+\sqrt{x^4+16})+C$. 3.14. $\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}+C$. 3.15. $2\sqrt{x}+$

$+4\sqrt[4]{x}-\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}}+C$. 3.16. $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$.

3.17. $-x+\operatorname{tg}x-\sec x+C$. 3.18. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C$.

3.19. $\frac{1}{3(1-\operatorname{sen}x)^3}+C$. 3.20. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+C$. 3.21. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\times$

$\times\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}\right|+C$. 3.22. $2\operatorname{tg}x-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4x}+C$. 3.23. $\operatorname{arcsen}\times$

$\times\left(\frac{\sec x}{\sqrt{5}}\right)+C$. 3.24. $-\frac{\operatorname{sen}^2x}{2}-5\operatorname{sen}x-24\ln(\operatorname{sen}x+5)+C$.

3.25. $\ln|\operatorname{tg}x|+\operatorname{tg}^2x+\frac{\operatorname{tg}^4x}{4}+C$. 3.26. $\operatorname{tg}x-\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{\operatorname{tg}^5x}{5}+C$.

3.27. $-\frac{\cos x}{4\operatorname{sen}^4x}-\frac{3\cos x}{8\operatorname{sen}^2x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. 3.28. $-\frac{x\cos 3x}{6}+$

$+\frac{\operatorname{sen}3x}{18}+\frac{x\cos x}{2}-\frac{\operatorname{sen}x}{2}+C$. 3.29. $\ln|\operatorname{th}x|+C$. 3.30. $\operatorname{arctg}\times$

$\times(\operatorname{th}x)+C$. 3.31. $\ln(\operatorname{ch}x)-\frac{\operatorname{th}^2x}{2}-\frac{\operatorname{th}^4x}{4}+C$. 3.32. $2\operatorname{sh}\sqrt{1+x}+C$.

3.33. $x\operatorname{th}x-\ln(\operatorname{ch}x)+C$. 3.34. $\frac{x}{2}-\frac{x\cos(2\ln x)+2x\operatorname{sen}2(\ln x)}{10}+C$.

3.35. $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C$. 3.36. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$. 3.37. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$.

3.38. $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left(\frac{a^x}{b^x}+\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+C$. 3.39. $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arcsen}x}(x+$

$+\sqrt{1-x^2})+C$. 3.40. $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$.

3.41. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\operatorname{arcsen}x+\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}x)^2+\ln|x|+C$. 3.42. $x-e^{-x}\times$

$\times\operatorname{arcsen}(e^x)-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)+C$, $x\leqslant 0$. 3.43. $-\frac{x^2}{6}-$

$-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^3)+C$. 3.44. $\frac{x}{4}+$

$+\frac{x^2}{12}+\frac{1}{4}(1+x^2)\operatorname{arctg}x+C$. 3.45. $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\times$

$\times\frac{\ln(1+x^2)}{1+x+x^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C$. 3.46. $-x^2+\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+$

$+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+C$. 3.47. $-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2-1}+\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1}-$

$-\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}+1}+C$, $|x|>1$. 3.48. $\left(\frac{3-x}{1-x}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\times$

$\times\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+C$, $0<x<1$.

3.49. e^x+C, $x>0$. 3.50. $x-\ln(1+e^x)-2e^{-x/2}\operatorname{arctg}e^{x/2}-$

$-(\operatorname{arctg}e^{x/2})^2+C$.

4.1. $\frac{35}{2}$. ● Divídase el segmento [0, 5] en n partes iguales.

4.2. 1. ● Divídase el segmento $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en n partes iguales. Aplíquese la fórmula: $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\operatorname{sen}\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$. 4.3. $e^{10}-1$. ● Divídase el segmento [0, 10] en n partes iguales. 4.4. 2/3. ● Divídase el segmento [1, 3] en n partes de modo tal que las abscisas de los puntos de división formen una progresión geométrica. 4.5. 15/4. 4.6. 9/2. 4.7. 5. 4.8. 19/15. 4.9. $3\frac{57}{64}$. 4.10. 45/4. 4.11. 1. 4.12. 1. 4.13. e^2-e. 4.14. 7/ln 2. 4.15. ln 2,5. 4.16. (ln 3)/2. 4.17. $\pi/12$. 4.18. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$. 4.19. $\frac{\pi}{6}+\frac{8\sqrt{3}}{27}$. 4.20. $\frac{1}{3}(2-3\operatorname{ch}2+\operatorname{ch}^3 2)$. 4.21. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. 4.22. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 4.23. $\frac{11}{2}+7\ln 2$. 4.24. $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$. 4.25. $\frac{1}{2}(e-\sqrt[4]{e})$. 4.26. sen 1. 4.27. $\frac{\pi}{4}$. 4.28. $\frac{2}{3}$. 4.29. $\frac{1}{12}\operatorname{sh}2+\frac{1}{6}$. 4.30. $\frac{1}{6}\ln\frac{2}{3}$. 4.31. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 4.32. $2-\ln 5$. 4.33. $\frac{\pi}{4}$. 4.34. $\frac{\pi}{4}$. ◀ La suma $S_n = \frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$ puede considerarse como suma integral para la función $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ en el segmento [0, 1]. Por ello, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. ▶ 4.35. 1. 4.36. $\frac{2}{3}(2^{3/2}-1)$. 4.37. $\frac{19}{6}$. 4.38. $\frac{45}{2}$. 4.39. 7. 4.40. $\frac{16}{3}$. 4.41. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4.42. $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$. 4.43. $2\ln\frac{3}{2}$. 4.44. $4-3\ln 3$. 4.45. a) Menos. ● Divídase el segmento de integración en los segmentos $[-2, -1]$ y $[-1, 1]$ y hágase uso de las propiedades 1) y 9). b) Más; c) menos. 4.46. a) Segunda; b) primera; c) segunda. 4.47. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{2}{\pi}$; d) $\frac{4}{3\pi}$. 4.48. $\frac{2}{\pi}I_0\cos\varphi$. 4.49. $2\sqrt{7} < I < 6$. 4.50. $\frac{2\pi}{\sqrt{7}} <$

$< I < \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. 4.51. a) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) < I < \frac{2\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$;

b) $|I| < \frac{\sqrt{30}}{4}$. 4.52. a) $\frac{4}{3} < I < \frac{2}{3}\sqrt{5}$; b) $I < \sqrt{2{,}125}$.

4.53. a) $\frac{dI}{d\beta} = \frac{e^{\beta}}{\beta}$; b) $\frac{dI}{d\alpha} = -\frac{e^{\alpha}}{\alpha}$. 4.54. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, 1,$

2, ... 4.55. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 4.56. $\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}$. 4.57. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

4.58. $\frac{x^2-x}{\ln x}$. 4.60. No. 4.61. $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$. 4.62. $\ln\frac{3}{2}$.

4.63. $\frac{1}{4}(2+\operatorname{sh} 2)$. 4.64. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. 4.65. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 4.66. π.

4.67. $\frac{\pi}{6}$. 4.68. $\frac{\pi}{6}$. 4.69. $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$. 4.70. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 4.71. $\frac{1}{32}(\pi+2)$.

4.72. $2\left(\ln 2 - \frac{1}{4}\right)$. 4.73. $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. 4.74. $\frac{1}{6}$. 4.75. $4-\pi$.

4.76. $\frac{81}{16}\pi$. 4.80. 1. 4.81. $\pi\sqrt{2}-4$. 4.82. $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3)$.

4.83. $e-2$. 4.84. $\frac{4}{25}(e^{3\pi/4}+1)$. 4.85. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.

4.86. $\frac{e^2+1}{4}$. 4.87. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. 4.88. $\frac{\pi^2-8}{32}$. 4.89. $\frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1)$.

4.90. $I_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k}\cdot\frac{\pi}{2}$ $(n=2k)$; $I_{2k+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2k+1)}\times$

$\times (n=2k+1)$; $I_7 = \frac{16}{35}$; $I_8 = \frac{35}{256}\pi$. 4.91. $I_4 = 24 - \frac{65}{e}$.

5.1. $\frac{1}{2}$. 5.2. Diverge. 5.3. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 5.4. $\frac{2}{5}$. 5.5. Diverge.

5.6. $1+\ln 2$. 5.7. $\frac{1}{3}$. 5.8. $\frac{1}{2}$. 5.9. Diverge. 5.10. Converge.

5.11. Converge. 5.12. Diverge. 5.13. Diverge. 5.14. Converge.

5.15. Converge. 5.16. Diverge. 5.17. Diverge. 5.18. $\frac{5}{2}(\sqrt[5]{3}+1)$.

5.19. Diverge. 5.20. π. 5.21. $\frac{\pi}{3}$. 5.22. $\frac{16}{3}$. 5.23. $2\sqrt{2}$. 5.24. Diverge. 5.25. π. 5.26. Converge. 5.27. Diverge. 5.28. Diverge. 5.29. Converge. 5.30. Diverge.

6.1. e^2. 6.2. πab. 6.3. 16/3. 6.4. 9/2. 6.5. $\frac{3}{2}(3\pi-2)$. 6.6. $\frac{56}{15}p^2$.

6.7. a^2. 6.8. $\frac{a^2}{4}(\pi - 2\ln 2)$. 6.9. $\frac{c^3}{6p}$. 6.10. $2\ln 2 - \frac{1}{2}$. 6.11. 32/3.

6.12. 1. 6.13. a^2. 6.14. $1{,}5-2\ln 2$. 6.15. $\frac{e}{2}-1$. 6.16. $4\ln 2-1$.

6.17. $\frac{\pi a^2}{2}-\frac{2}{3}a^2$ y $\frac{\pi a^2}{2}+\frac{2}{3}a^2$. 6.18. $a^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln(2+\sqrt{3})\right)$.

6.19. $r(a+h)-\frac{a^2r}{\sqrt{2ah+h^2}}\ln\frac{a+h+\sqrt{2ah+h^2}}{a}$. 6.20. $5\pi a^2$.

6.21. $\frac{a^2}{2}(3\sqrt{2}-2-\ln(1+\sqrt{2}))$. 6.22. $\frac{\pi a^2}{2}+a^2-\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ y $\frac{\pi a^2}{2}-a^2+\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$. 6.23. $\frac{a^2r}{\sqrt{2ah-h^2}}\arccos\left(1-\frac{h}{a}\right)-$ $-(a-h)r$. 6.24. $\frac{a^2}{4}(\pi+2\ln 2)$. 6.25. πa^2. 6.26. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 6.27. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$.

6.28. 12π. 6.29. $\frac{24}{5}ab\sqrt{3}$. 6.30. $\frac{8}{15}$. 6.31. $\frac{3}{2}\pi a^2$. 6.32. $\frac{\pi a^2}{8}$.

6.33. $\frac{\pi a^2}{4}$. 6.34. $\frac{a^2}{4}\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$. 6.35. $\frac{\pi a^2}{4}$. 6.36. $\frac{1}{4}(e^{4\pi}-1)^2$.

6.37. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. 6.38. $\frac{\pi a^2}{4}$. 6.39. a^2. 6.40. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. 6.41. $\frac{1}{2}\sqrt{5}+$ $+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$. 6.42. $2\sqrt{3}$. 6.43. $2p(3\sqrt{3}-1)$. 6.44. $4a\ln(a+$ $+\sqrt{a^2-1})-2\sqrt{a^2-1}$. 6.45. $\pi a\sqrt{2}$. 6.46. $\pi a-2(a-b)\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$.

● Pásese a las coordenadas polares. 6.47. $\frac{1}{2}\operatorname{sh}6$. 6.48. $\frac{4}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=$ $=\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$. 6.49. $\frac{134}{27}p$. 6.50. $6a$. 6.51. $\sqrt{2}(e-1)$. 6.52. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

6.53. $\frac{13}{3}$. 6.54. $4a\sqrt{3}$. 6.55. $x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y=\frac{3}{2}a$.

6.56. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$. 6.57. $8(2-\sqrt{3})$. 6.58. $\frac{3}{2}\pi a$. ● $0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi$.

6.59. $5\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{5}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 6.60. $\frac{16}{3}a$. 6.61. $2a\sqrt{6}$.

6.62. $a\sqrt{3}$. 6.63. 8. 6.64. $\frac{1}{3}a\sqrt{t}(3+2t)$. 6.65. $8\sqrt{2}$. 6.66. $\frac{\pi}{8}\times$ $\times(\operatorname{sh}12+12)$. 6.67. a) $8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$; b) $2\pi+\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$.

6.68. $\frac{2\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$. 6.69. 48π. 6.70. $\frac{16}{15}\pi a^2(\sqrt{2}+1)$. 6.71. a) $3\pi a^2$; b) $\frac{56}{5}\pi a^2\sqrt{3}$. 6.72. $\pi\left(\sqrt{5}+4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. 6.73. a) $9\pi^2a^2$; b) $24\pi a^2$.

6.74. $3\pi a^2$. 6.75. $\frac{8}{3}\pi a^2(3\pi-4)$. 6.76. $6\pi^2a^2$. 6.77. $4\pi^2a^2$. 6.78. $\frac{96}{5}\pi a^2$. 6.80. $\frac{8}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$. 6.81. $\frac{128}{105}a^3$. 6.82. $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$. 6.83. $\frac{272}{15}\pi$. 6.84. $\frac{11}{4}\pi$. 6.85. $\frac{\pi^3}{2}$. 6.86. $\frac{64}{3}\pi$. 6.87. $\frac{\pi a^2h}{2}$. 6.88. a) $\frac{\pi a^3}{2}$; b) $\frac{\pi a^3}{4}$. 6.89. $\frac{8}{15}\pi a^3$. 6.90. $\frac{3}{4}\pi^2a^3$. 6.91. $\frac{64}{105}\pi a^3$. 6.92. $\frac{\pi a^3}{12}\times$ $\times(3\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2)$.

7.1. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. 7.2. $M_x=\frac{1}{2}(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+$ $+\ln(\sqrt{2}-1)(e+\sqrt{1+e^2}))$, $I_x=\frac{1}{3}((1+e^2)^{3/2}-\sqrt{8})$. 7.3. $M_x=$ $=\frac{32}{3}a^2$, $I_x=\frac{256}{15}a^3$. 7.4. $M_x=2a^2$, $I_x=\frac{\pi a^3}{2}$. 7.5. $M_x=2a^2$, $M_y=\pi a^2$. 7.6. $\bar{x}=\frac{a(\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1)}{\operatorname{sh}1}=a\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)$, $\bar{y}=\frac{a(2+\operatorname{sh}2)}{4\operatorname{sh}1}=$ $=\frac{a}{2}(\operatorname{csch}1+\operatorname{ch}1)$. 7.7. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{2}{5}a$. 7.8. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{4}{5}a$. 7.9. $\bar{x}=$ $=\bar{y}=\frac{2}{5}a$. 7.10. $\frac{v_0^2}{2g}$. 7.11. $x=\frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$; $v_{\text{med}}=\frac{2}{\pi}v_0$. 7.12. $t=6$ sec, $s=144$ m. 7.13. 250 m. 7.14. $=0{,}125$ joules. ● De acuerdo con la ley de Hook, la fuerza es proporcional al estiramiento del muelle. 7.15. $\frac{1}{12}\gamma\pi R^2H^2$. 7.16. $\frac{1}{3}\pi R^2H^2$. 7.17. $\frac{1}{12}\gamma a^2H^2$. 7.18. $\frac{1}{4}\pi H^2R^2$. 7.19. $\frac{16}{15}\sqrt{2}ap^3$. 7.20. $e_0e\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$; $\frac{e_0e}{a}$. ● De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza de interacción de las cargas en el vacío es igual a $F=\frac{e_0e}{x^2}$, donde x es la distancia entre las cargas. 7.21. 2066 ln 2. ● En un proceso isotérmico $pv=p_0v_0$. El trabajo es igual a $A=\int_{v_1}^{v_2}p\,dv$, donde v_1 y v_2 son los valores inicial y final del volumen. 7.22. $\frac{p_0v_0}{k-1}\left(\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}-1\right)$. ● En un proceso adiabático $pv^k=p_0v_0^k$, donde $k\approx1{,}4$ (ley de Poisson). El trabajo es igual a $A=\int_{v_0}^{v_1}\frac{p_0v_0^k}{v^k}dv$. 7.23. $\frac{4}{15}\pi\gamma\omega^2R^5$. 7.24. $\frac{1}{60}\omega^2\gamma dha^3$. 7.25. $\frac{1}{24}\gamma alh^3\omega^2$. 7.26. $\frac{1}{4}\pi\omega^2\gamma R^4H$. 7.27. $\frac{ah^2}{3}$. 7.28. $\gamma\pi R^2H$.

7.29. $\frac{2}{3}\gamma ab^2$. **7.30.** $\gamma\pi RH^2$. **7.31.** 20,625 kg. **7.32.** $\frac{0{,}24I_0^2R\pi}{\omega}$. ● De acuerdo con la ley de Joule—Lenz, la cantidad de calor que se desprende por una corriente directa durante el tiempo t es igual a $Q = 0{,}24I^2Rt$. **7.33.** $\frac{S}{\mu S_0}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 5{,}6$ min. ● De acuerdo con la ley de Torricelli, la velocidad con la que el agua fluye por un orificio a la distancia x de la superficie libre es igual a $v = \mu\sqrt{2gx}$, donde $\mu \approx 0{,}6$, g es la aceleración de la gravedad. **7.34.** $\frac{\pi pa^4}{8\mu l}$.

◀ $Q = \int_0^a v \cdot 2\pi r\,dr = \frac{2\pi p}{4\mu l}\int_0^a (a^2 - r^2)\,r\,dr = \frac{\pi p}{2\mu l}\left(-\frac{(a^2-r^2)^2}{4}\right)\Big|_0^a =$

$= \frac{\pi pa^4}{8\mu l}$. ▶ **7.35.** $\frac{2kmM}{\pi R^2}$. ● Aplíquese la ley de la gravitación universal. **7.36.** $\frac{R^2}{3r^2}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 11$ minutos. **7.37.** $\frac{2}{3}\mu ah\sqrt{2gh}$.

8.1. 0,5236. **8.2.** 0,1963. **8.3.** 0,1178. **8.4.** 0.3926. **8.5.** 1,7500. **8.6.** 3.2413. **8.7.** 4,2218. **8.8.** 0,4969. **8.9.** 0,6082. **8.10.** 2,6291. **8.11.** 0,3927. **8.12.** 0,2500. **8.13.** 1,4627. **8.14.** 1,3419. **8.15.** 0,8120. **8.16.** 1,1184. **8.17.** 0,1728. **8.18.** 4,3555. **8.19.** 0,6205. **8.20.** 0,6076. **8.21.** 1,5708. **8.22.** 0,9160. **8.23.** 0,6651. **8.24.** 0,7724.

8.25.

```
FUNCTION R(A, B, F, N)
H = (B - A)/N
R = 0.
X = A - H/2.
DO 1 I = 1,N
X = X + H
1 R = R + F(X)
R = R * H
RETURN
END
```

8.26.

```
FUNCTION TR(A, B, F, N)
H = (B - A)/N
TR = (F(A) - F(B))/2.
X = A
DO 1 I = 1,N
X = X + H
1 TR = TR + F(X)
TR = TR * H
RETURN
END
```

8.27.

```
FUNCTION T(A, B, F, EPS)
T1 = (F(A) + F(B))/2
T = T1
H = B - A
N = 1
1 X = A - H/2.
DO 2 I = 1,N
X = X + H
```

```
2 T = T + F(X)
  T2 = T
  N = N*2
  H = H/2.
  T = T*H
  EPS1 = ABS(T - T1)/3.
  IF(EPS.GT.EPS1) GO TO 3
  RETURN
3 T1 = T
  T = T2
  GO TO 1
  END
```

8.28.

```
  FUNCTION P(A, B, F, N)
  H = (B - A)/(2*N)
  P1 = 0.
  P2 = 0.
  X = A
  DO 1 I = 1,N
  X = X + H
  P1 = P1 + F(X)
  X = X + H
1 P2 = P2 + F(X)
  P = (F(A) - F(B) + 2*P2 + 4.*P1)*H/3
  RETURN
  END
```

8.29. Para el problema 8.1 la respuesta se escribe del modo siguiente:

```
  FUNCTION F(X)
  F = 1./SQRT(5. + 4.*(1. - X*X)
  RETURN
  END
```

Para los problemas restantes el operador que determina el valor de F tiene la forma siguiente:

```
  F = (X ** 3)/(X ** 8 + 1.)          (para 8.2)
  F = X/(X*X + 3.*X + 2.)             (para 8.3)
  F = 1/(4. + X**2)                   (para 8.4)
  F = (1 + SQRT(X))/X**2              (para 8.5)
  F = SQRT(1. - X**3)                 (para 8.6)
  F = SQRT(1. + X**5)                 (para 8.7)
  F = 1./SQRT(1. + X**4)              (para 8.8)
```

```
F = 1.(SQRT(1. — X**4)                                  (para 8.9)
F = 1./(1. + X**2)**0.333333                            (para 8.10)
F = SQRT(X*(1. — X))                                    (para 8.11)
F = X*ALOG(1. + X)                                      (para 8.12)
F = EXP(X**2)                                           (para 8.13)
F = EXP(X**3)                                           (para 8.14)
F = EXP(SQRT(X))                                        (para 8.15)
F = 1./ALOG(X)                                          (para 8.16)
Y = 1. + X**2                                           (para 8.17)
F = ALOG(Y)/Y                                           (para 8.18)
F = ALOG(5. + 4.*COS(X))                                (para 8.19)
F = (SEN(X) — X)/SQRT(X) + SQRT(X)                      (para 8.20)
F = (X**0.333333)*COS(X)                                (para 8.21)
F = SQRT(SEN(X))*SEN(X/2.)                              (para 8.22)
F = (ATAN(X) — X)/X + 1.                                (para 8.23)
F = EXP(X)/X                                            (para 8.24)
F = (SEN(X) — X)/X + 1.
```

8.30. b) La respuesta se da para el problema 8.15:

```
      EXTERNAL F
      N = 16
      Y = R(0.0, 0.5, F, N)
1     Y1 = Y
      N = N*2
      Y = R(0.0, 0.5, F, N)
      EPS = ABS((Y1 — Y)/3.)
      IF(EPS — 0.0001)2,2,1
2     WRITE (3,3) Y
3     FORMAT (' INTEGRAL = ', F8.4)
      STOP
      END
```

● El problema que se plantea ante la calculadora electrónica debe contener tres programas: uno que se indica aquí y los otros dos obtenidos al resolver los problemas 8.25 y 8.29.

El programa para la resolución de cualquier otro problema se diferencia del que se da mediante los operadores que contienen una referencia a la función subprograma R, por ejemplo, para el problema 8.18 Y = R(0.0, 3.1416.F,N).

c) Diferencia con relación al programa aducido arriba en los operadores mencionados:

```
Y = P(0.0,0.5,F,N)
EPS = ABS((Y1 — Y)/15.)
```

8.31. La respuesta para el problema 8.16.

```
      EXTERNAL F
      Y = T(2.,3.,F,0.0001)
      WRITE (3,1) Y
1     FORMAT (' ', F20.4)
      STOP
      END
```

● Véanse las indicaciones para el problema 8.30, b).

CAPÍTULO 7

CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. Conceptos fundamentales

1. Concepto de función de varias variables. Recordemos que todo juego ordenado de n números reales $x_1, \ldots, x_n$ se denota $(x_1, \ldots, x_n)$ ó $P(x_1, \ldots, x_n)$ y se llama punto del espacio aritmético n-dimensional $\mathbb{R}^n$, y los números $x_1, \ldots, x_n$ llevan el nombre de coordenadas del punto $P = P(x_1, \ldots, x_n)$. La distancia entre los puntos $P(x_1, \ldots, x_n)$ y $P'(x_1', \ldots, x_n')$ se determina por la fórmula

$$\rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2}.$$

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario de puntos de un espacio aritmético n-dimensional. Si a cada punto $P(x_1, \ldots, x_n) \in D$ se le ha puesto en correspondencia cierto número real bien determinado $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$, se dice que sobre el conjunto D está definida la *función numérica* f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de n variables $x_1, \ldots, x_n$. El conjunto D se denomina campo de definición, y el conjunto $E = \{u \in \mathbb{R} \mid u = f(P), P \in D\}$, campo de valores de la función $u = f(P)$.

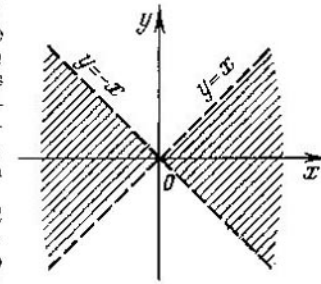


Fig. 68

En el caso particular de $n = 2$ la función de dos variables $z = f(x, y)$ puede considerarse como función de los puntos de un plano en el espacio geométrico tridimensional, provisto de un sistema fijo de coordenadas $Oxyz$. Se llama gráfica de dicha función el conjunto de puntos

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\},$$

que representa, hablando en general, cierta superficie en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 1. Hállese el campo de definición de la función

$$z = \operatorname{arcsen} \frac{y}{x}.$$

◀ La función está definida para

$$-1 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 1, \quad x \neq 0.$$

Por consiguiente, $-x \leqslant y \leqslant x$ para $x > 0$, y $x \leqslant y \leqslant -x$ para $x < 0$. El campo de definición de la función está expuesto en la fig. 68 y contiene las fronteras del campo, a excepción del origen de coordenadas. ▶

EJEMPLO 2. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$. Hállense $f(3, -2)$, $f(x, y)$, $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$.

◀ Tenemos:

$$f(3, -2) = \frac{3^2 - (-2)^2}{3(-2)} = -\frac{5}{6}, \quad f(y, x) = \frac{y^2 - x^2}{xy},$$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{y^2 - x^2}{xy} = -f(x, y). \blacktriangleright$$

1.1. Exprésese el área S de un triángulo como una función de longitudes de sus dos lados x e y, si el perímetro del triángulo es igual a $2p$. Hállese el campo de definición de esta función.

1.2. Exprésese el volumen V de un cono circular como función del área S de su superficie lateral y de su longitud l de la generatriz. Hállese el campo de definición de esta función.

1.3. Exprésese el área S de un trapecio isósceles como una función de longitudes de sus lados, si x e y son las longitudes de las bases y z es la longitud del lado lateral. Hállese el campo de definición de esta función.

Hállense los campos de definición de las funciones de dos variables (R = const):

1.4. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. **1.5.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

1.6. $z = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$. **1.7.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}$.

1.8. $z = (2x + 3y - 1)/(x - y)$.

1.9. $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$. **1.10.** $z = \ln(-x - y)$.

1.11. $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$. **1.12.** $z = y\sqrt{\cos x}$.

1.13. $z = \sqrt{\log_a (x^2 + y^2)}$. **1.14.** $z = \arccos \dfrac{x}{x + y}$.

1.15. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.

1.16. $z = \operatorname{arcsen} \frac{x}{y^2} + \operatorname{arcsen} (1 - y)$.

1.17. $f(r, \varphi) = r\sqrt{\operatorname{sen} \varphi}$.

1.18. $f(r, \varphi) = r\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Hállense los campos de definición de las funciones de tres variables:

1.19. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}$. ($R = \text{const}$).

1.20. $u = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$.

1.21. $u = \ln (1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

Hállense los campos de definición de las funciones de n variables:

1.22. $u = \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} + \ldots + \sqrt{1 - x_n^2}$.

1.23. $u = \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{a_n^2}}$.

1.24. Sea dada una función $f(x, y) = \frac{2x - 3y}{3x - 2y}$. Hállense $f(2, 1)$, $f(1, 2)$, $f(3, 2)$, $f(2, 3)$, $f(a, a)$, $f(a, -a)$.

1.25. Sea dada una función $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$. Hállense $f(-3, 4)$ y $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

1.26. Hállese $f(x)$, si $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ $(x > 0)$.

1.27. Sea $z = x + y + f(x - y)$. Hállense las funciones f y z, si $z = x^2$ para $y = 0$.

1.28.** Hállese $f(x, y)$, si $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

1.29. Sean dadas las funciones: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$. Hállense: a) $f(\varphi(x, y), y^2)$; b) $\varphi(f(x, y), \varphi(x, y))$.

1.30. Sean dadas las funciones: $\varphi(x, y) = e^x \cos y$, $\psi(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$. Demuéstrese:

a) $\varphi^2(x, y) - \psi^2(x, y) = \varphi(2x, 2y)$;

b) $2\varphi(x, y)\psi(x, y) = \psi(2x, 2y)$.

1.31. Sean dadas las funciones: $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = \operatorname{sen} x$. Hállense: a) $f(\varphi(x), \psi(x))$; b) $\varphi(f(x, y))$.

2. Límite y continuidad de la función. El número A se denomina *límite* de la función $u = f(P)$ cuando el punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiende al punto $P_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que de la condición

$$0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

se deduce

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon.$$

En este caso se escribe:

$$A = \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \ldots\ldots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

EJEMPLO 3. Aclárese si la función $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ tiene límite cuando $x \to 0$, $y \to 0$.

◀ Supongamos que el punto $P(x, y)$ tiende al punto $P_0(0, 0)$. Examinemos la variación de x e y a lo largo de la recta $y = kx$. Obtenemos

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

El resultado tiene valores diferentes en función de k elegido, razón por la cual la función no tiene límite. ▶

La función $u = f(P)$ se llama *continua en el punto* P_0, si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1) la función $f(P)$ está definida en el punto P_0;
2) existe $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$;
3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Una función se llama *continua en el campo*, si es continua en cada punto de este campo. Si en el punto P_0 está perturbada por lo menos una de las condiciones de 1) a 3), P_0 se denominará punto de discontinuidad de la función $f(P)$. Los puntos de discontinuidad pueden ser aislados y pueden formar líneas de discontinuidad, superficies de discontinuidad, etc.

EJEMPLO 4. Hállense los puntos de discontinuidad de la función

$$u = \frac{1 - xyz}{2x + 3y - z + 4}.$$

◀ La función no está definida en los puntos, donde se anula el denominador. Por ello, la función tiene una superficie de discontinuidad, a saber, el plano $2x + 3y - z + 4 = 0$. ▶

Hállense los límites:

1.32. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$. **1.33.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy}$.

1.34. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{y}$.

1.35. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

1.36. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

1.37. Muéstrese que para $x \to 0$ e $y \to 0$ la función $z = \dfrac{x}{y-x}$ puede tender hacia cualquier límite. Dénse ejemplos de tal aproximación del punto (x, y) hacia el punto $(0, 0)$, para la cual $\lim z = 3$, $\lim z = 2$, $\lim z = 1$, $\lim z = -2$.

1.38. Muéstrese que para la función $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ no existe $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$, calculando los límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)), \quad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)).$$

1.39. Muéstrese que para la función $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ existen y son iguales entre sí los límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = 0,$$

y, sin embargo, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ no existe.

1.40. Aclárese si tiene límite la función $\operatorname{sen} \ln (x^4+y^2)$, cuando $x \to 0$, $y \to 0$.

1.41. Aclárese si tiene límite la función $\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^2}$, cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$.

1.42*. Muéstrese que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

es continua en el punto (0, 0) a lo largo de cada rayo $x = t\cos\alpha$, $y = t \operatorname{sen}\alpha$ $(0 \leqslant t < +\infty)$ que pasa por dicho punto, es decir, $\lim\limits_{t \to 0} f(t\cos\alpha, t \operatorname{sen}\alpha) = f(0, 0)$, sin embargo esta función no es continua en el punto (0, 0).

1.43. Muéstrese que en el punto (0, 0) las funciones que siguen más abajo son continuas respecto a cada una de las variables x e y, pero son discontinuas en la totalidad de variables:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = y = 0; \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{(x + y)^3}, & \text{si} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x = y = 0. \end{cases}$

Hállense los puntos de discontinuidad de las funciones de dos variables:

1.44. $z = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$.

1.45. $z = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \pi x + \operatorname{sen}^2 \pi y}$. **1.46.** $z = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$.

1.47. $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$. **1.48.** $z = \dfrac{x^3 + y^2}{(x + y)(y^2 - x)}$.

1.49. $z = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)}$.

Hállense los puntos de discontinuidad de las funciones de tres variables:

1.50. $u = \dfrac{1}{xyz}$. **1.51.** $u = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1}$.

1.52. $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$. **1.53.** $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2 - 1}$.

1.54. $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2 + 1}$.

3. Derivadas parciales. Sea $(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ un punto fijo arbitrario perteneciente al campo de definición de la función $u = f(x_1, \ldots, x_n)$. Dando al valor de la variable x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ un incremento Δx_k, examinemos el límite

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}.$$

Este límite lleva el nombre de *derivada parcial* (*de primer orden*) de la función dada respecto de la variable x_k en el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ y se designa $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ ó $f'_{x_k}(x_1, \ldots, x_n)$.

Las derivadas parciales se calculan según las reglas y fórmulas de derivación corrientes (considerando todas las variables, a excepción de x_k, como magnitudes constantes).

EJEMPLO 5. Hállense las derivadas parciales de la función

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

◀ Considerando y constante, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Considerando x constante, se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \blacktriangleright$$

La función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se denomina *homogénea* de grado m, si para cualquier número real $t \neq 0$ se verifica la igualdad

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Si una función homogénea $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de grado m tiene derivadas parciales respecto de cada una de las variables, se cumple la relación (*teorema de Euler*)

$$x_1 f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_2 f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$

$$\ldots + x_n f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = mf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

EJEMPLO 6. Compruébese el teorema de Euler, si

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

◀ Tenemos

$$f(tx, ty) = A(tx)^2 + 2B(tx)(ty) + C(ty)^2 = t^2 f(x, y).$$

Por consiguiente, $m = 2$;

$$f'_x(x, y) = 2(Ax + By), \quad f'_y(x, y) = 2(Bx + Cy),$$

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) \equiv 2x(Ax + By) + 2y(Bx + Cy) = 2f(x, y). \blacktriangleright$$

Se llaman *derivadas parciales de segundo orden* de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ las derivadas parciales de sus derivadas parciales de primer orden. Las derivadas parciales de segundo orden se designan del modo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = f''_{x_k x_l}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_n),$$

etc.

De un modo análogo se determinan y se designan las derivadas parciales de orden superior al segundo.

El resultado de la derivación múltiple de una función respecto a las diferentes variables no depende de la sucesión en que se realiza la derivación, siempre que las derivadas parciales «mixtas» que aparecen en este caso sean continuas.

EJEMPLO 7. Hállense las derivadas parciales de segundo orden de la función $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

◀ Tenemos (véase el ejemplo 5)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Derivamos por segunda vez:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\left(\text{nos hemos convencido aquí de que } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \blacktriangleright$$

Hállense las derivadas parciales de primer y segundo órdenes de las funciones dadas:

1.55. $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$. **1.56.** $z = xy + \frac{y}{x}$.

1.57. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. **1.58.** $z = xe^{-xy}$.

1.59. $z = \frac{\cos y^2}{x}$. **1.60.** $z = y^x$.

1.61. $z = \ln(x^2+y^2)$. **1.62.** $z = \operatorname{arcsen} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1.63. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **1.64.** $u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$.

1.65. $u = xy^2z^3t^4 + 3x - 4y + 2z - t + 1$.

1.66. Hállense $f'_x(3, 2)$, $f'_y(3, 2)$, $f''_{xx}(3, 2)$, $f''_{x,y}(3, 2)$, $f''_{yy}(3, 2)$, si $f(x, y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$.

1.67. Hállense $f'_x(1, 2)$, $f'_y(1, 2)$, $f''_{xx}(1, 2)$, $f''_{xy}(1, 2)$, $f''_{yy}(1, 2)$, si $f(x, y) = \int_x^{x^2+y^2} e^t\,dt$.

1.68. Muéstrese que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, si $z = x \operatorname{sen}(ax + by)$.

1.69. Muéstrese que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, si $z = \cos\frac{y}{x} \times$ $\times \arccos\frac{x}{y}$.

1.70. Hállense $f'''_{xxx}(0, 1)$, $f'''_{xxy}(0, 1)$, $f'''_{xyy}(0, 1)$, $f'''_{yyy} \times$ $\times (0, 1)$, si $f(x, y) = e^{x^2y}$.

1.71. Hállese $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta}$, si $u = \ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

1.72. Hállese $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}$, si $u = x^3 \operatorname{sen} y + y^3 \operatorname{sen} x$.

1.73. Hállese $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p\,\partial y^q}$, si $u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q$.

Compruébese el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas en los problemas 1.74—1.77.

1.74. $z = x^3 + x^2y - y^3$. **1.75.** $z = \frac{y}{x^3-y^3}$.

1.76. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **1.77.** $u = \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$.

1.78. Calcúlese

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

si $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z = r\operatorname{sen}\theta$.

1.79. Muéstrese que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} + x + z = 0$, si $z = 4e^{-2y} + (2x + 4x - 3e)\, e^{-y} - x - 1$.

1.80. Muéstrese que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$, si $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

1.81. Muéstrese que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, si $u = \frac{x-y}{z-t} + \frac{t-x}{y-z}$.

1.82. Muéstrese que la función $u = A \operatorname{sen} \lambda x \cos a\lambda t$ satisface la *ecuación de oscilaciones de una cuerda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.83. Muéstrese que la función $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$ satisface la *ecuación de conducción del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.84. Muéstrese que la función

$$u = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

satisface la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

1.85*. Muéstrese que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

tiene derivadas parciales $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en el punto (0, 0), aunque es discontinua en este punto.

1.86*. Muéstrese que para la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

el valor de la segunda derivada mixta en el punto (0, 0) depende de la sucesión de derivación, a saber: $f''_{xy}(0, 0) = -1$, $f''_{yx}(0, 0) = 1$.

4. Diferencial de una función y su aplicación. Se llama *incremento total* de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, correspondiente a los incrementos de los argumentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, la diferencia

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - \\ - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

La función $u = f(P)$ se denomina *derivable* en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si en todo lugar de cierto entorno de dicho punto el incremento total de la función puede representarse en la forma

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho),$$

donde $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son números que no dependen de $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Se llama *diferencial du de primer orden* de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la parte principal, lineal respecto a $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, del incremento total de dicha función en el punto mencionado, es decir,

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n.$$

Las diferenciales de las variables independientes se toman iguales, por definición, a sus incrementos:

$$dx_1 = \Delta x_1, \quad dx_2 = \Delta x_2, \ldots, dx_n = \Delta x_n.$$

Para la diferencial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se verifica la fórmula

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n. \qquad (1)$$

Las funciones u, v de varias variables obedecen a las reglas habituales de derivación:

$$d(u + v) = du + dv,$$
$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

EJEMPLO 8. Hállese el incremento total y la diferencial de la función $f(x, y) = x^2 y$ en el punto (x, y).

◀ $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y)$,

$$\Delta f(x, y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y = \\ = 2xy \cdot \Delta x + x^2 \Delta y + 2x \Delta x \Delta y + y \Delta x^2 + \Delta x^2 \Delta y,$$
$$df(x, y) = 2xy \Delta x + x^2 \Delta y. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 9. Hállese la diferencial de la función

$$f(x, y, z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

◀ 1er MÉTODO. Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{xz}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{yz}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Conforme a la fórmula (1) obtenemos

$$df(x, y, z)=-\frac{xz}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx-\frac{yz}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dz=$$
$$=\frac{(x^2+y^2)\,dz-z\,(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

2do MÉTODO. Aplicando las reglas de derivación, tenemos:

$$df(x, y, z)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dz-z\cdot d\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dz-z\cdot\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)\,dz-z\,(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \blacktriangleright$$

Cuando $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_n^2}$ es suficientemente pequeño para una función derivable $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tienen lugar las igualdades aproximadas

$$\Delta u \approx du,$$

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n) \approx$$
$$\approx f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+df(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

EJEMPLO 10. Calcúlese aproximadamente

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}.$$

◀ Vamos a considerar el número buscado como un valor de la función $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ para $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, si $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$. Tenemos:

$$f(4, 3)=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

$$\Delta f(x, y) \approx df(x, y)=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\Delta f(4, 3) \approx \frac{4\cdot 0{,}05+3\cdot 0{,}07}{5} \approx 0{,}08.$$

Por consiguiente,

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2} \approx 5+0{,}08=5{,}08. \blacktriangleright$$

Se denomina *diferencial de segundo orden* d^2u de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la diferencial de su diferencial de primer orden que se considera como función de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con $x_1, dx_2, \ldots, dx_n$ fijas:

$$d^2u = d(du).$$

Análogamente se define la diferencial de tercer orden:

$$d^3u = d(d^2u).$$

En general,

$$d^mu = d(d^{m-1}u).$$

La diferencial de m-ésimo orden de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables independientes, se expresa mediante la fórmula simbólica

$$d^mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u, \qquad (2)$$

que se desarrolla formalmente según la ley binomial.

Por ejemplo, en el caso de una función $z = f(x, y)$ de dos variables independientes x e y, para las diferenciales de segundo y tercero órdenes son lícitas las fórmulas

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2, \qquad (3)$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \qquad (4)$$

Ejemplo 11. Hállese d^2z, si $z = e^{xy}$.

◀ Tenemos (conforme a las reglas de derivación)

$$dz = e^{xy}\cdot d(xy) = e^{xy}(y\,dx + x\,dy).$$

Derivamos por segunda vez teniendo presente que dx y dy no dependen de x e y (es decir, considerando dx y dy constantes):

$$d^2z = e^{xy}\,d(xy)\cdot(y\,dx + x\,dy) + e^{xy}\cdot d(y\,dx + x\,dy) =$$
$$= e^{xy}(y\,dx + x\,dy)^2 + e^{xy}\,2\,dx\,dy = e^{xy}(y\,dx + x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy). \blacktriangleright$$

1.87. Hállense el incremento total y la diferencial de la función $z = x^2 - xy + y^2$, si x varía de 2 hasta 2,1, e y, de 1 hasta 1,2.

1.88. Hállense el incremento total y la diferencial de la función $z = \lg(x^2 + y^2)$, si x varía de 2 hasta 2,1, e y, de 1 hasta 0,9.

Hállense las diferenciales de las funciones:

1.89. $z = \ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)$. **1.90.** $z = \operatorname{tg}\frac{y^2}{x}$.

1.91. $z = \ln\cos\frac{x}{y}$. **1.92.** $u = (xy)^z$.

1.93. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{x_2 - x_3} \cdot \ln x_4$.

1.94. Hállese $df(1, 2, 1)$, si $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2+y^2}$.

Calcúlese aproximadamente:

1.95. $(2{,}01)^{3{,}03}$. **1.96.** $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$.

1.97. $\operatorname{sen} 28° \cdot \cos 61°$.

1.98. Un vaso cilíndrico tiene las siguientes dimensiones interiores: el radio de la base $R = 2{,}5$ m, la altura $H = 4$ m y el espesor de las paredes $l = 1$ dm. Hállese aproximadamente el volumen del material gastado para fabricar el vaso.

1.99. Un paralelepípedo rectangular tiene las siguientes dimensiones: $a = 2$ m, $b = 3$ m, $c = 6$ m. Hállese aproximadamente la magnitud en que varía la longitud de la diagonal, si a aumenta en 2 cm, b en 1 cm, y c disminuye en 3 cm.

1.100. En un cono truncado los radios de las bases son $R = 20$ cm, $r = 10$ cm y la altura $h = 30$ cm. ¿Cómo variará aproximadamente el volumen del cono, si R aumenta en 2 mm, r en 3 mm y h disminuye en 1 mm?

Hállense las diferenciales de primer y segundo órdenes de las siguientes funciones (x, y, z son variables independientes):

1.101. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$. **1.102.** $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

1.103. $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$. **1.104.** $z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1.105. $z = (x + y)\, e^{xy}$. **1.106.** $z = x \ln\frac{y}{x}$.

1.107. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+y}$. **1.108.** $u = xy + yz + zx$.

1.109. $u = e^{xyz}$.

1.110. Hállese d^3z, si $z = e^y \operatorname{sen} x$.

1.111. Hállese d^3u, si $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

1.112. Hállese d^6u, si $u = \ln(x + y + z)$.

1.113. Hállese $d^m u$, si $u = e^{ax+by+cz}$.

§ 2. Derivación de las funciones compuestas e implícitas

1. Funciones compuestas de una y de varias variables independientes. Si $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función derivable de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las cuales son, a su vez, funciones derivables de una variable independiente t:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t),$$

la derivada de la función compuesta $u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ se calcula según la fórmula

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}. \qquad (1)$$

En particular, si t coincide, por ejemplo, con la variable x_1, entonces la derivada «total» de la función u respecto de x_1 es

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_1}. \qquad (2)$$

EJEMPLO 1. Hállese $\frac{du}{dt}$, si $u = xyz$, donde $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

◀ Según la fórmula (1) tenemos

$$\frac{du}{dt} = yz \cdot 2t + xz \cdot \frac{1}{t} + xy \cdot \sec^2 t =$$

$$= 2t \ln t \operatorname{tg} t + \frac{(t^2+1) \operatorname{tg} t}{t} + (t^2+1) \ln t \sec^2 t. \ ▶$$

EJEMPLO 2. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z = y^x$, donde $y = \varphi(x)$.

◀ Tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$. Conforme a la fórmula (2), obtendremos

$$\frac{dz}{dx} = y^x \ln y + xy^{x-1} \cdot \varphi'(x). \ ▶$$

Sea $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ ($t_1, t_2, \ldots, t_m$ son las variables independientes). Las derivadas parciales de la función u respecto de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ se expresan del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1}, \\
\frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial u}{\partial t_m} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_m}.
\end{aligned} \qquad (3)$$

En este caso la expresión (1) del § 1 para la diferencial de primer orden conserva su forma intacta (*propiedad de invariación de la forma de la primera diferencial*)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

Las expresiones para diferenciales de órdenes superiores de una función compuesta se diferencian, hablando en general, de las expresiones del tipo (2) del § 1.

Por ejemplo, la diferencial de segundo orden se expresa por la fórmula

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 u + \\ + \frac{\partial u}{\partial x_1} d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} d^2x_n. \quad (4)$$

EJEMPLO 3. Hállense dz y d^2z, si $z = f(u, v)$, donde $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, $v = xy$.

◀ Tenemos $dz = f'_u\, du + f'_v\, dv$, donde

$$du = x\, dx - y\, dy, \quad dv = y\, dx + x\, dy.$$

Por consiguiente,

$$dz = f'_u \cdot (x\, dx - y\, dy) + f'_v \cdot (y\, dx + x\, dy) = \\ = (xf'_u + yf'_v)\, dx + (xf'_v - yf'_v)\, dy.$$

Derivamos por segunda vez:

$$d^2z = d(f'_u) \cdot du + f'_u \cdot d(du) + d(f'_v)\, dv + f'_v \cdot d(dv) = \\ = (f''_{uu}\, du + f''_{uv} \cdot dv)\, du + f'_u \cdot d^2u + (f''_{uv}\, du + f''_{vv}\, dv)\, dv + \\ + f'_v \cdot d^2v, \quad \text{donde} \quad d^2u = dx^2 - dy^2, \quad d^2v = 2dx\, dy.$$

Por consiguiente,

$$d^2z = (f''_{uu}(x\, dx - y\, dy) + f''_{uv}(y\, dx + x\, dy))(x\, dx - y\, dy) + \\ + f'_u (dx^2 - dy^2) + (f''_{uv}(x\, dx - y\, dy) + f''_{vv}(y\, dx + x\, dy)) \times \\ \times (y\, dx + x\, dy) + f'_v \cdot 2dx\, dy = f''_{uu}(x\, dx - y\, dy)^2 + \\ + f''_{uv}(y\, dx + x\, dy)(x\, dx - y\, dy) + f'_u (dx^2 - dy^2) + \\ + f''_{vv}(x\, dx - y\, dy)(y\, dx + x\, dy) + f''_u (y\, dx + x\, dy)^2 + \\ + 2f'_v\, dx\, dy = f''_{uu}(x^2\, dx^2 - 2xy\, dx\, dy + y^2\, dy^2) + \\ + 2f''_{uv}(xy(dx^2 - dy^2) + (x^2 - y^2)\, dx\, dy) + \\ + f''_{vv}(y^2\, dx^2 + 2xy\, dx\, dy + x^2\, dy^2) + f'_u (dx^2 - dy^2) + \\ + 2f'_v\, dx\, dy = (x^2 f''_{uu} + 2xyf''_{uv} + y^2 f''_{vv} + f'_u)\, dx^2 + \\ + 2(xyf''_{uv} + (x^2 - y^2) f''_{uv} - xyf''_{uu} + f'_v)\, dx\, dy + \\ + (y^2 f''_{uu} - 2xyf''_{uv} + x^2 f''_{vv} - f'_v)\, dy^2. \blacktriangleright$$

2.1. Hállese $\frac{dz}{dt}$, si $z = e^{2x-3y}$, donde $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - t$.

2.2. Hállese $\frac{dz}{dt}$, si $z = x^y$, donde $x = \ln t$, $y = \operatorname{sen} t$.

2.3. Hállese $\frac{dz}{dt}$, si $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, donde $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

2.4. Hállese $\frac{du}{dt}$, si $u = \frac{yz}{x}$, donde $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2 - 1$.

2.5. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z = \ln(e^x + e^y)$, donde $y = \frac{1}{3}x^3 + x$.

2.6. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{y}$, donde $y = e^{(x+1)^2}$.

2.7. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z = u^2 \ln v$, donde $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

2.8. Hállese dz, si $z = u^2 v - v^2 u$, donde $u = x \operatorname{sen} y$, $v = y \cos x$.

2.9. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z = f(u, v)$, donde $u = \frac{2y}{x+y}$, $v = x^2 - 3y$.

2.10. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z = f(u, v)$, donde $u = \ln(x^2 - y^2)$, $v = xy^2$.

2.11. Hállese dz, si $z = f(u, v)$, donde $u = \cos(xy)$ $v = x^5 - 7y$.

2.12. Hállese dz, si $z = f(u, v)$, donde $u = \operatorname{sen} \frac{x}{y}$, $v = \sqrt{x/y}$.

2.13. Hállese du, si $u = f(x, y, z)$, donde $x = s^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$, $z = 2st$.

2.14. Hállense $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, si $u = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, donde $x_3 = g(x_1, x_2)$, $x_4 = h(x_1, x_2, x_3)$.

2.15. Muéstrese que la función $z = y \cdot \varphi(\cos(x - y))$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}$.

2.16. Muéstrese que la función $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ satisface la ecuación $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

2.17. Muéstrese que la función $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ satisface la ecuación $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

2.18. Muéstrese que la función $u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y + z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y - x, z - x)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$$

2.19. Hállense $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $z = f(u, v)$, donde $u = xy$, $v = x/y$.

2.20. Hállese $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, si $u = f(x, y, z)$, donde $z = \varphi(x, y)$.

2.21. Hállense todas las derivadas parciales de segundo orden de la función $u = f(x, xy, xyz)$.

2.22. Muéstrese que la función $u = x\varphi(x + y) + y\psi \times (x + y)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

2.23. Muéstrese que la función $u = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ satisface la ecuación

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2.24. Hállese d^2u, si $u = f(t)$, donde $t = x^2 + y^2 + z^2$.

2.25. Hállese d^2u, si $u = f(ax, by, cz)$.

2.26. Hállese d^2z, si $z = f(u, v)$, donde $u = x \operatorname{sen} y$, $v = y \cos x$.

2. Funciones implícitas de una y de varias variables independientes. Supongamos que la ecuación $f(x, y) = 0$, donde f es una función derivable de las variables x e y, define y como función de x. La primera derivada de esta función implícita $y = y(x)$ en el punto x_0 se expresa mediante la fórmula

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} \tag{5}$$

a condición de que $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, donde $y_0 = y(x_0)$, $f(x_0, y_0) = 0$.

Las derivadas de órdenes superiores se calculan por medio de la derivación sucesiva de la fórmula (5).

EJEMPLO 4. Hállense $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, si

$$1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$$

◀ Designemos el primer miembro de esta ecuación con $f(x, y)$. Entonces

$$f'_x(x, y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}},$$

$$f'_y(x, y) = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}.$$

De acuerdo con la fórmula (5) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}.$$

Derivamos por segunda vez, tomando en consideración que y es una función de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{y - x\left(-\frac{y}{x}\right)}{x^2} = \frac{2y}{x^2}. \blacktriangleright$$

Supongamos que la ecuación $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$, donde F es una función derivable de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$, define u como una función de las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Las derivadas parciales de esta función implícita $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $M^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ se calculan según las fórmulas

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M=M^0} = -\frac{F'_{x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)}{F'_u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (6)$$

condición de que $F'_u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0) \neq 0$, donde $u^0 = u(M^0)$ y $F(M^0, u^0) = 0$.

Las derivadas parciales de la función u se pueden hallar también de la manera siguiente: calculamos la diferencial total de la función $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ y la igualamos a cero:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F}{\partial u}du = 0$$

y hallamos de aquí du.

EJEMPLO 5. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

◀ 1er MÉTODO. Designemos el primer miembro de la ecuación dada con $F(x, y, z)$. Entonces

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz,$$
$$F'_y(x, y, z) = 6y^2 - 3xz - 2,$$
$$F'_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

De acuerdo con las fórmulas (6) obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{x^2 - yx}{xy - z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3z^2 - 3xy} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}.$$

2do MÉTODO. Derivamos la ecuación dada:

$$3x^2\,dx + 6y^2\,dy + 3z^2\,dz - 3yz\,dx - 3xz\,dy - 3xy\,dz - 2dy = 0.$$

De aquí hallamos dz:

$$dz = \frac{3(x^2 - yz)\,dx + (6y^2 - 3xz - 2)\,dy}{3(xy - z^2)}.$$

Comparando con la fórmula $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}. \blacktriangleright$$

2.27. Hállese $\frac{dy}{dx}$, si $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$.

2.28. Hállese $\frac{dy}{dx}$, si $y \operatorname{sen} x - \cos(x - y) = 0$.

2.29. Hállense $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x + y = e^{x-y}$.

2.30. Hállense $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

2.31. Hállense $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, si $x^2 + 2xy + y^2 - 4y + 2y - 2 = 0$.

2.32. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto $(1, -2, 2)$, si $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

2.33. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 0$.

2.34. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

2.35. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $f(yz, e^{xz}) = 0$.

2.36. Hállese dz, si $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

2.37. Hállese dz, si $xz - e^{z/y} + x^3 + y^3 = 0$.

2.38. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, si $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

2.39. Hállense $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $x + y + z = e^z$.

2.40. Hállese d^2z, si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.41. Muéstrese que la función z, definida por la ecuación $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$, donde φ es una función derivable arbitraria de dos variables, satisface la ecuación

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

2.42. Muéstrese que la función z, definida por la ecuación $(x - a\cos\alpha)^2 + (y - a\operatorname{sen}\alpha)^2 = \left(\frac{z - a}{m}\right)^2$, donde a, α, m son constantes, satisface la ecuación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = m^2.$$

2.43. Muéstrese que la función z, definida por la ecuación $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

3. Sistemas de las funciones implícitas y de las definidas en forma paramétrica. Limitémonos a considerar las funciones de dos variables independientes. Supongamos que un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x, y, u, v) &= 0, \\ G(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

tiene la solución $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$ y $v = v_0$, con la particularidad de que las funciones F y G tienen en el entorno del punto $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ derivadas parciales continuas de primer orden y el jacobiano

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

distinto de cero en el punto P_0. Entonces, en cierto entorno del punto P_0 el sistema (7) determina un único sistema de funciones continuas $u(x, y)$ y $v(x, y)$ que tienen derivadas parciales continuas y que satisfacen las condiciones

$$u(x_0, y_0) = u_0, \quad v(x_0, y_0) = v_0.$$

Las diferenciales de estas funciones du y dv (y, por tanto, también las derivadas parciales) pueden hallarse a partir del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv = 0.$$

EJEMPLO 6. Las funciones u y v de las variables independientes x e y vienen dadas implícitamente mediante el sistema de ecuaciones

$$u + v = x, \quad u - yv = 0.$$

Hállense du, dv, d^2u, d^2v.

◀ El jacobiano del sistema $\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -y - 1$ es distinto de cero cuando $y \neq -1$. Derivando hallamos dos ecuaciones que ligan entre sí las diferenciales de todas las cuatro variables:

$$du + dv = dx, \quad du - y\,dv - v\,dy = 0.$$

Al resolver este sistema respecto a du y dv para $y \neq -1$, obtenemos

$$du = \frac{y\,dx - v\,dy}{1 + y}, \quad dv = \frac{dx - v\,dy}{1 + y}.$$

Derivamos por segunda vez:

$$d^2u = \frac{(dx\,dy + dv\,dy)(1 + y) + dy(y\,dx + v\,dy)}{(1 + y)^2} =$$
$$= \frac{\left(dx\,dy + \dfrac{dx - v\,dy}{1 + y}dy\right)(1 + y) - dy(y\,dx + v\,dy)}{(1 + y)^2} =$$
$$= \frac{(1 + y)\,dx\,dy + dx\,dy - v\,dy^2 - y\,dx\,dy - v\,dy^2}{(1 + y)^2} = \frac{2(dx\,dy - v\,dy^2)}{(1 + y)^2},$$
$$d^2v = \frac{-dv\,dy(1 + y) - dy(dx - v\,dy)}{(1 + y)^2} =$$
$$= \frac{\dfrac{dx - v\,dy}{1 + y}dy(1 + y) - dx\,dy + v\,dy^2}{(1 + y)^2} =$$
$$= \frac{-dx\,dy + v\,dy^2 - dx\,dy + v\,dy^2}{(1 + y)^2} = \frac{2(v\,dy^2 - dx\,dy)}{(1 + y)^2} = -d^2u. \blacktriangleright$$

Supongamos que la función z de las variables independientes x e y viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

y

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

en el entorno del punto $P(u_0, v_0)$. En este caso la diferencial dz de esta función (y, por tanto, sus derivadas parciales) en el entorno del punto P puede ser hallada a partir del sistema de ecuaciones

$$dx = \frac{dx}{du}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

EJEMPLO 7. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si

$$x = u\cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = cv.$$

◀ Tenemos

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} v & u\cos v \end{vmatrix} = u \neq 0 \quad \text{para} \quad u \neq 0.$$

Encontramos por derivación tres ecuaciones que ligan las diferenciales de todas las cinco variables:

$$dx = \cos v\, du - u \operatorname{sen} v\, dv, \quad dy = \operatorname{sen} v\, du + u\cos v\, dv,$$

$$dz = c\, dv.$$

De las primeras dos ecuaciones hallamos dv:

$$dv = \frac{\cos v\, dy - \operatorname{sen} v\, dx}{u}.$$

Sustituyamos el valor hallado de dv en la tercera ecuación:

$$dz = \frac{c}{u}(\cos v\, dy - \operatorname{sen} v\, dx).$$

De aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c \operatorname{sen} v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\cos v}{u}. \blacktriangleright$$

2.44. Las funciones y e z de una variable independiente x vienen dadas por el sistema de ecuaciones

$$7x^2 + y^2 - 3z^2 = -1, \quad 4x + 2y^2 - 3z^2 = 0.$$

Hállense $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ para $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

2.45. Las funciones y y z de una variable independiente x vienen dadas por el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

Hállense dy, dz, d^2y, d^2z.

2.46. Las funciones u y v de las variables independientes x e y están dadas implícitamente por el sistema de ecuaciones

$$xu + yv = 1 \quad x + y + u + v = 0.$$

Hállense du, dv, d^2u, d^2v.

2.47. Muéstrese que $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, si $uv = -3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2.48. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2v^2$.

2.49. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x = a \cos u \operatorname{ch} v$, $y = b \operatorname{sen} u \operatorname{ch} v$, $z = c \operatorname{sh} v$.

2.50. Hállese dz, si $x = e^u \cos v$, $y = e^u \operatorname{sen} v$, $z = uv$.

2.51. Hállese dz, si $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ $(u \neq v)$.

4. Cambio de variables en las expresiones diferenciales. Al considerar las expresiones diferenciales nos encontramos a menudo con la necesidad de expresar las derivadas (que figuran en éstas) respecto de unas variables en términos de las derivadas respecto de algunas variables nuevas.

EJEMPLO 8. Transfórmese la ecuación

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0,$$

suponiendo $x = \cos t$.

◀ Expresemos las derivadas de y respecto de x mediante las derivadas de y respecto de t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{-\operatorname{sen} t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\frac{-\operatorname{sen} t\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t\cdot\frac{dy}{dt}}{\operatorname{sen}^2 t\cdot(-\operatorname{sen} t)}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}\,.$$

Sustituyamos las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación dada y cambiando x por $\cos t$, tenemos:

$$(1-\cos^2 t)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)-\cos t\left(-\frac{1}{\operatorname{sen} t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)=0,$$

o bien $\dfrac{d^2y}{dt^2}=0$. ▶

EJEMPLO 9. Transfórmese la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

considerando x como función e y, como un argumento.

◀ Expresemos las derivadas de y respecto a x mediante las derivadas de x respecto de y:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=$$

$$=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Sustituyamos estas expresiones de las derivadas en la ecuación dada:

$$\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}+2y\cdot\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=0,$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dy^2}-2y\frac{dx}{dy}=0.\ ▶$$

EJEMPLO 10. Pásese a las coordenadas polares en la expresión

$$A=\frac{x+yy'}{xy'-y}\,.$$

◀ Tenemos

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi,$$

$dx = \cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$, $dy = \operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$, de donde

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}.$$

Sustituyamos las expresiones x, y, y' en A:

$$A = \frac{r\cos\varphi + r\operatorname{sen}\varphi \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}}{r\cos\varphi \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi} - r\operatorname{sen}\varphi} = \frac{\dfrac{dr}{d\varphi}}{r}.$$

EJEMPLO 11. Transfórmese la ecuación

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

pasando a las variables nuevas independientes u y v, si $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

◀ Expresemos las derivadas parciales de z respecto a x e y en términos de las derivadas parciales de z respecto a u y v.

Tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

De acuerdo con las fórmulas (3) obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot y + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{1}{y}\right)y + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} =$$

$$= y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}x - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^2}\right) =$$

$$= x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^2}\right) =$$

$$= x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{x}{y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}x - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right) =$$

$$= x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Sustituyamos las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación dada:

$$x^2\left(y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) -$$

$$- y^2\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0.$$

Al simplificar para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, obtendremos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2xy}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 12. Transfórmese la ecuación $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$, tomando como variables nuevas independientes $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ y como función nueva, $w = \ln z - (x + y)$.

◀ Expresemos las derivadas parciales de z respecto a x e y en términos de las derivadas parciales de w respecto a u y v. Con este fin derivemos las relaciones dadas:

$$du = 2(x\,dx + y\,dy),$$

$$dv = -\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right),$$

$$dw = \frac{dz}{z} - (dx + dy).$$

Tomando en consideración la fórmula (1) § 1, tenemos

$$\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv = \frac{dz}{z} - (dx + dy),$$

o bien

$$2\frac{\partial w}{\partial u}(x\,dx + y\,dy) - \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right) = \frac{dz}{z} - (dx + dy),$$

de donde

$$dz = z\left(\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dx + \left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dy\right).$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right).$$

Sustituyamos las expresiones $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en la ecuación dada:

$$yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)-xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)=(y-x)z,$$

o bien $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. ▶

2.52. Transfórmese la ecuación

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}-y=0,$$

suponiendo $x=1/t$.

2.53. Transfórmese la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{(1+x^2)^2}=0,$$

suponiendo $x=\operatorname{tg} t$.

2.54. Transfórmese la ecuación

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

considerando y como argumento.

2.55. Transfórmese la ecuación

$$(xy'-y)^2=2xy\,(1+y'^2),$$

pasando a las coordenadas polares.

2.56. Transfórmese la expresión $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$, pasando a las coordenadas polares.

2.57. Transfórmese la ecuación

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

pasando a las nuevas variables independientes u y v, si $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

2.58. Transfórmese la ecuación $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$, pasando a las nuevas variables independientes u y v, si $u=y$, $v=y/x$.

2.59. Transfórmese la expresión $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, pasando a las coordenadas polares.

2.60. Transfórmese la expresión

$$w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

pasando a las coordenadas esféricas ($r=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\varphi=\varphi$, $z=\rho\cos\theta$).

2.61. Transfórmese la ecuación

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz,$$

tomando como nuevas variables independientes $u=yz-x$, $v=xz-y$, y como función nueva, $w=xy-z$.

2.62. Transfórmese la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{2}y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x},$$

tomando como nuevas variables independientes $u=\frac{x}{y}$, $v=x$ y como función nueva, $w=xz-y$.

2.63. Transfórmese la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z,$$

tomando como nuevas variables independientes $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$, y como función nueva, $w=ze^y$.

§ 3. Aplicaciones de las derivadas parciales

1. Fórmula de Taylor. Si una función $f(P)$ es $m+1$ veces derivable en cierto entorno $U(P_0)$ del punto $P_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, entonces para todo punto $P(x_1,\ldots,x_n)\in U(P_0)$ es válida la *fórmula de*

$$f(P)=f(P_0)+\frac{df(P_0,\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n)}{1!}+\frac{d^2f(P_0,\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n)}{2!}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{d^mf(P_0,\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n)}{m!}+\frac{d^{m+1}f(\widetilde{P},\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n)}{(m+1)!},\quad (1)$$

donde $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\ldots$, $\Delta x_n = x_n - x_n^0$, y $\widetilde{P}$ es un punto del entorno mencionado.

Por ejemplo, en el caso de una función $f(x, y)$ de dos variables x e y, la fórmula de Taylor en forma desarrollada se escribe como sigue:

$$f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0)+\frac{1}{1!}(f'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0))+$$

$$+\frac{1}{2!}(f''_{xx}(x_0,\ y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+f''_{yy}(x_0,\ y_0)(y-y_0)^2+\ldots+\frac{1}{m!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\times$$

$$\times f(x_0,\ y_0)+\frac{1}{(m+1)!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}\times$$

$$\times f(x_0+\theta(x-x_0),\quad y_0+\theta(y-y_0)).\quad (2)$$

El último sumando en la fórmula (2) (*término residual*) puede ser escrito más breve en la forma:

$$o(\rho^m),\ \text{donde}\ \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

(*forma de Peano*).

En un caso particular, cuando $x_0 = y_0 = 0$, la *fórmula* (2) lleva el nombre *de Maclaurin*.

EJEMPLO 1. Desarróllese la función $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$ según la fórmula de Taylor en el entorno del punto $(2, -1)$.

◀ Tenemos $f(2, -1) = 2$. Calculemos sucesivamente las derivadas parciales de la función dada y sus valores en el punto $(2, -1)$:

$$f'_x(x,\ y)=3x^2-10x-y+10,\quad f'_x(2,\ -1)=3;$$

$$f'_y(x,\ y)=-x+2y+5,\quad f'_y(2,\ -1)=1;$$

$$f''_{xx}(x,\ y)=6x-10,\quad f''_{xx}(2,\ -1)=2;$$

$$f''_{xy}(x,\ y)=-1,\quad f''_{xy}(2,\ -1)=-1;$$

$$f''_{yy}(x,\ y)=2,\quad f''_{yy}(2,\ -1)=2;$$

$$f'''_{xxx}(x,\ y)=6,\quad f'''_{xxx}(2,\ -1)=6.$$

Todas las derivadas posteriores son idénticamente iguales a cero.

A partir de la fórmula (2) obtenemos el desarrollo buscado

$$f(x, y) = 2 + 3(x - 2) + (y + 1) + (x - 2)^2 - (x - 2)(y + 1) + (y + 1)^2 + (x - 2)^3. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1) hasta los términos de segundo orden inclusive, la función

$$f(x, y) = y^x.$$

◀ Tenemos $f(1, 1) = 1$. Calculemos las derivadas parciales de primer y segundo órdenes de la función dada y sus valores en el punto (1, 1):

$$f'_x(x, y) = y^x \ln y, \qquad f'_x(1, 1) = 0;$$
$$f'_y(x, y) = xy^{x-1}, \qquad f'_y(1, 1) = 1;$$
$$f''_{xx}(x, y) = y^x \ln^2 y, \qquad f''_{xx}(1, 1) = 0;$$
$$f''_{xy}(x, y) = y^{x-1}(x \ln y + 1), \qquad f''_{xy}(1, 1) = 1;$$
$$f''_{yy}(x, y) = x(x - 1) y^{x-2}, \qquad f''_{yy}(1, 1) = 0$$

Conforme a la fórmula (2) obtenemos

$$f(x, y) = 1 + (y - 1) + (x - 1)(y - 1) + o(\rho^2),$$

donde $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. ▶

3.1. Desarróllese $f(x + h, y + k)$ en potencias positivas enteras de h y k, si $f(x, y) = xy^2$.

3.2. Hállese el incremento adquirido por la función $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ al pasar de los valores $x = -2$, $y = 1$ a los valores $x_1 = -2 + h$, $y_1 = 1 + k$.

3.3. Desarróllese según la fórmula de Taylor la función $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ en el entorno del punto (2, 1).

3.4. Desarróllese $f(x + h, y + k, z + l)$ en potencias enteras positivas de h, k, l, si $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 2yz + 3x - y - 4z + 1$.

3.5. Desarróllese según la fórmula de Taylor la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)$ en el entorno del punto (1, −1, 2).

3.6. Desarróllese según la fórmula de Maclaurin hasta los términos de tercer orden inclusive, la función $f(x, y) = e^y \cos x$.

3.7. Desarróllese según la fórmula de Maclaurin hasta los términos de cuarto orden inclusive, la función $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$.

3.8. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1) hasta los términos de tercer orden inclusive la función $f(x, y) = y/x$.

3.9. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1, 0) hasta los términos de segundo orden inclusive, la función $f(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$.

3.10. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1) hasta los términos de segundo orden inclusive, la función implícita $z(x, y)$ que se define mediante la ecuación

$$z^3 + 3yz - 4x = 0, \quad \text{si} \quad z(1, 1) = 1.$$

2. Extremo de una función. Una función $u = f(P)$ tiene un *máximo* (*mínimo*) en el punto $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si existe tal entorno del punto P_0, para todos los puntos del cual $P(x_1, \ldots, x_n)$, distintos de P_0, se verifica la desigualdad $f(P_0) > f(P)$ ($f(P_0) < f(P)$, respectivamente). El máximo o el mínimo de una función lleva el nombre de *extremo* de la misma.

Condición necesaria para la existencia de un extremo. Si una función *derivable* $f(P)$ alcanza su extremo en el punto P_0, entonces en dicho punto

$$f'_{x_k}(P_0) = 0 \text{ para todo } k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

o bien $df(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0$ idénticamente respecto de $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

Los puntos, donde se cumplen las condiciones (3), se llaman puntos *estacionarios* de la función $u = f(P)$. De este modo, si P_0 es un punto de extremo de la función $u = f(P)$, entonces o bien P_0 es un punto estacionario, o bien en dicho punto la función no es derivable.

Condiciones suficientes para la existencia de extremo. Supongamos que $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ es un punto estacionario de la función $u = f(P)$, siendo dicha función dos veces derivable en cierto entorno del punto P_0 y todas sus segundas derivadas parciales son continuas en el punto P_0. En este caso:

1) si la segunda diferencial $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ como función de $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, tiene signo constante, cualesquiera que sean los juegos de valores $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ no nulos simultáneamente, la función $u = f(P)$ tendrá en P_0 un extremo, a saber, un máximo cuando $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) < 0$, y un mínimo, cuando $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) > 0$;

2) si $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ es una función de signo variable $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, es decir, admite tanto valores positivos como negativos, el punto P_0 no será un punto de extremo de la función $u = f(P)$;

3) si $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \geqslant 0$ ó $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \leqslant 0$, con la particularidad de que existen tales juegos de valores $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, no nulos simultáneamente, para los cuales el valor de la segunda diferencial se reduce a cero, entonces la función $u = f(P)$ puede tener extremo en el punto P_0 y puede no tenerlo (en este caso se necesita un análisis adicional para aclarar la cuestión).

En el caso particular de una función de dos variables, las condiciones suficientes de un extremo pueden formularse de la manera

siguiente. Sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto estacionario de la función $z = f(x, y)$, siendo dicha función dos veces derivable en cierto entorno del punto P_0 y todas sus segundas derivadas parciales son continuas en el punto P_0. Introduzcamos las designaciones:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

y

$$D = AC - B^2.$$

Entonces:

1) si $D > 0$, la función $z = f(x, y)$ tiene en el punto $P_0(x_0, y_0)$ un extremo, a saber, un máximo si $A < 0$ ($C < 0$), y un mínimo, si $A > 0$ ($C > 0$);

2) si $D < 0$, en el punto $P_0(x_0, y_0)$ no existe extremo;

3) si $D = 0$, se requiere un análisis adicional.

EJEMPLO 3. Analícese el extremo de la función

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

◀ Hallemos las derivadas parciales de primer orden y formemos un sistema de ecuaciones del tipo (3):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 - y) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3(y^2 - x) = 0,$$

o bien

$$x^2 - y = 0,$$
$$y^2 - x = 0.$$

Resolviendo el sistema, hallamos dos puntos estacionarios:

$$P_1(0, 0) \quad \text{y} \quad P_2(1, 1).$$

Hallemos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

A continuación formemos el discriminante $D = AC - B^2$ para cada punto estacionario.

Para el punto P_1

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_1} = 0, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{P_1} = -3, \quad C = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_1} = 0, \quad D = -9 < 0.$$

Por consiguiente, en el punto P_1 no hay extremo.

Para el punto P_2

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_2} = 6, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{P_2} = -3, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_2} = 6,$$
$$D = 36 - 9 > 0, \quad A > 0.$$

Por consiguiente, en el punto P_2 la función alcanza un mínimo que es igual a

$$z_{\min} = z\big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1+1-3 = -1. \blacktriangleright$$

Hállense los extremos de las funciones de dos variables:

3.11. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

3.12. $z = xy^2(1 - x - y)$ $(x > 0,\ y > 0)$.

3.13. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

3.14. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $(x > 0,\ y > 0)$.

3.15. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

3.16. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

3.17. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3.18. $z = (2x_2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

3.19. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

Hállense los extremos de las funciones de tres variables:

3.20. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.

3.21. $u = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

3.22. $u = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$.

Hállense los extremos de las funciones z definidas implícitamente:

3.23*. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0$.

3.24. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$.

3. Extremo condicionado. La función $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$ tiene un *máximo condicionado* (un *mínimo condicionado*) en el punto $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si existe tal entorno del punto P_0, para todos los puntos P del cual $(P \neq P_0)$ que satisfacen la ecuación de enlace

$$\varphi_k(P) = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m;\ m < n),$$

se cumple la desigualdad $f(P_0) > f(P)$ $(f(P_0) < f(P)$, respectivamente).

El problema de búsqueda de un extremo condicionado se reduce al análisis del extremo corriente de la *función de Lagrange*

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, \ldots, x_n);$$

λ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ se denominan *multiplicadores de Lagrange*.

Las condiciones necesarias para la existencia de un extremo condicionado se expresan por medio del sistema de $n + m$ ecuaciones

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L(P)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ &\varphi_k(P) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned} \tag{4}$$

a partir del cual pueden ser halladas las incógnitas

$$x_1, \ldots, x_n, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m,$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son las coordenadas del punto en el que puede haber un extremo condicionado.

Las condiciones suficientes para la existencia de extremo condicionado están asociadas con el análisis de la 2da diferencial de la función de Lagrange $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n)$ para cada sistema de valores $x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$, obtenido de (4) a condición de que $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ satisfagan las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

para $dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 \neq 0$. A saber, la función $f(P)$ tiene un máximo condicionado en el punto $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ siempre que para toda clase de valores $dx_1, \ldots, dx_n$ que satisfacen las condiciones (5) y no son nulos simultáneamente se verifica la desigualdad $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n) < 0$, y un mínimo condicionado, si bajo las mismas condiciones $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n) > 0$.

En el caso de la función $z = f(x, y)$, cuando la ecuación de enlace $\varphi(x, y) = 0$, la función de Lagrange tiene la forma

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y).$$

El sistema (4) se compone de tres ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Sea $P_0(x_0, y_0)$, λ_0 cualquiera de las soluciones de este sistema y sea

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(P_0) & \varphi_y'(P_0) \\ \varphi_x'(P_0) & L_{xx}''(P_0, \lambda_0) & L_{xy}''(P_0, \lambda_0) \\ \varphi_y'(P_0) & L_{xy}''(P_0, \lambda_0) & L_{yy}''(P_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Si $\Delta < 0$, entonces la función $z = f(x, y)$ tiene en el punto $P_0(x_0, y_0)$ un máximo condicionado; si $\Delta > 0$, se tiene en el mismo punto un mínimo condicionado.

EJEMPLO 4. Hállese el extremo condicionado de la función $z = x + 2y$, si $x^2 + y^2 = 5$.

◀ Formemos la función de Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Tenemos $\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y$.

El sistema de ecuaciones (4) adquiere la forma

$$1 + 2\lambda x = 0,$$
$$2 + 2\lambda y = 0,$$
$$x^2 + y^2 = 5.$$

El sistema tiene dos soluciones: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Puesto que $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$, entonces

$$d^2L = 2\lambda (dx^2 + dy^2).$$

Cuando $\lambda = \frac{1}{2}$, $d^2L > 0$. Por ello la función tiene un mínimo condicionado en el punto $P_1(-1, -2)$ y $z_{\text{mín}} = -5$. Cuando $\lambda = -\frac{1}{2}$, $d^2L < 0$. Por ello la función tiene un máximo condicionado en el punto $P_2(1, 2)$ y $z_{\text{máx}} = 5$.

O bien, de otra forma

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5,$$

$$\varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 2y, \quad \varphi'_x(-1, -2) = -2, \quad \varphi'_y(-1, -2) = -4,$$

$$L''_{xx} = 1, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{yy} = 1 \quad \text{para} \quad \lambda = \frac{1}{2};$$

por consiguiente,

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

es decir, la función tiene un mínimo condicionado en el punto $P_1(-1, -2)$. Por analogía, para el punto $P_2(1, 2)$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0.$$

es decir, $P_2(1, 2)$ es el punto de máximo condicionado. ▶

Hállense los extremos condicionados de las funciones:

3.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ para $x + y + 3 = 0$.

3.26. $z + \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ para $x + y = 2$.

3.27. $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ para $x^2 + y^2 = 1$.

3.28. $z = xy^2$ para $x + 2y = 1$.

3.29. $z = 2x + y$ para $x^2 + y^2 = 1$.

3.30. $u = 2x + y - 2z$ para $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

3.31. $u = x^2 + y^2 + z^2$ para $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

3.32. $u = xy^2z^3$ para $x + 2y + 3z = 12$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

3.33. $u = xyz$ para $x + y + z = 4$, $xy + yz + zx = 5$.

3.34*. Demuéstrese la desigualdad

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} > \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3,$$

si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4. Valores máximo y mínimo de una función. Si una función $f(P)$ es derivable en una región acotada y cerrada, entonces alcanza su valor máximo (mínimo) bien en el punto estacionario o bien en un punto de frontera de la región.

EJEMPLO 5. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = x^3 + y^3 - 3xy$ en la región

$$0 \leqslant x \leqslant 2, \quad -1 \leqslant y \leqslant 2.$$

◀ La región dada es un rectángulo.

1) Hallemos los puntos estacionarios (véase el ejemplo 3): P_1 (0, 0) y P_2 (1, 1). Los valores de la función en estos puntos: $z_1 = 0$, $z_2 = -1$.

2) Analicemos la función en las fronteras de la región.

a) Cuando $x = 0$, se tiene $z = y^3$. Esta función es monótona creciente y en los extremos del segmento $[-1, 2]$ toma los valores: $z|_{y=-1} = -1$, $z|_{y=2} = 8$.

b) Cuando $x = 2$, se tiene $z = 8 + y^3 - 6y$. Hallemos los valores de esta función en el punto estacionario y en los extremos del segmento $[-1, 2]$. Tenemos: $z' = 3y^2 - 6$; $z' = 0$ para $y^2 = 2$, o bien, en la región dada, para $y = \sqrt{2}$; $z|_{y=\sqrt{2}} = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z|_{y=-1} = 13$; $z|_{y=2} = 4$.

c) Cuando $y = -1$, se tiene $z = x^3 - 1 + 3x$ y $z' = 3x^2 + 3 > 0$. La función es monótona creciente de $z|_{x=0} = -1$ hasta $z|_{x=2} = 13$.

d) Cuando $y = 2$ se tiene $z = x^3 + 8 - 6x$; $z' = 3x^2 - 6$; $z' = 0$ para $x = \sqrt{2}$; $z|_{x=\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z|_{x=0} = 8$, $z|_{x=2} = 6$.

3) Al comparar todos los valores encontrados de la función concluimos que $z_{máx} = 13$ en el punto $(2, -1)$; $z_{mín} = 1$ en los puntos $(1, 1)$ y $(0, -1)$. ▶

EJEMPLO 6. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de un baño rectangular abierto, de capacidad V dada, para que su área de superficie sea la menor posible? Hállese este área.

◀ El baño tiene forma de un paralelepípedo rectangular. Sean x, y, z sus dimensiones. Dado que el volumen $V = xyz$ está prefijado, se tiene $z = \dfrac{V}{xy}$. El área de la superficie del baño es igual a

$$S = S(x, y) = 2(xz + yz) + xy = 2(x + y)\frac{V}{xy} + xy =$$

$$= 2V\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) + xy.$$

El problema se reduce a la búsqueda del mínimo de la función $S(x, y)$, siendo, de acuerdo con el sentido del problema, $x > 0$, $y > 0$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$S'_x(x, y) = -\frac{2V}{x^2} + y = 0,$$

$$S'_y(x, y) = -\frac{2V}{y^2} + x = 0,$$

hallamos el punto estacionario $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}$. Comprobemos el cumplimiento de las condiciones suficientes del mínimo:

$$S''_{xx}(x, y) = \frac{4V}{x^3}, \quad S''_{xy}(x, y) = 1, \quad S''_{yy}(x, y) = \frac{4V}{y^3}.$$

Por consiguiente,

$$A = S''_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \quad B = S''_{xy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 1,$$

$$C = S''_{yy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \quad D = AC - B^2 = 4 - 1 > 0, \quad A > 0.$$

Así pues, la función $S(x, y)$ tiene mínimo para $x = y = \sqrt[3]{2V}$; y por tanto, $z = \dfrac{V}{\sqrt[3]{2V^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$;

$$S_{mín} = 2V\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2V}}\right) + \sqrt[3]{4V^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}. \ ▶$$

3.35. Hállese el valor máximo de la función $z = x - 2y + 5$ en las regiones:

a) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$;

b) $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 1$.

3.36. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = x^2 + y^2 - xy - x$ en la región $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$.

3.37. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = xy$ en la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

3.38. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = xy^2$ en la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

3.39. Represéntese el número positivo a en forma de un producto de cuatro factores positivos de una manera tal que la suma de sus magnitudes inversas sea mínima.

3.40. Hállese un paralelepípedo de volumen máximo entre todos los paralelepípedos rectangulares que tienen una suma dada de longitudes de las aristas igual a $12a$.

3.41. Hállese un paralelepípedo rectangular que tenga un volumen máximo, si la longitud de la diagonal del paralelepípedo es d.

3.42. Hállese tal punto dentro de un cuadrilátero, para el cual la suma de los cuadrados de las distancias entre dicho punto y los vértices sea mínima.

3.43. Un paralelepípedo rectangular que tenga el mayor volumen posible inscríbase en una semiesfera de radio R.

3.44. Un paralelepípedo rectangular que tenga un volumen máximo inscríbase en un cono circular recto cuyo radio de la base es R y la altura H.

3.45. Hállese un triángulo de área máxima entre todos los triángulos que tienen la base a y el ángulo α en el vértice.

3.46*. En la elipse $x^2 + 9y^2 = 9$ hállense los puntos más y menos alejados de la recta $4x + 9y = 16$.

3.47*. En la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ están dados dos puntos $A(-\sqrt{3}, 0{,}5)$ y $B(1, \sqrt{3}/2)$. Hállese en la misma elipse tal punto C que el triángulo ABC tenga un área máxima.

3.48. Determínense las dimensiones exteriores de un cajón cerrado, que tiene un espesor dado de las paredes δ y un volumen (interior) V, de modo tal que la cantidad del material que se gasta para su fabricación sea mínima.

3.49. En un plano están dados n puntos materiales $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, . . ., $P_n(x_n, y_n)$ cuyas masas son $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente. ¿Cuál es la posición del punto $P(x, y)$, para la cual el momento de inercia del sistema respecto del punto P sea el mínimo?

3.50*. Los puntos A y B están situados en diferentes medios ópticos, separados uno del otro por el plano A_1B_1 (fig. 69). La velocidad de propagación de la luz en el primer

medio es v_1, y en el segundo, v_2. Aplicando el principio de Fermat, según el cual el rayo luminoso se propaga a lo largo de aquella línea AMB, para cuyo recorrido se requiere el mínimo de tiempo, dedúzcase la ley de refracción del rayo luminoso.

3.51. Aplicando el principio de Fermat, dedúzcase la ley de la reflexión del rayo luminoso de un plano en un medio homogéneo (fig. 70).

3.52*. Si por un circuito eléctrico de resistencia R pasa una corriente I, la cantidad de calor que se desprende en una unidad de tiempo es proporcional a I^2R. Determínese

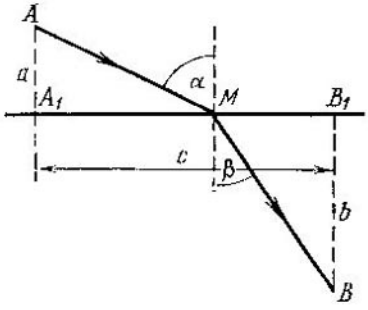


Fig. 69

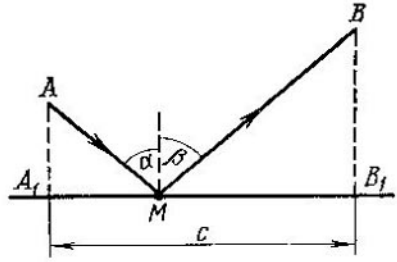


Fig. 70

¿cómo se debe ramificar la corriente I en las corrientes $I_1, I_2, \ldots, I_n$ con ayuda de n conductores cuyas resistencias son $R_1, R_2, \ldots, R_n$, para que el desprendimiento de calor sea mínimo?

5. Aplicaciones geométricas de las derivadas parciales. Se llama *plano tangente* a una superficie en el punto M_0 de ésta (*punto de tangencia*) un plano, que contiene en sí todas las tangentes a las curvas trazadas en la superficie por el punto mencionado.

Se denomina *normal* a la superficie una recta perpendicular al plano tangente y que pasa por el punto de tangencia.

Si la ecuación de la superficie tiene la forma

$$F(x, y, z) = 0,$$

la ecuación del plano tangente en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (5)$$

Las ecuaciones de la normal es:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}. \qquad (6)$$

En el caso de que una superficie sea dada en la forma explícita

$$z=f(x,\ y),$$

la ecuación del plano tangente en el punto $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ tiene por expresión

$$z-z_0=f'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0),$$

mientras que la ecuación de la normal será

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,\ y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,\ x_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

EJEMPLO 7. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie

$$x^2-2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$$

en el punto $M(1,\ 2,\ 3)$.

◀ Designando mediante $F(x,\ y,\ z)$ el primer miembro de la ecuación de la superficie, hallemos las derivadas parciales y sus valores en el punto M:

$$F'_x(x,\ y,\ z)=2x+y-2z, \qquad F'_x(1,\ 2,\ 3)=-2;$$
$$F'_y(x,\ y,\ z)=4y+x+z, \qquad F'_y(1,\ 2,\ 3)=12;$$
$$F'_z(x,\ y,\ z)=-6z+y-2x, \qquad F'_z(1,\ 2,\ 3)=-18.$$

Según las fórmulas (5) y (6) tenemos

$$-2(x-1)+12(y-2)-18(z-3)=0, \quad \text{ó}$$
$$x-6y+9z-16=0$$

lo que representa la ecuación del plano tangente,

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{-18}, \quad \text{ó} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{9}$$

es la ecuación de la normal. ▶

Se llama *punto singular* de una curva plana $f(x,\ y)=0$ el punto $M(x_0,\ y_0)$ cuyas coordenadas satisfacen el sistema de tres ecuaciones

$$f(x_0,\ y_0)=0, \quad f'_x(x_0,\ y_0)=0, \quad f'_y(x_0,\ y_0)=0. \qquad (7)$$

Supongamos que las condiciones (7) quedan cumplidas, los números

$$A=f''_{xx}(x_0,\ y_0), \quad B=f''_{xy}(x_0,\ y_0), \quad C=f''_{yy}(x_0,\ y_0)$$

no todos son iguales a cero y $\Delta=AC-B^2$. En este caso:

a) si $\Delta > 0$, M será un *punto aislado* (fig. 71).
b) si $\Delta < 0$, M será un *nudo* (*punto doble*) (fig. 72).
c) si $\Delta = 0$, M será o bien un *punto de retroceso de primera especie* (fig. 73) o *de segunda especie* (fig. 74), o bien un *punto aislado o de autoadherencia* (fig. 75).

El coeficiente angular $k = y'$ de la tangente a la curva en un punto singular se halla a partir de la ecuación

$$A - 2Bk + Ck^2 = 0.$$

En el caso de un punto aislado no hay tangente, en un nudo hay dos tangentes diferentes; en un punto de retroceso y en un punto de autoadherencia hay una tangente común a las dos ramas de la curva.

Fig. 71

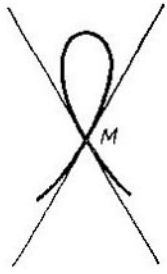


Fig. 72

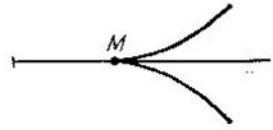


Fig. 72

Fig. 74

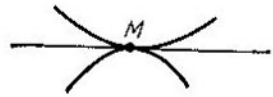


Fig. 75

Si $\Delta = 0$, para resolver la cuestión sobre el tipo de punto singular se debe estudiar la disposición de los puntos de la curva en cierto entorno del punto singular.

En el caso de una curva transcendente pueden haber también otros tipos de puntos singulares: *puntos angulosos*, *puntos terminales*, etc.

EJEMPLO 8. Analícense los puntos singulares de la concoide

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2x^2 = 0 \quad (a > 0,\ b > 0).$$

◀ Designando el primer miembro de la ecuación mediante $f(x, y)$, hallemos las derivadas parciales y las igualamos a cero:

$$f'_x(x, y) \equiv 2x(x - a)^2 + 2(x - a)(x^2 + y^2) - 2b^2x = 0,$$
$$f'_y(x, y) \equiv 2y(x - a)^2 = 0.$$

El sistema de ecuaciones tiene una única solución $x_0 = y_0 = 0$, es decir, la curva tiene un punto singular O (0, 0).

Hallemos las segundas derivadas:

$$f''_{xx}(x, y) = 2((x-a)^2 + 2x(x-a) + x^2 - y^2 - 2x(x-a) - b^2),$$

$$f''_{xy}(x, y) = -4y(x-a),$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2(x-a)^2.$$

Calculando sus valores en el punto O, obtenemos $A = 2(a^2 - b^2)$, $B = 0$, $C = 2a^2$, $\Delta = AC - B^2 = 4a^2(a^2 - b^2)$.

Si $a > b$, entonces $\Delta > 0$ y el punto O está aislado (fig. 76). Si $a < b$, entonces $\Delta < 0$ y el punto O es un nudo (fig. 77). Si $a = b$,

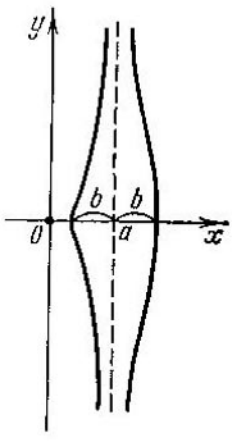


Fig. 76

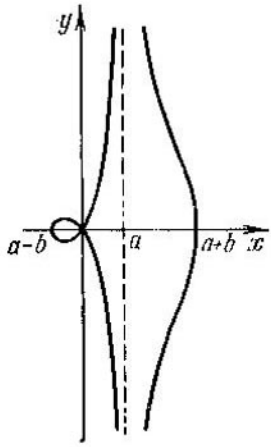


Fig. 77

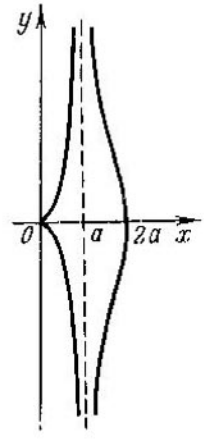


Fig. 78

entonces $\Delta = 0$. Hallemos el coeficiente angular de la tangente:

$$2(a^2 - b^2) + 2a^2k^2 = 0, \qquad k = \frac{b^2 - a^2}{a^2} = 0,$$

es decir, la tangente coincide con el eje Ox.

De la ecuación de la curva obtenemos (para $a < b$) $y = \pm \frac{x}{x-a}\sqrt{2ax - x^2}$, y, por ende, la curva es simétrica respecto del eje Ox ($0 \leqslant x < a$; $a < x \leqslant 2a$). Por esta razón, cuando $a = b$, O será un punto de retroceso de primera especie (fig. 78). ▶

Se denomina *envolvente de una familia de curvas planas* la línea (o conjunto de varias líneas) que toca todas las curvas de la familia dada, siendo cada punto de ella un punto de tangencia.

Si una familia de curvas de un solo parámetro $f(x, y, \alpha) = 0$ tiene una envolvente, la ecuación de esta última puede obtenerse

a partir del sistema de ecuaciones

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \tag{8}$$

Eliminando del sistema (8) el parámetro α, obtendremos la ecuación de la forma $D(x, y) = 0$. La curva que se determina por esta ecuación lleva el nombre de *curva discriminante*. Una curva discriminante se compone de una envolvente y de un conjunto de puntos singulares de la familia dada.

EJEMPLO 9. La ecuación de la trayectoria del movimiento de un proyectil lanzado desde el punto O con una velocidad inicial v_0 formando el ángulo α con relación al horizonte (sin tomar en consideración la resistencia de aire) es

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Considerando α como parámetro, hállese la envolvente de todas las trayectorias del proyectil dispuestas en un mismo plano vertical.

◀ Tenemos

$$f(x, y, \alpha) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - y,$$

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = \frac{x}{\cos^2 \alpha} - \frac{gx^2 \operatorname{sen} \alpha}{v_0^2 \cos^3 \alpha} = \frac{x}{\cos^2 \alpha}\left(1 - \frac{gx}{v_0^2} \operatorname{tg} \alpha\right).$$

Formemos un sistema del tipo (8)

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad \frac{x}{\cos^2 \alpha}\left(1 - \frac{gx}{v_0^2} \operatorname{tg} \alpha\right) = 0.$$

De la segunda ecuación obtenemos: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gx}$ y $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{g^2x^2}{g^2x^2 + v_0^4}$. Sustituyendo en la primera ecuación, hallamos la ecuación de la envolvente (*parábola de seguridad*):

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g^2x^2 + v_0^4}{2v_0^2 g}, \quad \text{o bien} \quad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \blacktriangleright$$

3.53. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies en los puntos que se indican:

a) $z = \operatorname{sen} x \cos y$ en el punto $(\pi/4, \pi/4, 1/2)$;

b) $z = e^{x \cos y}$ en el punto $(1, \pi, 1/e)$.

3.54. Hállese la distancia entre el origen de coordenadas y el plano tangente a la superficie $z = y \operatorname{tg} \frac{x}{a}$ en el punto $\left(\frac{\pi a}{4}, a, a\right)$.

3.55. Hállense los ángulos formados por la normal a la superficie $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ en el punto $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ con los ejes de coordenadas.

3.56. Para la superficie $z = 4x - xy + y^2$ hállese la ecuación del plano tangente p ralelo al plano $4x + y + 2z + 9 = 0$.

3.57. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies en los puntos indicados:

a) $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$ en el punto (2, 1, 3);

b) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ en el punto (2, 2, 4);

c) $z^2 + 4z + x^2 = 0$ en los puntos de intersección con el eje Oz.

3.58. Para la superficie $x^2 - z^2 - 2x + 6y - 4$ hállese la ecuación de la normal paralela a la recta $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$.

3.59. Hállense en la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ los puntos, donde los planos tangentes son paralelos a los ejes de coordenadas.

3.60. Muéstrese que los planos tangentes a la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ cortan en los ejes de coordenadas los segmento cuya suma de los cuadrados es constante e igual a a^2.

3.61. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies, dadas paramétricamente, en los puntos que se indican:

a) $x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$, $z = r \operatorname{ctg} \alpha$ en el punto (r_0, φ_0);

b) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$ en el punto (u_0, v_0).

3.62*. ¿Cuál es el ángulo que forman al intersecarse el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el parabaloide hiperbólico $bz = xy$ en el punto común (x_0, y_0, z_0)?

3.63*. Muéstrese que las superficies siguientes son ortogonales dos a dos:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$;

b) $xyz = a^3$ y $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - y^2)$;

c) $xy = az^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$ y $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$.

4. Analícense los puntos singulares de las curvas:

3.64. $x^2 + y^2 = x^3 + y^4$.

3.65. $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$. **3.66.** $x^3 + y^3 = x^6$.

3.67. $y^2 = (x-1)^3$. **3.68.** $(y-2x^2)^2 = x^5$.
3.69. $4y^2 = x^5 + 5x^4$. **3.70.** $y^2 = ax^2 + x^3$.
3.71. $y^2 = 1 - e^{-x^2}$. **3.72.** $y^2 = 1 - e^{-x^3}$.

3.73*. $y = \frac{x}{1+e^{1/x}}$. **3.74*.** $y = x^x$.

3.75. Hállese la envolvente de la familia de las rectas $y = ax + a^2$.

3.76. Hállese la envolvente de la familia de las rectas $x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha = p$ ($p = \text{const}$, $p > 0$).

3.77. Hállese la envolvente de la familia de las circunferencias $x^2 + (y-C)^2 = R^2$ ($R = \text{const}$).

3.78. Hállese la envolvente de la familia de las parábolas $y^2 = 2px + p^2$.

3.79. Hállese la envolvente de la familia de las parábolas $y = 3a^2 + 2ax - x^2$.

3.80. Hállese la envolvente de la familia de las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(l-a)^2} = 1$ ($l = \text{const}$).

3.81. Hállese la envolvente de la familia de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y tienen su centro dispuesto en la parábola $y^2 = 4ax$.

3.82. Analícese el carácter de las curvas discriminantes de la familia de las líneas siguientes (C es un parámetro variable)

a) parábolas cúbicas $y = 1 - (x-C)^3$;
b) parábolas semicúbicas $(y-C)^2 = (x-C)^3$;
c) parábolas de Neil $(y-1)^3 = (x-C)^2$;
d) estrofoide $(a-x)(y-C)^2 = x^2(a+x)$.

§ 4. Números aproximados y operaciones con ellos

1. Errores absoluto y relativo. Supongamos que el número a es una *aproximación* del número A. Por ejemplo, $A = \sqrt{3}$ y $a = 1{,}7$. Cuando $a > A$, el número a se llama *aproximación por exceso*; cuando $a < A$, *aproximación por defecto*. Así, el número 1,73 es una aproximación de $\sqrt{3}$ por defecto, y el número 1,74, aproximación por exceso. El *error absoluto* de la aproximación (del número aproximado) a se determina por la igualdad

$$\Delta = |a - A|.$$

Por cuanto el número exacto A es en muchos casos desconocido, tampoco se sabe el error absoluto Δ; no obstante puede ser indicada la cota superior del error absoluto. La menor de las cotas superiores Δ_x del error absoluto lleva el nombre de *error absoluto límite*. En los cálculos prácticos como error absoluto límite Δ_a se toma con frecuencia

una de las cotas superiores. Tiene lugar la inclusión

$$A \in [a - \Delta_a,\ a + \Delta_a],$$

la cual se anota habitualmente en la forma $A = a \pm \Delta_a$. Por ejemplo, $\sqrt{3} = 1{,}7321 \pm 0{,}0001$.

El *error relativo* del número a se determina por la igualdad

$$\delta = \frac{\Delta}{a}.$$

De un modo análogo se determina también el *error relativo límite*

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a}.$$

Por ejemplo, para $A = \sqrt{3}$ y $a = 1{,}7321$

$$\delta_a = \frac{0{,}0001}{1{,}7321} = 0{,}00006.$$

En la notación decimal de un número se llama *cifra significativa* o signo cualquier cifra distinta de cero. El cero se considera cifra significativa sólo en el caso cuando se dispone entre las cifras significativas o está más a la derecha de todas las cifras significativas.

Se denomina *redondeo* de un número la sustitución del mismo por otro número que tenga menos cifras significativas. Al redondear se observan las siguientes reglas:

1) si la primera de las cifras desechadas es inferior a 5, los signos que se conservan se dejan sin cambios;

2) si la primera de las cifras desechadas es superior a 5, el último de los signos que se conservan se aumentan en 1;

3) si la primera de las cifras desechadas es igual a 5, mientras que entre las cifras que la siguen hay algunas distintas de cero, el último de los signos que se conservan se aumentan en 1;

4) si la primera de las cifras desechadas es igual a 5, mientras que todas las cifras que la siguen son ceros, el último de los signos decimales que se conservan se aumentan en 1 cuando es impar y se deja invariable, cuando es par.

Si el error absoluto de un número aproximado a no sobrepasa la unidad del orden expresado por la n-ésima cifra significativa en la notación decimal de este número, entonces a se llama *número poseedor de n signos justos en el sentido amplio*. En cambio, si el error absoluto no es superior a la mitad de la unidad del orden mencionado más arriba, entonces el número aproximado a lleva el nombre de *número que tiene n signos justos en el sentido estrecho*. En tal caso para el error relativo límite δ_a se verifican las desigualdades

$$\delta_a \frac{1}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad \text{y} \quad \delta_a \leqslant \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

en el primer y segundo casos, respectivamente; en ambas desigualdades k significa la primera cifra significativa del número a. Viceversa,

si el error relativo límite satisface la desigualdad

$$\delta_a \leqslant \frac{1}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{10^{n-1}},$$

el número aproximado correspondiente a, cuya primera cifra significativa es k, tiene n signos justos en el sentido estrecho.

4.1. Hállense los errores absoluto y relativo de los siguientes números aproximados obtenidos durante las mediciones de:

a) 23,015 kg; b) 84,5 cm; c) 25°15′.

4.2. Al medir la longitud de un trayecto se ha obtenido el resultado 25,2 km con exactitud de hasta 2 m, y al medir un área (levantamiento fotográfico aéreo) se ha obtenido el resultado 1500 m² con exactitud de hasta 30 m². Calcúlense los errores absoluto límite y relativo límite de ambos resultados.

4.3. Al medir la longitud de un tramo de camino de longitud 10 km se ha cometido un error igual a 10 m, y al medir el diámetro de una tuerca de 4 cm de diámetro se ha cometido un error igual a 1 mm. ¿Cuál de estas dos mediciones será más exacta?

4.4. ¿Cuáles son los errores absoluto límite y relativo límite de los números aproximados obtenidos al redondear

a) 36,1; b) 0,08?

4.5. Redondéense los números 29,15 y 3,25 hasta el primer signo decimal tras la coma.

4.6. Redondéense el número 5,3726 hasta las milésimas, hasta las centésimas y hasta las décimas partes. Hállense los errores absoluto y relativo de cada uno de los redondeos citados.

4.7. Redondéense hasta las tres cifras significativas los siguientes números: 0,02025, 1876672, 599983.

4.8. Determínese el número de signos justos en el sentido estrecho y dése la notación correspondiente de los siguientes números aproximados:

a) 413287,51 con una exactitud del 1%; b) 0,0794 con una exactitud del 2%.

4.9. ¿Cuántos signos debe tener el número $\sqrt{21}$ para que el error relativo límite no sobrepase el 1%?

4.10. ¿Cuántos signos deben tener los números ln 40 y arctg 2, para que su error relativo límite no sobrepase el 0,1%?

2. Operaciones con números aproximados. Sea $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función derivable en la región que se considera. Entonces el error absoluto límite Δ_u del valor de la función se determina por la correlación

$$\Delta_u = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \Delta_{x_k}, \tag{1}$$

donde Δ_{x_k} son errores absolutos límites de los valores de los argumentos correspondientes. Para el error relativo límite tiene lugar la igualdad

$$\delta_u = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \Delta_{x_k}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. Hállense los errores absoluto límite y relativo límite del volumen de un cono de radio r y altura h, si $r = 15 \pm 0{,}02$ cm, $h = 19{,}1 \pm 0{,}05$ cm y $\pi = 3{,}14$.

◀ Tenemos $v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 4498{,}1$ cm³. Teniendo presente que $r = 15$, $h = 19{,}1$, $\pi = 3{,}14$, $\Delta_r = 0{,}02$, $\Delta_h = 0{,}05$ y $\Delta_\pi = 0{,}0016$, hallemos $\frac{\partial v}{\partial \pi} = \frac{1}{3} r^2 h = 1432{,}5$, $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2}{3} \pi r h = 599{,}74$ y $\frac{\partial v}{\partial h} = \frac{1}{3} \pi r^2 = 235{,}5$. Aplicando la fórmula (1), obtenemos el error absoluto límite

$$\Delta_v = \left| \frac{\partial v}{\partial \pi} \right| \Delta_\pi + \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| \Delta_r + \left| \frac{\partial v}{\partial h} \right| \Delta_h = 26{,}06 \text{ cm}^3.$$

El error relativo límite puede determinarse a partir de la igualdad

$$\delta_v = \frac{26{,}1}{4498} = 0{,}006.$$

De este modo, $v = 4498 \pm 26{,}1$ cm³. ▶

Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

4.11*. El error absoluto límite de una suma es igual a la suma de los errores absolutos límite de los sumandos.

4.12*. El error relativo límite de un producto es igual a la suma de los errores relativos límite de los factores.

4.13*. El error relativo límite de la n-ésima potencia es n veces mayor que el error relativo límite de la base.

4.14*. El error relativo límite de un cociente es igual a la suma de errores relativos límite del dividendo y del divisor.

4.15*. El error absoluto límite Δ_{uv} de un producto uv satisface la correlación $\Delta_{uv} = \Delta_u v + \Delta_v u$.

Realícense las operaciones indicadas sobre los números aproximados en los cuales todos los signos decimales son justos en el sentido estrecho:

4.16. $130{,}6 + 0{,}255 + 1{,}15224 + 41{,}84 + 11{,}8216$.

4.17. $17{,}83 + 1{,}07 + 1{,}1 \cdot 10^2$. **4.18.** $153{,}21 - 81{,}329$.

4.19. $61{,}32 - 61{,}31$. **4.20.** $35{,}2 \cdot 1{,}748$.

4.21. $65{,}3 \cdot 78{,}5$. **4.22.** $7{,}6 : 2{,}314$.

4.23. $170 : 5$. **4.24.** $40{,}5^3$.

4.25. $\sqrt{54{,}71}$.

4.26. Al medir el radio de un círculo con una exactitud de hasta 0,5 cm se ha obtenido el número 12 cm. Hállense los errores absoluto y relativo del área del círculo.

4.27. Determínese el error absoluto del logaritmo decimal de un número aproximado x calculado con un error relativo δ.

4.28. ¿Con qué error absoluto límite se deben medir los lados de un rectángulo $a \approx 4$ m y $b \approx 5$ m, para que su área S pueda calcularse con una exactitud de hasta 0,1 m²?

◀ Tenemos: $S = ab$ y $\Delta S = 0{,}1$. Suponiendo iguales los sumandos en la fórmula (1), obtenemos

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta x_i = \frac{\Delta_u}{n}, \text{ de donde } \Delta x_i \quad \frac{\Delta_u}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}$$

(*principio de igual efecto*). Por ello, calculando las derivadas parciales $\frac{\partial S}{\partial a} = b = 5$ y $\frac{\partial S}{\partial b} = a = 4$, hallamos que

$$\Delta_a = \frac{0{,}1}{2 \cdot 5} = 0{,}01, \quad \Delta_b = \frac{0{,}1}{2 \cdot 4} = 0{,}0125.$$

Repartiendo el número 0,1 en la fórmula para Δ_S entre dos sumandos en partes no iguales, sino de algún otro modo, obtendremos otros valores para Δ_a y Δ_b, que aseguran, no obstante, el mismo error absoluto. ▶

4.29. ¿Con qué error absoluto se debe medir el lado x de un cuadrado para determinar el área de este cuadrado con una exactitud de hasta 0,001 m², si $2 \text{ m} < x < 3 \text{ m}$?

4.30. Calcúlese la densidad de aluminio, si un cilindro de aluminio de 2 cm de diámetro y 11 cm de altura tiene una masa igual a 93,4 g. El error relativo de medición de las longitudes es igual a 0,01, y el error relativo de determinación de las masas es igual a 0,001.

4.31. ¿Con qué exactitud debe determinarse el radio de la base R y la altura H de una lata cilíndrica para que su capacidad pueda ser calculada con una exactitud de hasta el 1%?

4.32. ¿Con qué exactitud se debe tomar el valor aproximado del ángulo $x \approx 25°$ para determinar el valor del sen x con cuatro signos juntos en el sentido estrecho?

4.33. ¿Con qué número de signos justos en el amplio sentido debe tomarse el valor del argumento $x \approx 2$ para obtener el valor de la función $y = e^x$ con una exactitud de hasta 0,001?

4.34. ¿Con qué número de signos justos debe conocerse el término independiente de la ecuación $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ para obtener las raíces de esta ecuación con cuatro signos justos en el sentido estrecho?

4.35. Se pide medir con una exactitud de hasta el 1% el área de la superficie lateral de un cono truncado cuyos radios de las bases son ≈ 2 m y ≈ 1 m, mientras que la generatriz es igual aproximadamente a 5 m. ¿Con qué exactitud se deben medir con este fin los radios y la generatriz y cuantos signos debe tener el número π?

RESPUESTAS

1.1. $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+p-1)}$; $0 < x < p$, $0 < y < p$, $x+y > p$ **1.2.** $V = \frac{S^2}{3\pi^2 l^3}\sqrt{\pi^2 l^4 - S^2}$; $0 < S < \pi l^2$. **1.3.** $S = \frac{x+y}{4}\sqrt{4z^2-(x-y)^2}$; $z > \frac{x-y}{2}$. **1.4.** $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. **1.5.** $x^2 + y^2 \geqslant R^2$. **1.6.** $x^2+y^2 < R^2$. **1.7.** $x^2+y^2 > R^2$. **1.8.** $x > y$. **1.9.** $-1 \leqslant x^2+y \leqslant 1$. **1.10.** $x+y < 0$. **1.11.** $x \leqslant x^2+y^2 < 2x$. **1.12.** Las franjas $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k es un número entero). **1.13.** $0 < x^2+y^2 \leqslant 1$ para $0 < a < 1$, $x^2+y^2 \geqslant 1$ para $a > 1$. **1.14.** Dos ángulos obtusos opuestos por el vértice y formados por las rectas $y=0$ e $y=-2x$, incluyendo la frontera sin el vértice común (0, 0). **1.15.** $4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$. **1.16.** El triángulo curvilíneo formado por la recta $y=2$ y las parábolas $y^2 = \pm x$, excluyendo el vértice (0, 0). **1.17.** $0 \leqslant \varphi < \pi$. **1.18.** La parte de un plano comprendida entre los rayos $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ y $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ y $\varphi = \frac{5\pi}{4}$. **1.19.** $x^2+y^2+z^2 \geqslant R^2$. **1.20.** $0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant z^2$, $z \neq 0$. **1.21.** $x^2+y^2-z^2 < 1$. **1.22.** El cubo n-dimensional $-1 \leqslant x_k \leqslant 1$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). **1.23.** El elipsoide n-dimen-

sional $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n^2}\leqslant 1$. **1.24.** $f(2,\ 1)=1/4$; $f(1,\ 2)=4$; $f(3,\ 2)=0$; $f(2,\ 3)=\infty$; $f(a,\ a)=-1$; $f(a,\ -a)=1$. **1.25.** $f(-3,\ 4)=-24/25$; $f(1,\ y/x)=f(x,\ y)$. **1.26.** $\sqrt{1+x^2}$. **1.27.** $f(x)=x^2-x$; $z=2y+(x-y)^2$. **1.28.** $\frac{x^2(1-y)}{1+y}$. ◀ Designemos $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$. Entonces, $x=\frac{u}{1+v}$, $y=\frac{uv}{1+v}$, $f(u,\ v)=\frac{u^2}{(1+v)^2}-\frac{u^2v^2}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$. Resta dar el nombre x e y a las variables u y v. ▶ **1.29.** a) $x^4-2x^2y^2+2y^4$; b) $4x^2y^2$. **1.31.** a) $\cos 2x$; b) $\cos(x^2-y^2)$. **1.32.** -6. **1.33.** 1. **1.34.** 0. **1.35.** e. **1.36.** 1. **1.37.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z=\frac{1}{k-1}$ a lo largo de la recta $y=kx$; $\lim z=3$ para $k=4/3$; $\lim z=2$ para $k=3/2$; $\lim z=1$ para $k=2$; $\lim z=-2$ para $k=1/2$. **1.40.** No lo tiene. **1.41.** No lo tiene. **1.42.** ● Analícese la variación de x o y en la parábola $y=x^2$. **1.44.** $(1,\ -1)$. **1.45.** $(m,\ n)$, donde $m,\ n\in\mathbb{Z}$. **1.46.** Las líneas de discontinuidad son las rectas $x=k\pi$ e $y=m\pi$, donde $k,\ m\in\mathbb{Z}$. **1.47.** La línea de discontinuidad es la circunferencia $x^2+y^2=1$. **1.48.** Las líneas de discontinuidad son la recta $x+y=0$ y la parábola $y^2=x$. **1.49.** Las líneas de discontinuidad son una circunferencia $x^2+y^2=1$ y una hipérbola $x^2-y^2=1$. **1.50.** Las superficies de discontinuidad son los planos coordenados $x=0$, $y=0$, $z=0$. **1.51.** La superficie de discontinuidad es un elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **1.52.** La superficie de discontinuidad es el cono $x^2+y^2-z^2=0$. **1.53.** La superficie de dicontinuidad es el hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2=1$. **1.54.** La superficie de discontinuidad es el hiperboloide de dos hojas $x^2+y^2-z^2=-1$. **1.55.** $\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4-10x^2y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=5y^4-10x^3y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20x^3-30xy^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-45x^2y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=20y^3-30x^3y$. **1.56.** $\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x+\frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1-\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **1.57.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{3xy^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. **1.58.** $\frac{\partial z}{\partial x}=(1-xy)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(xy-2)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x(xy-2)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{-xy}$. **1.59.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos y^2}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y\,\operatorname{sen} y^2}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\cos y^2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2y\,\operatorname{sen} y^2}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2\operatorname{sen} y^2+4y^2\cos y^2}{x}$.

1.60. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=y^{x-1}\times$ $\times(x\ln y+1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)\,y^{x-2}$ $(y>0)$. **1.61.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ $=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$. **1.62.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\operatorname{sgn}x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{|x|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ $=\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{(y^2-x^2)\operatorname{sgn}x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$, **1.63.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=$ $=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. **1.64.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{y}\times$ $\times\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{z(z+1)}{x^2}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$ $=\frac{z(z-1)}{y^2}\left(\frac{y}{z}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln^2\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=-\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{1}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$. **1.65.** $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3t^4+3$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3t^4-4$, $\frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2t^4+2$, $\frac{\partial u}{\partial t}=$ $=4xy^2z^3t^3-1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2xz^3t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6xy^2zt^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=$ $=12xy^2z^3t^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=2yz^3t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=3y^2z^2t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}=4y^2z^3t^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=6xyz^2t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}=8yz^3t^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t}=12xy^2z^2t^3$. **1.66.** $f'_x(3,2)=$ $=56$, $f'_y(3,2)=42$, $f''_{xx}(3,2)=36$, $f''_{xy}(3,2)=31$, $f''_{yy}(3,2)=6$. **1.67.** $f'_x(1,2)=e(2e^4-1)$, $f'_y(1,2)=4e^5$, $f''_{xx}(1,2)=e(6e^4-1)$, $f''_{xy}(1,2)=8e^5$, $f''_{yy}(1,2)=18e^5$. **1.70.** $f'''_{xxx}(0,1)=0$, $f'''_{xxy}(0,1)=2$, $f_{xyy}(0,1)=0$, $f''_{yyy}(0,1)=0$. **1.71.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta}=-\frac{6}{r^4}+$ $+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, donde $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. **1.72.** $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}=-6(\cos x+\cos y)$. **1.73.** $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\,\partial y^q}=pq!$ **1.78.** $r^2\cos\theta$. **1.85.** $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. ◉ Compruébese que la función es nula en todos los puntos de los ejes Ox y Oy y úsese la definición de las derivadas parciales. **1.86.** ◉ Compruébese, usando las reglas de derivación y la definición de la derivada parcial, que $f'_x(x,y)=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$ para $x^2+y^2\neq 0$, $f'_x(0,0)=0$,

y, por tanto, $f'_x(0, y) = -y$. De aquí $f''_{xy}(0, y) = f''_{xy}(0, 0) = -1$. Análogamente hallamos que $f''_{yx}(0, 0) = 1$. **1.87.** $\Delta z = 0{,}33$, $dz = 0{,}3$. **1.88.** $\Delta z = 0{,}0187$. $dz = 0{,}0174$. **1.89.** $dz = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\,(y+\sqrt{x^2+y^2})} + \dfrac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **1.90.** $dz = \dfrac{y}{x^2\cos^2\dfrac{y^2}{x}}(2x\,dy - y\,dx)$. **1.91.** $dz = \dfrac{1}{y^2} \times \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}(x\,dy - y\,dx)$. **1.92.** $du = (xy)^z\left(\dfrac{z}{x}\,dx + \dfrac{z}{y}\,dy + \ln(xy)\,dz\right)$. **1.93.** $df = (x_2 - x_3)\,x_1^{x_2-x_3-1}\ln x_4\,dx_1 + x_1^{x_2-x_3}\ln x_1 \ln x_4\,dx_2 - x_1^{x_2-x_3} \times \ln x_1 \cdot \ln x_4 \times dx_3 + x_1^{x_2-x_3}\dfrac{dx_4}{x_4}$. **1.94.** $df(1, 2, 1) = \dfrac{5dz - 2(dx + 2dy)}{25}$. **1.95.** 8,29. **1.96.** 2,95. **1.97.** 0,227. **1.98.** 8,2 m³. **1.99.** Disminuirá en 1,57 cm. **1.100.** Aumentará en 617,5 cm³. **1.101.** $dz = 3x(x+2y)dx + 3(x^2 - y^2)\,dy$, $d^2z = 6((x+y)\,dx^2 + 2x\,dx\,dy - y\,dy^2)$. **1.102.** $dz = (x\,dy - y\,dx)\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)$, $d^2z = 2\left(\dfrac{y}{x^3}\,dx^2 + \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}\right)dx\,dy - \dfrac{x}{y^3}\,dy^2\right)$. **1.103.** $dz = \dfrac{(x+y)\,dx + x\,dy}{\sqrt{x^2+2xy}}$, $d^2z = \dfrac{-y^2dx^2 + 2xy\,dx\,dy - x^2dy^2}{(x^2+2xy)^{3/2}}$. **1.104.** $dz = \dfrac{x^2\,dy - xy\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $d^2z = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}(y(2x^2 - y^2)\,dx^2 + 2x \times (2y^2 - x^2)\,dx\,dy - 3x^2y\,dy^2)$. **1.105.** $dz = e^{xy}(y^2 + xy + 1)\,dx + (x^2 + xy + 1)\,dy)$, $d^2z = e^{xy}(y(y^2 + xy + 2)\,dx^2 + 2(x+y)(xy+2) \times dx\,dy + x(x^2 + xy + 2)\,dy^2)$. **1.106.** $dz = \left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right)dx + \dfrac{x}{y}\,dy$; $d^2z = -\dfrac{1}{x}\,dx^2 + \dfrac{2}{y}\,dx\,dy - \dfrac{x}{y^2}\,dy^2$. **1.107.** $dz = \dfrac{1}{2x^2 + 2xy + y^2} \times (y\,dx + x\,dy)$, $d^2z = -\dfrac{1}{(2x^2+2xy+y^2)^2}(2y(2x+y)\,dx^2 + 2(y^2 - 2x^2) \times dx\,dy - 2x(x+y)\,dy^2)$. **1.108.** $du = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, $d^2u = 2(dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx)$. **1.109.** $du = e^{xyz}(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)$, $d^2u = e^{xyz}(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)^2 + 2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx)$. **1.110.** $d^3z = e^y(-\cos x\,dx^3 - 3\operatorname{sen} x\,dx^2\,dy + 3\cos x\,dx\,dy^2 + \operatorname{sen} x\,dy^3)$. **1.111.** $d^3u = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dx\,dy\,dz)$. **1.112.** $d^6u = -\dfrac{5!\,(dx+dy+dz)^6}{(x+y+z)^6}$. **1.113.** $d^mu = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^m$.

2.1. $\dfrac{dz}{dt} = e^{2x-3y}(2\sec^2 t - 3(2t-1))$. **2.2.** $\dfrac{dz}{dt} = x^y\left(\dfrac{y}{xt} + \ln x\cos t\right)$. **2.3.** $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$. **2.4.** $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{x(z+2yt^2) - yzte^t}{tx^2}$. **2.5** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{e^x}{e^x+e^y}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{e^x + e^y(x^2+1)}{e^x+e^y}$. **2.6.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{y^2+(x+1)^2}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y(1-2(x+1)^2}{y^2+(x+1)^2}$. **2.7.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2u\left(\dfrac{ux}{v} - \dfrac{y\ln v}{x^2}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2u\left(\dfrac{\ln v}{x} +\right.$

$+\frac{uy}{v}\Big)$. **2.8.** $dz=((2uv-v^2)\operatorname{sen} y-(u^2-2uv)\,y\operatorname{sen} x)\,dx+(2uv-$ $-v^2)\,x\cos y+(u^2-2uv)\cos x)\,dy$. **2.9.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_v(u,v)-\frac{2y}{(x+y)^2}\times$ $\times f'_u(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{(x+y)^2}f'_u(u,v)-3f'_v(u,v)$. **2.10.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y^2}\times$ $\times f'_u(u,v)+y^2f'_v(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf'_v(u,v)-\frac{2y}{x^2-y^2}f'_u(u,v)$. **2.11.** $dz=(5x^4f'_v(u,v)-yf'_u(u,v)\operatorname{sen}(xy))\,dx-(x\operatorname{sen}(xy)\,f'_u(u,v)+$ $+7f'_v(u,v))\,dy$. **2.12.** $dz=\frac{1}{y^2}\left(\cos\frac{x}{y}f'_u(u,v)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}f'_v\times\right.$ $\left.\times(u,v)\right)(y\,dx-x\,dy)$. **2.13.** $du=(2sf'_x(x,y,z)+2sf'_y(x,y,z)+$ $+t2f'_z(x,y,z))\,ds+(2tf'_x(x,y,z)-2tf'_y(x,y,z)+2sf'_z(x,y,z))\,dt$. **2.14.** $\frac{\partial u}{\partial x_1}=f'_{x_1}(x_1,x_2,x_3,x_4)+f'_{x_3}(x_1,x_2,x_3,x_4)\,g'_{x_1}(x_1,x_2)+$ $+f'_{x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)\,(h'_{x_1}(x_1,x_2,x_3)+h'_{x_3}(x_1,x_2,x_3)\,g'_{x_1}(x_1,x_2))$ $\frac{\partial u}{\partial x_2}=f'_{x_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)+f'_{x_3}(x_1,x_2,x_3,x_4)\,g'_{x_2}(x_1,x_2)+f'_{x_4}(x_1,x_2,$ $x_3,x_4)\,(h'_{x_2}(x_1,x_2,x_3)+h'_{x_3}(x_1,x_2,x_3)\,g'_{x_2}(x_1,x_2))$. **2.19.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ $=y^2f''_{uu}(u,v)+2f''_{uv}(u,v)+\frac{1}{y^2}f''_{vv}(u,v)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=xyf''_{uu}(u,v)-$ $-\frac{x}{y^3}f''_{vv}(u,v)+f'_u(u,v)-\frac{1}{y^2}f'_v(u,v)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2f''_{uu}(u,v)-\frac{2x^2}{y^2}\times$ $\times f''_{uv}(u,v)+\frac{x^2}{y^4}f''_{vv}(u,v)+\frac{2x}{y^3}f'_v(u,v)$, **2.20.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}+f'_{x_2}\varphi'_y+$ $+f''_{y_2}\varphi'_2+f''_{z_2}\varphi'_x\varphi'_y+f'_2\varphi''_{xy}$. **2.21.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}+$ $+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=$ $=xyf''_{13}+xy^2f''_{23}+xy^2zf''_{33}+yf'_3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3$ *). **2.24.** $d^2u=4f''(t)\cdot(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2+2f'(t)\cdot(dx^2+dy^2+dz^2)$. **2.25.** $d^2u=a^2f''_{11}\,dx^2+b^2f''_{22}\,dy^2+c^2f''_{33}\,dz^2+2abf''_{12}\,dx\,dy+2acf''_{13}\,dx\,dz+$ $+2bcf''_{23}\,dy\,dz$. **2.26.** $d^2z=(\operatorname{sen}^2y\cdot f''_{uu}-2y\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\cdot f''_{uv}+y^2\operatorname{sen}^2xf''_{vv}-$ $-y\cos x\cdot f'_v)\,dx^2+(x\operatorname{sen}2y\cdot f''_{yy}+2(\operatorname{sen}y\cos x-xy\operatorname{sen}x\cos y)f''_{uv}-$ $-y\operatorname{sen}2x\cdot f''_{vv}+2(\cos y\cdot f'_u-\operatorname{sen}x\cdot f'_v))\,dx\,dy+(x^2\cos^2y\cdot f''_{uu}+2x\cos x\times$

---

* En las respuestes a los probl mas 2.21 y 2.25 mediante f'_i y f''_{ij} están designadas las derivadas parciales de la función $f(\varphi_1(x,y,z),\varphi_2(x,y,z),\varphi_3(x,y,z))$ respecto a las variables φ_i ó φ_i y φ_j.

$\times \cos y \cdot f''_{uv} + \cos^2 x \cdot f''_{vv} - x \operatorname{sen} y \cdot f'_u)\, dy^2$. **2.27.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 e^{2x} - xe^{2y}}{x^2 e^{2y} - ye^{2x}}$.

2.28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \cos x + \operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen} x}$. **2.29.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-1}{x+y+1}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. **2.30.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{y^2}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2(1+y^2)}{y^5}$. **2.31.** $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 0$, $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\dfrac{1}{3}$, $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \dfrac{1}{3}$. **2.32.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}$. **2.33.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz(x+z) - z^3}{z^3 + 2xy(x+z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz(x+z)}{z^3 + 2xy(x+z)}$.

2.34. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_u(u, v) + 2xF'_v(u, v)}{F'_u(u, v) + 2zF'_v(u, v)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_u(u, v) + 2yF'_v(u, v)}{F'_u(u, v) + 2zF'_v(u, v)}$, donde $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$. **2.35.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{ze^{xz} f'_v(u, v)}{yf'_u(u, v) + xe^{xz} f'_v(u, v)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{zf'_u(u, v)}{yf'_u(u, v) + xe^{xz} f'_v(u, v)}$, donde $u = yz$, $v = e^{xz}$. **2.36.** $dz = \dfrac{z\,dx - z(1 + x^2z^2)\,dy}{y(1 + x^2z^2) - x}$. **2.37.** $dz = \dfrac{y^2(z - 3x^2)\,dx + (3y^4 + ze^{z/y})\,dy}{y(e^{z/y} - xy)}$.

2.38. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2 - x}{1 + z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{1 + z}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{2y(x-2)}{(1+z)^3}$. **2.39.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{x + y + z}{(x + y + z - 1)^3}$. **2.40.** $d^2z = \dfrac{c^2}{a^2b^2z^3}((y^2 - b^2) \times \times dx^2 - 2xy\,dx\,dy + (x^2 - a^2)\,dy^2)$. **2.44.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{5}{3}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{3}{8}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2} = \dfrac{5}{18}$. **2.45.** $dy = -\dfrac{4x}{5y}\,dx$, $dz = \dfrac{x}{5z}\,dx$, $d^2y = -\dfrac{4}{25y^3}(4x^2 + 5y^2)\,dx^2$, $d^2z = \dfrac{1}{25z^3}(5z^2 - x^2)\,dx^2$. **2.46.** $du = \dfrac{(y-u)\,dx + (y-v)\,dy}{x - y}$, $dv = \dfrac{(x-u)\,dx + (x-v)\,dy}{y - x}$, $d^2v = -d^2u = \dfrac{2}{(x-y)^2}((y-u)\,dx^2 + (y - v + u - x)\,dx\,dy + (v - x)\,dy^2)$.

2.48. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = uv^2 + u^2v$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = uv^2 = u^2v$. **2.49.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{c}{a}\cos u \operatorname{ch} v$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{c}{b}\operatorname{sen} u \operatorname{ch} v$. **2.50.** $dz = e^{-u}((v\cos v - u\operatorname{sen} v)\,dx + (u\cos v + v\operatorname{sen} v)\,dy)$. **2.51.** $dz = -3uv\,dx + \dfrac{3}{2}(u + v)\,dy$. **2.52.** $\dfrac{d^2y}{dt^2} - y = 0$. **2.53.** $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y + 0$. **2.54.** $\dfrac{d^3x}{dy^3} + \dfrac{d^2x}{dy^2} = 0$. **2.55.** $r'^2 = \dfrac{1 - \operatorname{sen} 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi} r^2$. **2.56.** $w = r\dfrac{\partial u}{\partial r}$. **2.57.** $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial v}$. **2.58.** $\dfrac{\partial z}{\partial r} =$

$= u\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ **2.59.** $w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}$. **2.60.** $w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{\operatorname{ctg} \theta}{\rho^2}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$. **2.61.** $\dfrac{\partial w}{\partial v} = 0$. **2.62.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$. **2.63.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2w$.

3.1. $f(x+h, y+k) = xy^2 + y^2 h + 2xyk + 2yhk + xk^2 + hk^2$. **3.2.** $\Delta f(x, y) = -h^2 + 2hk + 3k^2$. **3.3.** $f(x, y) = 12 + 15(x-2) + 6(x-2)^2 + 3(x-2)(y-1) - 6(y-1)^2 + (x-2)^3 - 2(y-1)^3$. **3.4.** $f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + h(2x + y + 3) + k(x + 4y - 2z - 1) + l(6z - 2y - 4) + h^2 + 2k^2 + 3l^2 + hk - 2kl$. **3.5.** $f(x, y, z) = 8 - 8(y+1) + 4(z-2) + (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 2(x-1)(y+1) - 2(x-1) \times (z-2) - 2(y+1)(z-2)$. **3.6.** $f(x, y) = 1 + y + \dfrac{1}{2!}(y^2 - x^2) + \dfrac{1}{3!}(y^3 - 3x^2 y) + o(\rho^3)$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. **3.7.** $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{3!}(xy^3 - x^3 y) + o(\rho^4)$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. **3.8.** $f(x, y) = 1 - (x-1) + (y-1) + (x-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)^3 + (x-1)^2(y-1) + o(\rho^3)$, donde $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. **3.9.** $f(x, y, z) = (x-1) + (y-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - \dfrac{1}{2}(y-1)^2 + z^2 + o(\rho^2)$, donde $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$. **3.10.** $z = 1 + \dfrac{2}{3}(x-1) - \dfrac{1}{2}(y-1) - \dfrac{2}{9}(x-1)^2 - \dfrac{1}{8}(y-1)^2 + o(\rho^2)$, donde $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. **3.11.** $z_{\min} = -9$ cuando $x = 0$, $y = 3$. **3.12.** $z_{\max} = 1/64$ cuando $x = 1/4$, $y = 1/2$. **3.13.** $z_{\min} = -4/3$ cuando $x = 0$, $y = -2/3$. No hay extremo en el punto estacionario $(2, -2/3)$. **3.14.** $z_{\min} = 30$ cuando $x = 5$, $y = 2$. **3.15.** $z_{\min} = 10 - 18 \ln 3$ cuando $x = 1$, $y = 3$. **3.16.** $z_{\min} = -28$ cuando $x = 2$, $y = 1$; $z_{\max} = 28$ cuando $x = -2$, $y = -1$. No hay extremos en los puntos estacionarios $(1, 2)$ $(-1, -2)$. **3.17.** $z_{\min} = 0$ cuando $x = y = 0$. No hay extremos en los puntos estacionarios $(-5/3, 0)$, $(1, 4)$, $(1, -4)$. **3.18.** $z_{\min} = 0$ cuando $x = y = 0$; $z_{\max} = 2e^{-1}$ cuando $x = \pm 1$, $y = 0$. No hay extremos en los puntos estacionarios $(0, \pm 1)$. **3.19.** $z_{\max} = 2$ cuando $x = y = 0$. **3.20.** $u_{\min} = -14$ cuando $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$. **3.21.** $u_{\max} = 1/7^7$ cuando $x = y = z = 1/7$. **3.22.** $u_{\min} = 2^{3/4}$ cuando $x = 2^{1/4}$, $y = 2^{1/2}$, $z = 2^{3/4}$. **3.23.** La ecuación define dos funciones, de las cuales una tiene un máximo ($z_{\max} = 6$) cuando $x = -2$, $y = 1$, y la otra, un mínimo ($z_{\min} = -2$) cuando $x = -2$, $y = 1$; en los puntos de la circunferencia $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ cada una de las funciones citadas tiene un extremo de contorno $z = 2$. ● Las funciones mencionadas se definen en forma explícita mediante la igualdad $z = 2 +$

$\pm\sqrt{16-(x+2)^2-(y-1)^2}$ y quedan determinadas sólo en el interior y en la circunferencia $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ en cuyos puntos ambas funciones toman el valor $z=2$. Este valor es mínimo para una de las funciones y máximo para la otra. **3.24.** La ecuación define dos funciones, de las cuales una tiene un mínimo ($z_{mín}=1$) cuando $x=0$, $y=-2$, y la otra, un máximo ($z_{máx}=-8/7$) cuando $x=0$, $y=16/7$. **3.25.** $z_{mín}=-19/4$ cuando $x=y=-3/2$. **3.26.** $z_{mín}=2$ cuando $x=y=1$. **3.27.** $z_{mín}=-1-2\sqrt{2}$ cuando $x=-1/\sqrt{2}$, $y=1/\sqrt{2}$; $z_{máx}=1-2\sqrt{2}$ cuando $x=1/\sqrt{2}$, $y=-1\sqrt{2}$. **3.28.** $z_{mín}=0$ cuando $x=1$, $y=0$; $z_{máx}=1/27$ cuando $x=y=1/3$. **3.29.** $z_{mín}=-5$ cuando $x=-2/\sqrt{5}$, $y=-1/\sqrt{5}$; $z_{máx}=\sqrt{5}$ cuando $x=2/\sqrt{5}$, $y=1/\sqrt{5}$. **3.30.** $u_{mín}=-18$ cuando $x=-4$, $y=-2$, $z=4$; $u_{máx}=18$ cuando $x=4$, $y=2$, $z=-4$. **3.31.** $u_{mín}=4$ cuando $x=y=0$, $z=\pm 2$; $u_{máx}=16$ cuando $x=\pm 4$, $y=z=0$; no hay extremo cuando $x=z=0$ e $y=\pm 3$. **3.32.** $u_{máx}=2^8$ cuando $x=y=z=2$. **3.33.** $u_{máx}=2$ en los puntos (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2); $u_{mín}=50/27$ en los puntos (2/3, 5/3, 5/3), (5/3, 2/3, 5/3), (5/3, 5/3, 2/3). **3.34.** ◉ Búsqueso el mínimo de la función $u=(x^3+y^3+z^3)/3$ para $x+y+z=s$. **3.35.** a) $z_{máx}=6$ cuando $x=1$, $y=0$; b) $z_{máx}=5$ para $x=y=0$. **3.36.** $z_{máx}=6$ para $x=3$, $y=0$ y cuando $x=0$, $y=3$; $z_{mín}=-1$ para $x=y=1$. **3.37.** $z_{máx}=1/2$ para $x=y=\pm 1/\sqrt{2}$; $z_{mín}=-1/2$ para $x=-y=\pm 1/\sqrt{2}$. **3.38.** $z_{máx}=2/(3\sqrt{3})$ para $x=1/\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{2/3}$; $z_{mín}=-2/(3\sqrt{3})$ para $x=-1/\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{2/3}$. **3.39.** $a=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$. **3.40.** Un cubo cuya arista tiene la longitud a. **3.41.** Un cubo cuya arista tiene la longitud $d/\sqrt{3}$. **3.42.** Las coordenadas del punto buscado son iguales a las medias aritméticas de las coordenadas de los vértices. **3.43.** Las longitudes de los lados del paralelepípedo son: $2R/\sqrt{3}$, $2R/\sqrt{3}$, $R/\sqrt{3}$. **3.44.** Las longitudes de los lados del paralelepípedo son $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\frac{H}{3}$. **3.45.** Un triángulo isósceles en el que el lado lateral es $a/(2\operatorname{sen}\alpha/2)$. **3.46.** $(-12/5, -3/5)$, $(12/5, 3/5)$. ● Sustitúyanse las condiciones suficientes de extremo por los razonamientos geométricos.

3.47. $C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$. ● Hágase uso de la expresión del área del triángulo en términos de las coordenadas de sus vértices. **3.48.** $x=y=z=\sqrt[3]{V}+28$. **3.49.** $x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$, $y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$. **3.50.** $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{v_1}{v_2}$. ● Es evidente que el punto M, por el cual el rayo pasa de un medio al otro,

deberá encontrarse entre los puntos A_1 y B_1, siendo $AM=\frac{a}{\cos\alpha}$, $BM=\frac{b}{\cos\beta}$, $A_1M=a\operatorname{tg}\alpha$, $B_1M=b\operatorname{tg}\beta$. La duración del movimiento del rayo es igual a $\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$. El problema se reduce a la búsqueda del mínimo de la función $f(\alpha,\beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$ a condición de que $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=c$. **3.51.** $\alpha=\beta$. **3.52.** $I_1:I_2:\ldots:I_n=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}:\ldots:\frac{1}{R_n}$. ● Hállese el mínimo de la función $f(I_1, I_2, \ldots, I_n)=I_1^2R_1+I_2^2R_2+\ldots+I_n^2R_n$, si $I_1+I_2+\ldots+I_n=I$. **3.53.** *a*) $x-y-2z+1=0$, $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-2}$; b) $x+ez-2=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-\pi}{0}=\frac{z-\frac{1}{e}}{e}$. **3.54.** $\frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$. **3.55.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{6}}$. **3.56.** $4x+y+2z-78=0$. **3.57.** a) $2x+7y-5z+4=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-5}$; b) $x+y-4z=0$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$; c) $z=0$, $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ (en el punto (0, 0, 0)); $z=-4$, $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+4}{1}$ (en el punto (0, 0, −4)). **3.58.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-\frac{10}{3}}{3}=\frac{z+4}{4}$. **3.59.** En los puntos $(0, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$ los planos tangentes son paralelos al plano Oxy, en los puntos $(\pm 2, \mp 4, \pm 2)$ al plano Oxz, en los puntos $(\pm 4, \mp 2, 0)$, al plano Oyz. **3.61.** a) $x\cos\varphi_0+y\operatorname{sen}\varphi_0-z\operatorname{tg}\alpha=0$, $\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\operatorname{sen}\varphi_0}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{z-r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}$; b) $ax\operatorname{sen}v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0$, $\frac{x-u_0\cos v_0}{a\operatorname{sen}v_0}=\frac{y-u_0\operatorname{sen}v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-au_0}{u_0}$. **3.62.** $\cos\psi=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$. ● Un ángulo formado por dos superficies en el punto de su intersección se denomina ángulo entre dos planos tangentes trazados a dichas superficies en un punto dado. **3.63.** Las superficies se llaman ortogonales, si se cortan bajo un ángulo recto en cada punto de la línea de su intersección. **3.64.** El punto aislado (0, 0). **3.65.** El nudo (0, 0). **3.66.** Un punto aislado (0, 0). **3.67.** El punto de retroceso de primera especie (1, 0). **3.68.** El punto de retroceso de segunda especie (0, 0). **3.69.** El punto

de autoadherencia (0, 0). **3.70.** (0, 0) es un punto aislado, si $a < 0$; un nudo, si $a > 0$; un punto de retroceso de primera especie, si $a = 0$. **3.71.** Un nudo (0, 0). **3.72.** El punto de retroceso de primera especie (0, 0). **3.73.** Un punto anguloso (0, 0). ◆ Muéstrese que $\lim_{x \to +0} y' = 0$, $\lim_{x \to -0} y' = 1$. **3.74.** El punto terminal (0, 1). ◇ Muéstrese que $\lim_{x \to -0} y = \lim_{x \to +0} y = 1$. **3.75.** $y = -x^2/4$. **3.76.** $x^2 + y^2 = p^2$. **3.77.** $x = \pm R$. **3.78.** No hay envolvente. **3.79.** $y = -\frac{4}{3}x^3$. **3.80.** $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$. **3.81.** $y^2 = -\frac{x^3}{x + 2a}$. **3.82.** a) La curva discriminante $y = 1$ es una envolvente y constituye un conjunto de puntos de inflexión de la familia dada; b) la curva discriminante se descompone en las rectas: $y = x - \frac{4}{27}$ (la envolvente) e $y = x$ (el conjunto de puntos de retroceso de primera especie); c) la curva discriminante $y = 1$ es un conjunto de puntos de retroceso de primera especie y no es una envolvente; d) la curva discriminante se descompone en las rectas: $x = -a$ (la envolvente) y $x = 0$ (el conjunto de nudos).

4.1. a) 1 g, 0,0043%; b) 1 mm, 0,12%; c) 1′, 0,066%. **4.2.** 1) $\Delta = 0{,}002$ km, $\delta = 0{,}008\%$; 2) $\Delta = 30$ m², $\delta = 2\%$. **4.3.** La primera. **4.4.** a) 0,05, 0,14%; b) 0,005, 6,25%; **4.5.** 29,2 y 3,2. **4.6.** 1) 5,373, 0,0004, 0,0074%; 2) 5,73, 0,0026, 0,048%; 3) 5,4, 0,0274, 0,51%. **4.7.** $202 \cdot 10^{-1}$, $188 \cdot 10^{1}$, $600 \cdot 10^{3}$. **4.8.** a) Dos, $41 \cdot 10^{4}$; b) uno, $8 \cdot 10^{-2}$. **4.9.** No menos que con dos signos. **4.10.** No menos que con tres signos. **4.11.** —**4.15.** ◇ Hágase uso de la fórmula (1), § 4. **4.16.** 185,7. **4.17.** $1{,}3 \cdot 10^{2}$. **4.18.** 71,88. **4.19.** No se puede realizar la sustracción. **4.20.** 61,6. **4.21.** $512 \cdot 10$. **4.22.** 3,3. **4.23.** $3 \cdot 10$. **4.24.** $66 \cdot 10^{3}$. **4.25.** 7,397. **4.26.** $\leqslant 12\pi$ cm², $\leqslant 8{,}3\%$, **4.27.** $\approx 0{,}436$. **4.29.** $\leqslant 0{,}17$ mm. **4.30.** $(2{,}7 \pm 0{,}1)$ g/cm³. **4.31.** De acuerdo con el principio de efecto igual, mídase R con el error relativo 0,25% y la altura H, con el error relativo 0,5%. **4.32.** 12″. **4.33.** 4. **4.34.** 4. **4.35.** De acuerdo con el principio de igual efecto, se puede tomar π con tres signos justos en el sentido estrecho, mídanse los radios con la exactitud de hasta 0,8 cm, y la directriz, con la exactitud de hasta 1,25 cm.

APÉNDICE

DESCRIPCIÓN BREVE DEL LENGUAJE FORTRAN-IV

El FORTRAN es un lenguaje algorítmico cómodo destinado para resolver diferentes problemas aplicados. La palabra «FORTRAN» está formada por las sílabas iniciales de dos palabras inglesas FORmula TRANslator (intérprete de fórmulas).

El programa en FORTRAN se anota, como regla, en un formulario especial y de una sucesión de operadores. Para cada operador se destina una línea aparte. La línea del formulario comprende 80 columnas (posiciones). En ausencia de formularios especiales, el programa FORTRAN se anota en un papel corriente tomando en consideración que cada línea debe comprender no más de 80 símbolos y observándose las exigencias que se exponen más abajo. El operador del FORTRAN ocupa las columnas del 7 al 72 inclusive. Las columnas desde la primera hasta la quinta inclusive se destinan para la marca del operador. La marca que representa un número entero sin signo alguno puede escribirse en cualesquiera de las cinco columnas citadas. Los blancos dentro de la marca se ignoran. Si falta lugar para el operador en una línea, puede continuarse en la otra. Los signos de las operaciones aritméticas no se repiten. La continuación de la anotación puede ocupar no más de 19 líneas, en cada una de las cuales se anota en la sexta columna un símbolo, distinto de 0 ó del blanco. Comúnmente se pone el número de la línea de continuación.

Anotación de los comentarios. El programa puede contener diferentes explicaciones que facilitan su lectura y asimilación. Los comentarios se pueden disponer en cualquier lugar del programa. En la primera posición de la línea del comentario se pone obligatoriamente la letra C. Para la anotación de los comentarios se puede utilizar cualquier símbolo del FORTRAN.

Las construcciones principales del lenguaje FORTRAN están constituidas por los *operadores*. Estos se dividen en dos clases: directivos (ejecutables) y descriptivos (no ejecutables). Los operadores directivos indican las operaciones y el orden en que se ejecutan dichas operaciones. Los operadores descriptivos se utilizan para describir las magnitudes, indicar el tipo de éstas, su estructura, etc.

Símbolos principales. A título de letras para la anotación de los operadores se usan las letras mayúsculas del alfabeto latino: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z y las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La cifra 0 (cero) se tacha (∅) para distinguirla de la letra O. Los símbolos especiales son:

+, el signo de sumación,
—, el signo de sustracción,
*, el signo de multiplicación,
/, el signo de división,
., el punto decimal,
,, la coma.
(, el paréntesis izquierdo (abrir paréntesis)
), el paréntesis derecho (cerrar paréntesis).

Constantes y variables. Existen seis tipos de constantes: enteras, reales, complejas, lógicas, de símbolo, sexadecimales.

La constante entera (forma I) es un número cualquiera anotado sin punto decimal. El valor de una constante entera no puede sobrepasar de $2^{31} - 1 \approx 2 \cdot 10^9$.

La constante real (forma F) es un número cualquiera escrito con un punto decimal que divide las partes entera y fraccionaria del número. El número máximo de cifras en la forma F es igual a 7.

Forma exponencial de notación de un número real (forma E). En esta forma todo número consta de una constante entera o real y un exponente. La primera letra del exponente es siempre E, tras la cual sigue la constante entera (valor del exponente) formada por no más de dos cifras decimales con un signo o sin éste. El número de cifras de la mantisa no debe ser superior a 7.

Cuando hay necesidad de recurrir a una exactitud mayor, se emplea la constante de precisión doble (forma D). Se anota como un número con un punto decimal que contiene de 8 a 16 cifras significativas, o bien en la forma exponencial en la que en lugar de E se pone la letra D; la mantisa puede contener hasta 16 cifras significativas.

Las variables son unas magnitudes a las que se han asignado ciertas denominaciones, o sea nombres simbólicos. El nombre simbólico es un juego de letras o de letras y cifras; la cantidad de éstas en un juego varía de 1 a 6. El nombre siempre comienza con una letra. No se permite que en los nombres se empleen símbolos especiales o blancos.

Tipos de variables. El tipo de variables corresponde al tipo de datos que ellas describen. Las variables enteras describen números enteros, las variables reales describen números reales, etc. En el caso más sencillo para describir el tipo de las variables sirve el operador

$$\text{tipo } a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

donde el tipo es una de las palabras de servicio REAL (real), INTEGER (íntegro), DOUBLE PRECISION (precisión doble), LOGICAL (lógico); $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los nombres de las variables. Si el programa no contiene indicaciones explícitas acerca del tipo de variables, entonces las variables cuyos nombres comienzan por las letras I, J, K, L, M, N representan magnitudes enteras; todas las demás variables representan variables reales.

Variables con índices. La tabla es una sucesión ordenada de magnitudes (elementos de la tabla), denotada por un nombre simbólico único. Todo elemento de la tabla se determina mediante el nombre de la tabla y su posición en ésta última, es decir, mediante los valores de los índices. A título de nombre de la tabla puede servir cualquier nombre simbólico admisible. Los índices se encierran entre paréntesis. El número de índices lleva el nombre de dimensión de la tabla. El número de elementos en la tabla se denomina tamaño de la tabla. En calidad

de índices se emplea cualquier expresión aritmética y las variables, tanto del tipo entero como real. En el caso de una expresión de tipo real se toma como índice su parte entera, es decir, se desecha la parte fraccionaria. Los índices de los elementos de una tabla siempre son mayores o iguales a 1.

Descripción de las tablas. Las tablas que se usan en el programa han de ser obligatoriamente descritas. La descripción de las tablas se da al principio del programa y se dispone antes del primer operador directivo. Para describir la tabla sirve el operador DIMENSION cuya forma general es

$$\text{DIMENSION } a_1 (n_1, n_2, \ldots, n_i), \ldots, a_2 (m_1, m_2, \ldots, m_j),$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son los nombres de las tablas. Las cotas superiores de variación de los índices están dadas por números positivos enteros, $1 \leqslant i \leqslant 7$, $1 \leqslant k \leqslant 7$. Los elementos de una tabla multidimensional se disponen en la memoria de destinación sucesivamente uno tras otro, de suerte que el primer índice cambia más rapidamente y el posterior, más lentamente.

Expresiones aritméticas. Las expresiones aritméticas en el FORTRAN son análogas a las expresiones algebraicas corrientes. En las expresiones aritméticas pueden figurar constantes, variables simples o con índices, funciones que se unen con ayuda de las operaciones aritméticas. Si en una expresión faltan los paréntesis, los cálculos se realizan de acuerdo con las reglas siguientes: al principio se realiza la elevación a potencia (el signo **), luego la multiplicación (el signo *) y división (el signo /) y después, la sumación y la sustracción. Si en una expresión se tienen paréntesis, entonces al principio se realizan los cálculos dentro de los paréntesis. Si la expresión contiene funciones, en primer lugar se calculan los argumentos de estas funciones y los valores correspondientes de las mismas. Las expresiones aritméticas pueden contener constantes, variables y funciones de diferentes tipos. Previamente a la ejecución de una operación las variables se reducen a un mismo tipo, razón por la cual con el fin de disminuir el tiempo gastado para realizar la operación, no se recomienda que se mezclen las variables de diferentes tipos en una expresión (la notación Y + 5. es preferible en comparación con la notación Y + 5).

Operadores descriptivos principales del FORTRAN. Algunos de los operadores descriptivos se han examinado más arriba. Nos detendremos en otros operadores que se encuentran con frecuencia.

El operador EQUIVALENCE se anota en la forma

$$\text{EQUIVALENCE } (a, b, c, \ldots), \ldots, (d, e, f, \ldots),$$

donde a, b, c, . . ., d, e, f, . . . son variables, simples o con índices. El sentido del operador dado consiste en que los valores, que corresponden a a, b, c, . . ., se disponen en una célula y los correspondientes a d, e, f, . . . están también todos en una célula. Las variables a cotejar deben ser de igual longitud. Hay que tener en cuenta que al cotejar los elementos sueltos de las tablas, se someten al cotejo todos los demás elementos de las dos tablas.

El operador COMMON se anota en la forma COMMON A, B, C, . . ., donde A, B, C son los nombres de las variables con índices o sin ellos. La zona COMMON es especial y está destinada para guardar

los datos comunes para dos o varios subprogramas o bien datos comunes para el programa principal y sus subprogramas. En el FORTRAN-IV la zona COMMON puede dividirse en varios bloques. La estructura de la notación del operador COMMON, con la utilización de los bloques, es la siguiente:

COMMON (nombre del bloque) a_1, a_2 . . .

El operador FUNCTION tiene la siguiente forma

FUNCTION nombre (argumento$_1$, . . ., argumento$_n$).

El operador dado constituye el título del subprograma. Los argumentos en el operador son ficticios e intervienen sólo en la descripción del método empleado para calcular las funciones. Como argumentos pueden figurar las variables sin índices, las tablas o los nombres de las funciones. En el interior del subprograma debe encontrarse, aunque sea una sola vez, un operador que tiene el nombre de función subprograma en el miembro derecho del operador de asignación. El último operador directivo de la función subprograma debe ser el operador RETURN. Éste asegura el retorno del mando al programa principal. END debe ser el último operador del subprograma. Al referirse a la función subprograma debe haber una correspondencia entre los tipos y la cantidad de variables verdaderas y formales.

El operador SUBROUTINE tiene la forma

SUBROUTINE nombre (argumento$_1$, argumento$_2$, . . ., argumento$_n$).

El operador constituye el título del subprograma SUBROUTINE. Este subprograma se emplea cuando es necesario obtener varios resultados. Las variables, cuyos valores se calculan, se indican en la lista de argumentos. La función subprograma considerada anteriormente nos proporciona explícitamente un solo resultado. El subprograma SUBROUTINE es individual y sus variables están localizadas sólo en este subprograma, en lo que toca a la región de su acción. En el programa principal la referencia al subprograma SUBROUTINE se realiza con ayuda del operador

CALL nombre (argumento$_1$, . . ., argumento$_n$).

Aquí la sucesión argumento$_1$, . . ., argumento$_n$ representa los parámetros verdaderos de entrada y de salida. A título de argumento del subprograma puede figurar el nombre de cualquier subprograma. En este caso el programa principal debe incluir el operador descriptivo

EXTERNAL nombre$_1$, nombre$_2$, . . .

Tanto en la función subprograma como en el subprograma SUBROUTINE, al emplear a título de parámetro formal el nombre de tabla, éste se debe describir con ayuda del operador DIMENSION. Se admiten emplear como cotas de variación de los índices las variables enteras, a la par con las constantes enteras. Dichas variables han de incluirse forzosamente en el número de argumentos formales. El subprograma SUBROUTINE debe contener al menos un operador RETURN. El

subprograma termina en operador END que significa el fin del subprograma SUBROUTINE.

La introducción y la retirada de la información en el FORTRAN se realiza bajo el mando del operador FORMAT. A la entrada éste indica en qué posiciones (columnas) deben leerse los datos para las variables enumeradas en la lista e/s (entrada/salida) y en qué formato. La estructura de la lista e/s la volveremos a considerar más abajo. A la salida el operador FORMAT señala a qué posiciones y en qué formato se realiza la retirada. La forma de representación de una variable o de un número y del campo, del cual debe tomarse la lectura a la entrada (o en el que deben imprimirse a la salida), se determinan por la especificación del formato del operador FORMAT. En los casos más sencillos el número de espesificaciones del formato en el operador FORMAT ha de corresponder al número de variables en la lista e/s. El operador FORMAT se escribe en la forma

$$\text{marca FORMAT } (S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

donde la marca es un número entero sin signo, S_1, S_2, . . ., S_n son las especificaciones.

He aquí las especificaciones que se encuentran con mayor frecuencia. Para la introducción (retirada) de los datos numéricos sirven las especificaciones I_w, $F_{w.d}$, $E_{w.d}$; aquí w es el número total de posiciones que se destinan para el número dado (la cantidad total de cifras del número), d es el número de cifras decimales después del punto decimal. La longitud del campo d debe incluir las posiciones para el punto y el signo del número para la especificación de F, como también las posiciones para el signo del exponente, la letra E(D) y dos posiciones para el valor del exponente, en el caso de las especificaciones E, D. Durante la salida del número deben preverse en el formato E(D) cuatro posiciones para el exponente del número y, además, las posiciones para 0 entero, el punto y el signo de dicho número. A la salida ha de observarse la limitación $w - d \geqslant 7$. Al salir los datos en el caso de la especificación F, si el número retirado no cabe dentro de las posiciones destinadas, el campo correspondiente se llena por los asteriscos. Para la notación reiterada de varias especificaciones iguales se puede emplear sólo una de ellas anteponiéndole un número igual a la cantidad de repeticiones. Se pueden repetir los grupos de especificaciones encerrándolos entre paréntesis y anteponiendo al paréntesis un número entero igual a la cantidad de repeticiones de los grupos. Al salir para la imprenta un texto o algunos comentarios, se emplean las especificaciones del tipo H y las del tipo «literal». La especificación del formato del tipo H tiene la forma wH, donde w es el número de cualesquiera símbolos de letras y cifras, admisibles en el FORTRAN, que se disponen tras la letra H inmediatamente. Cuando se usa la especificación del tipo «literal», la información de letras y cifras debe encerrarse entre comillas. La ventaja de la especificación del tipo «literal» consiste en que en este caso no hay necesidad en indicar la cantidad de símbolos, mientras que al usar la especificación del tipo H esta indicación es obligatoria. Para dirigir la disposición de los datos en una línea, se usa, en el caso más simple, la especificación del tipo wX, donde w es el número de blancos que se emplean con el objeto de mejorar el carácter ilustrativo de los resultados en la salida.

El operador FORMAT puede disponerse en cualquier lugar del programa.

El operador FORMAT actúa recíprocamente con los operadores de la entrada–salida: el READ (leer) para la entrada y el WRITE (escribir) para la salida. La forma general de los operadores READ y WRITE es la siguiente:

READ (i, n1) lista

WRITE (i, n2) lista

Aquí i en el primer caso significa el número del dispositivo, del cual sale la información a leer, en el segundo caso determina el impresor de sistema, n1 es la marca del operador FORMAT. En los sistemas de operación de disco el operador READ para la introducción de la información proveniente de la tarjeta perforada tiene, como regla, la forma READ(1, n1) lista, y el operador WRITE: WRITE(3, n2) lista, respectivamente. La lista e/s tiene la forma $a_1, a_2, \ldots, a_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los elementos de la lista. Como elementos de la lista pueden figurar: las variables (simples o con índices), los nombres de las tablas, la forma de DO implícito. Esta última se utiliza con una frecuencia particular cuando es necesario grabar en la memoria o hacer salir para el impresor cierta parte de la tabla, como también para organizar la salida de la tabla en líneas. La forma de DO implícito se encierra entre paréntesis. Entre paréntesis se disponen las variables con índices o las formas de DO implícito separadas mediante comas, si hay varias. Tras la última variable se anotan los parámetros de índice $i = m_1, m_2, m_3$, donde i es el índice, m_1, m_2, m_3 son las cotas inferior y superior y el paso de variación del índice, respectivamente. Si $m_3 = 1$, el paso no se indica.

Al perforar la información, para el operador READ se emplean todas las 80 columnas (posiciones) de la tarjeta, las que determinan la anotación a la entrada. La anotación a la salida no debe sobrepasar de 120 símbolos en la línea del impresor de sistema. Para sacar la información para el impresor puede utilizarse el operador PRINT n2 lista.

Operadores directivos principales del FORTRAN. El operador aritmético de asignación tiene la forma

variable = expresión

Aquí el signo = se diferencia del signo algebraico corriente de igualdad. Este signo tiene el sentido «sustituir por . . . », es decir, se calcula el valor de la expresión aritmética que se encuentra en el miembro derecho y la magnitud obtenida se convierte en el nuevo valor corriente de la variable que está a la izquierda del signo de igualdad. Por esto, por ejemplo, resulta admisible la notación I = I + 1; ésta implica el aumento del valor de la variable entera I en una unidad.

Todos los operadores del programa escrito en FORTRAN se ejecutan sucesivamente, siempre que no haya entre ellos operadores especiales que dirigen la sucesión de ejecución de los operadores. Éstos son los operadores que siguen:

El operador GO TO n asegura la transmisión incondicional de mando al operador con la marca n. En el programa no deben haber operadores que tengan marcas iguales. El operador marcado puede disponerse en cualquier lugar del programa.